Predicción y simulación: nociones asociadas a las ecuaciones diferenciales

Miguel Solís Esquinca
Universidad Autónoma de Chiapas, Cinvestav IPN, México
solise@montebello.unach.mx

Resumen

A partir de la hipótesis de que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y de Simulación sea el eje del Cálculo Integral escolar, reportamos, aquí, algunos resultados de nuestro trabajo con estudiantes universitarios con los que hemos explorado aspecto de la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Favoreciendo la idea de simulación, se trabajó con la ecuación diferencial , dónde se variaron uno a uno los parámetros *a*, *b* y *c*.

Encontramos un argumento gráfico que atiende las tendencias de las gráficas, ya sea en una suma de funciones, en la variación de los parámetros o en la forma de la gráfica de la solución de las ecuaciones diferenciales, favorecidos por los dispositivos tecnológicos permiten concebir a una función globalmente.

Introducción

La ciencia y la tecnología se han desarrollado a lo largo de la historia del ser humano a través de dos cuestiones fundamentales: la predicción y el control de los fenómenos naturales. Si bien, la noción de Predicción permite conocer la evolución posterior de los fenómenos de variación continua cuantificando la relación funcional entre variables a partir de las condiciones iniciales y de las variaciones de las variables involucradas en el fenómeno (Muñoz, 2000), esto es construir $F(t)$; el control de estos fenómenos de variación estaría vinculado a la noción de Simulación, esto es, partir de $F(t)$, construir y analizar la organización de los comportamientos de $y(t)$ a través de la variación de los parámetros (A, a, B y b).

En un ambiente gráfico favorecido por el contexto social y cultural contemporáneo del uso de calculadoras y computadoras con capacidad gráfica, las actividades didácticas que privilegien a la simulación se verán también favorecidas. A partir de la hipótesis de que una relación simbiótica entre las nociones de Predicción y de Simulación sea el eje del Cálculo Integral escolar, reportamos, aquí, algunos resultados de nuestro trabajo con estudiantes universitarios con los que hemos explorado aspecto de la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Antecedentes

Los dispositivos tecnológicos emergentes disponibles, calculadoras programas matemáticos de cómputo cada vez más sofisticados, son ahora comunes entre los estudiantes de nuestro sistema educativo mexicano en el nivel superior y, aunque no en la misma medida de su disponibilidad, están siendo incorporados al aula. Libros de texto han incorporado el uso de calculadoras o computadoras en su discurso, en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa pueden encontrarse un número respetable de artículos que tratan al respecto. Esto ha permitido pensar en modificaciones de la presentación de la matemática en la escuela.

Los cambios más significativos han consistido en adelantar contenidos, que formaban parte de cursos posteriores, a los cursos actuales, por ejemplo, el precálculo tradicionalmente enfocado a funciones y sus gráficas, aborda ahora conceptos como máximos y mínimos o función creciente y decreciente, sin tener que introducir el concepto de derivada, sin embargo, estos argumentos son aplicados solo en este curso, en Cálculo serán incluso inhibidos. En la matemática universitaria, donde el cálculo ocupa un papel predominante, no es claro como estos argumentos visuales usados en precálculo pueden ayudar al entendimiento de los estudiantes de temas que están ubicados en niveles avanzados del currículo, por ejemplo en las ecuaciones diferenciales.

El Problema de Investigación

El problema de investigación, que hemos venido trabajando, es estudiar entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales a través de observar actos visuales y actos analíticos (Zazkis et al, 1996) que se presentan en las estrategias de los estudiantes al resolver un problema. Para este estudio se crea un ambiente gráfico específico donde se privilegia la idea de simulación con lo que es posible encontrase con los argumentos gráficos usados en el precálculo, usando calculadoras que grafican funciones. Observando estrategias de estudiantes identificaremos los actos visuales y analíticos que surgen de éstas y determinaremos el papel que éstos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales. Usamos un argumento gráfico, favorecido por el uso de calculadoras que grafican funciones, y que hemos llamado "comportamiento tendencial" (Cordero & Solís 1997). El proyecto ha ofrecido algunos resultados que pueden consultarse en Solís, 2000.

Lo que reportamos

En este trabajo reportamos una serie de experiencias llevadas a cabo con estudiantes universitarios, en la dirección descrita, enfrentándose a situaciones matemáticas, particularmente de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Lo que aquí presentamos es la continuación de lo ya reportado en Solís (2000).

En aquella ocasión, describimos una experiencia donde diez estudiantes universitarios se enfrentaron a situaciones que involucran ecuaciones diferenciales. Las observaciones de sus producciones las hicimos mediante el método de entrevista clínica. El protocolo de la entrevista individual consistía de tres partes: en la primera el estudiante se familiarizaba con una "aritmética gráfica"; en la segunda parte, se presentaban las ecuaciones diferenciales $y_l+y=F(x)$ cuando $F(x)=k$, $F(x)=x$ y $F(x)=x^3$, y y se preguntaba sobre su solución, algebraica y gráfica; en la tercera parte se trabajó la generalización $F(x)=x^n$. En una entrevista colectiva, un grupo de cinco estudiantes trabajaron las mismas relaciones, ahora usando en formas tabulares.

El diseño de esas entrevistas respondía más la posibilidad de observar las relaciones que se establecieran entre la expresión algebraica de una ecuación diferencial y la gráfica de su solución, en ese contexto, la noción de comportamiento tendencial jugó un papel fundamental.

Con esto como antecedente, se procedió a diseñar una nueva actividad donde ahora se favoreciera la "aritmética gráfica" del precálculo (dilataciones, contracciones, traslados) además de privilegiar la noción de simulación (control). Ahora son los parámetros (coeficientes) de la ecuación el centro de atención en el problema. Si en la primera actividad, los estudiantes se centraron en observar el comportamiento global de la función $F(x)$ para predecir el comportamiento de la solución, en esta nueva, la atención estará en los efectos que la variación de los parámetros tiene en la solución.

Diseño de la situación

Para favorecer la idea de simulación, se trabajó con la ecuación diferencial , dónde se variaron uno a uno los parámetros a, b y c. El diseño y la aplicación se hicieron en dos partes. Primero, un grupo regular de estudiantes de la Universidad Autónoma de Chiapas, que cursan la materia de ecuaciones diferenciales, en grupos de cinco respondieron el siguiente cuestionario:

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales y bosqueja las gráficas de las soluciones (toma $c = 1$ como constante de integración).

$$y'(x) + y(x) = x^2$$

$$2y'(x) + y(x) = x^2$$

$$y'(x) + 2y(x) = x^2$$

$$y'(x) + y(x) = 2x^2$$

Compara las soluciones gráficas y algebraicas de las cuatro ecuaciones.¿Cuál es el efecto en la solución al variar los coeficientes en la ecuación?

Un segundo grupo de cinco estudiantes, en entrevista clínica, se enfrentaron a la siguiente situación: primero se presentaba en una hoja dos columnas, la de la izquierda mostraban cuatro ecuaciones $y'(x) + y(x) = x^2$; $2y'(x) + y(x) = x^2$; $y'(x) + 2y(x) = x^2$; $y'(x) + y(x) = 2x^2$, en la columna de la derecha se mostraban ocho gráficas que eran dos de las soluciones para cada ecuación, aquí se les pedía relacionaran las dos columnas; enseguida se presentaba una hoja similar a la primera pero ahora mostrando en la columna de la derecha ocho expresiones algebraicas que correspondían a dos de las soluciones de cada ecuación; en una tercera hoja se presentaba tres columnas, la de la izquierda mostraba las ecuaciones, la del centro las ocho gráficas y la de la derecha las ocho expresiones algebraicas. En la tercera y segunda hoja también se les pedía relacionar las columnas.

Descripción de las acciones

Los estudiantes que se someten a la primera parte de la situación, el cuestionario, lo hacen como parte de su curso de ecuaciones diferenciales. Ellos cursan el tercer semestre de la carrera de Ingeniería Civil, resuelven el cuestionario dentro del horario de clases, en una sesión de un poco más de hora y media. No todos los equipos logran terminar, sobre todo con lo que se refiere a la última pregunta, que es la que más nos interesaba. Se dividen el trabajo de resolver las ecuaciones, utilizando el método de factor integrante, y graficar la solución, algunos utilizan calculadoras que grafican. A continuación presento un párrafo que a manera de conclusión nos ofrece uno de los equipos que pudo terminar la actividad.

> ...En todas nuestras gráficas es la misma parábola (sic) la que se refleja, sin embargo la variación de los coeficientes hace que se abra o cierre más la

parábola. Si se duplica la derivada, la parábola es más abierta y la pendiente de la gráfica es menor. En caso de variar la función, la parábola se abre más de un lado, y la parte de la izquierda se acerca mucho más al eje de las "y".

La segunda parte de la actividad se llevó a cabo con estudiantes distintos a los que estuvieron en la anterior, estos estudiantes, aunque ya habían cursado la materia de ecuaciones diferenciales no se habían enfrentado a una situación similar. Aunque saben resolver este tipo de ecuaciones, cuando se les presenta la primera hoja que sólo contiene las ecuaciones y las gráficas, no intentan una solución algebraica, al menos en un principio. Su atención se centra en los comportamientos de las gráficas. Aunque no pueden establecer todas las relaciones correctamente, un argumento del precálculo es usado para justificar una elección que resultó correcta. Los estudiantes reconocen una parte de la gráfica como una parábola y la relacionan con el término $F(x)$ en la ecuación . A continuación un extracto de la trascripción.

Estudiante: ...ésta (la gráfica) debe corresponder con ésta o ésta (las expresiones) porque las parábolas (parte derecha de la gráfica) están mas cerradas que las otras.

Entrevistador: ¿Más cerradas?

Estudiante: Sí, ... no es como las otras que están casi igual de cerradas y como ésta es la única que está multiplicada por dos (se refiere a) y las otras no.

Entrevistador: Pero estas dos también tienen un término multiplicado por dos, por ejemplo aquí (señala $2y$ en una ecuación) y aquí (señala en otra).

Estudiante: Si pero no en parábola.

La relación en cuestión es entre una gráfica muy conocida (la parábola) y la forma de la curva solución de la ecuación diferencial. Ya vimos que los estudiantes, al observar los comportamientos de las funciones involucradas en una suma pueden predecir el comportamiento de la función suma a partir de los comportamientos de las funciones involucradas en ésta. En el caso de las ecuaciones diferenciales lineales la pregunta está en uno de los sumandos. Esto adquiere un significado especial, ya que estudiantes que no participaron en la primera experiencia pueden percibir a la solución como una función que tiene características de la función suma, en este caso la parábola. Con esta lógica, le atribuyen a la solución las mismas propiedades que al término $F(x)$ (la función suma).

Análisis

Los estudiantes que se sometieron a estas situaciones están familiarizados con las gráficas de funciones cuadráticas así cómo también sobre los efectos que la variación de sus coeficientes tienen sobre las mismas. Esto favorece que en la actividad se relacionen las gráficas de las soluciones con parábolas y los efectos que sobre una parábola ocurren cuando se varían sus parámetros en la expresión algebraica sean trasladados, ahora, en lo que ocurre cuando los parámetros son variados en la ecuación diferencial.

En esta experiencia pudimos observar cómo los estudiantes trasladan las propiedades geométricas de una curva conocida que han trabajado en el precálculo al contexto de las ecuaciones diferenciales. Sus argumentos están relacionados a los comportamientos gráficos, en general a los de carácter global, como comportamientos asintóticos, comportamientos al infinito, curvas que es una ventana "ampliada" de su calculadora se "parecen", entre otras, sin embargo algunos estudiantes también ponen atención a los comportamientos de carácter local, como intersección con los ejes, vértices.

Las actividades son presentadas a los estudiantes cuando ellos ya saben resolver ecuaciones lineales de primer orden, incluso de un tipo, que cualquier texto diría, mas difícil de las aquí presentadas. No obstante las preguntas sobre las soluciones parecían ser nuevas para los estudiantes. El método que emplearon para resolver sus ecuaciones fue el del factor integrante.

El método de resolución, que les da a los estudiantes control en esta etapa de solución no permitió ver a la ecuación como una suma de funciones, no dos funciones cualquiera sino una y su derivada, situación que si se presentó en estudiantes que aún no dominaban un método de solución. Esto es, el método no permite reflexionar en el proceso de solución y la relación entre la ecuación y su solución se torna difícil y sólo se observa la "parte" parabólica de ambas expresiones (ecuación y solución).

En Solís (2000) se reportó un método que un estudiante empleó para resolver una ecuación a partir de ir completando la solución, proponiendo primero una función que se aproximara a la solución y después ir quitando o agregando términos que permitieran a la función cumplir con la ecuación.

El considerar a la ecuación diferencial aquí escrita como una suma de funciones, en este caso particular como una parábola (función) mas una recta (derivada) hubiera permitido reconocer propiedades de tangencia en el punto donde la gráfica cruza al eje y. Estudiantes en precálculo han llegado a establecer estos comportamientos locales ante una situación netamente de precálculo, usando el argumento de que la función suma "hereda" las propiedades de la funciones sumandos.

En una actividad muy reciente, llevada a cabo no de forma sistemática con profesores de posgrado, en la que se trabajaron situaciones de precálculo de suma de funciones, favoreciendo el argumento de comportamiento tendencial (Cordero, 2001; y Solís, 2000), resolvieron la actividad aquí descrita usando los mismos argumentos que el precálculo, el decidir entre una curva y otra se hizo a través de las propiedades de tangencia de la curva solución en la intersección con el eje y.

A continuación, a manera de resumen, enlisto algunos hechos que hemos observado a partir de estas actividades:

- Las calculadoras y aplicaciones de cómputo que grafican funciones hace que los estudiantes fijan su atención a formas globales de las gráfica, favoreciendo argumentos gráficos que responden a comportamientos tendenciales de las funciones.
- El argumento de comportamiento tendencial surge en la actividad de sumar una función con una "recta" cuándo la pregunta se hace a partir del contexto gráfico en que ocurre, lo que hemos llamado una aritmética gráfica.

- Las propiedades gráficas de las funciones sumandos, de la actividad descrita en el párrafo anterior, son heredadas a la función suma, estableciendo argumentos gráficos que tienen que ver con estrategias locales (tangencia en un punto) y estrategias globales (reconocimiento de formas geométricas completas)
- Estudiantes pudieron construir un método de solución de un tipo particular de ecuaciones diferenciales a partir de reconocimientos de patrones analíticos, para esto lo fundamental fue predecir una posible expresión para la solución de la ecuación y reconocer que la ecuación está formada, en este caso, por un polinomio (función propuesta) mas otro de grado menor en uno (función derivada). Esto llevó también a involucrar la derivación sucesiva en el método de solución.
- Se conservan en la variación de parámetros (coeficientes) de una ecuación diferencial lo que los estudiantes han experimentado en el precálculo. Aunque sólo las dos ecuaciones en las que el término de la ecuación es afectado, y , pudieron ser relacionadas con su solución, los argumentos usados están anclados en que la solución debe parecerse al término y que los efectos en esta parábola (, en este caso), deben ser parecidos a los efectos en la situación, pudiendo establecer la correcta relación con sólo la observación de la concavidad de la parábola.
- El método estándar de solución de este tipo de ecuaciones diferenciales no favorece este tipo de análisis gráfico ya que el centro de la solución está en el término exponencial de la solución y no en el polinomio, lo que no permite establecer una relación entre ellos. Nuestra tarea sería ahora diseñar una actividad en la que los argumentos gráficos fueran favorecidos.

Reflexiones Finales

Los trabajos de esta investigación aportan una visión que nos sitúa en un marco funcional, en el sentido de establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados, de ahí que un lenguaje de herramientas y nociones sea privilegiado sobre un lenguaje de objetos (Cordero, 2001). Esto distingue nuestro estudio de aquellos que atienden a los significados desde la perspectiva de un objeto matemático dado e inamovible (la definición de éste), en estos los significados que los estudiantes dan a un objeto están cerca o lejos de su definición. Las investigaciones que hacemos no presuponen un objeto matemático dado, son las significaciones que los estudiantes dan a las situaciones matemáticas nuestro objeto de estudio.

Situarse en ese marco permitió encontrar un argumento gráfico, implícito algunas veces y explícito en otras, en las explicaciones de los estudiantes. Surge en un ambiente gráfico favorecido por los dispositivos tecnológicos que grafican funciones y que permiten concebir a una función globalmente, esto es, la gráfica es un objeto completo y no se percibe el proceso que la antecede. Este argumento atiende las tendencias de las gráficas, ya sea en una suma de funciones, en la variación de los parámetros o en la forma de la gráfica de la solución de las ecuaciones diferenciales. Habilitado a partir de las explicaciones, éste argumento, al que hemos llamado comportamiento tendencial de las funciones, se convierte ahora en un programa que organiza contenidos del cálculo, de ahí que adquiera un statu quo epistemológico y puede considerarse como una categoría del cálculo. Así, una pregunta obligada en Matemática Educativa es ¿cómo organizar el Cálculo Integral al seno de las instituciones escolares de tal forma que el funcionamiento del sistema didáctico permita propiciar que la mayoría de los estudiantes lo aprendan? Nuestra hipótesis es que una relación simbiótica entre la noción de Predicción y de Simulación puede convertirse en el eje organizador del Cálculo Integral escolar.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen 4, número 2. pp 103 – 128. México: Clame - International Thomson Editores.

Cordero, F. & Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo.* Edición Especial Casio. Cuadernos Didácticos. Volumen 2. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (2000). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen 3, número 2. pp. 131 – 170. México: Clame - International Thomson Editores.

Solís, M. (2000). *Comportamientos gráficos y analíticos en las explicaciones de los estudiantes: Situaciones con ecuaciones diferenciales.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13. Año 2000. México: Clame - Grupo Editorial Iberoamérica.

Zazkis, R. & Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). *Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4.* Journal for Research in Mathematics Education. (27)4, 435-457.