La predicción y la regla de los signos de descartes

Ricardo Cantoral y Marcela Ferrari

rcantor@mail.cinvestav.mx y mferrari@mail.cinvestav.mx

Resumen

René Descartes publicó en 1637 su famosa *Géométrie*, un tratado donde aplica el álgebra a la geometría y desarrolla un original sistema de álgebra simbólica. En el tercer libro de la *Géométrie* enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos de Descartes. Durante dos siglos, el mundo matemático intentó sin éxito una demostración general y satisfactoria a los estándares de la época. Finalmente, Carl Frederick Gauss la demostró de la manera más general en 1828 recurriendo a métodos algebraicos.

En este artículo, presentamos el tratamiento que la regla de los signos tiene en los libros de texto de álgebra y proponemos una justificación original alternativa apoyada en la idea de predicción que, hasta donde sabemos, no ha sido reportada en la literatura especializada.

Introducción

Este trabajo sobre la regla de los signos de Descartes, centra su atención en un método que se encuentra en el cruce de caminos entre los procedimientos algebraicos y analíticos y en un época marcada por el nacimiento de un nuevo espíritu científico. Nuestra pretensión consiste, después de analizar la evolución conceptual de la regla, en proponer una justificación de naturaleza didáctica que permita el manejo flexible y articulado entre los diferentes marcos de representación usando para ello la idea de predicción.

Enmarcamos nuestra investigación en el acercamiento socioepistemológico, entendiéndose por tal a la aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre: la epistemología o lo relativo al conocimiento, la dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales.

La regla de los signos de Descartes

René Descartes publicó en 1637 su famosa *Géométrie*, un tratado donde aplica el álgebra a la geometría y en el que introduce el simbolismo algebraico actual que permitió a la postre la emergencia del álgebra clásica y de la geometría analítica. Particularmente, en el tercer libro de la *Géométrie* se enuncia, sin demostración, su célebre regla de los signos que hoy lleva su nombre:

On connoist aussy de cecy combien il peut y avoir de vrayes racines, & combien de fausses en chasque Equation. A sçavoir il y en peut avoir autant de vrayes, que les signes, & s'y trouvent de fois estre changés; & autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes o deux signes qui s'entresuivent. (Descartes, 1637).

Sin una demostración de la regla, explica su método aplicándolo a $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, ecuación construida multiplicando las ecuaciones x-2=0, x-3=0, x-4=0, x+5=0 a fin de obtener una ecuación de cuarto grado con tres raíces positivas, $(x-2)(x-3)(x-4)(x+5) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. Como sabemos, la regla limita el número de raíces positivas de una ecuación polinomial al declarar que no exceden el número de cambios de signo en los coeficientes del polinomio. Naturalmente el número de cambios de signos se considera cuando el polinomio ha sido escrito de forma que sus potencias desciendan o equivalentemente asciendan.

Una demostración satisfactoria de la regla fue publicada por Gauss en 1828, luego de un periodo que va de 1637 a 1828 en el que se produjo una gran cantidad de intentos de demostración sin que ninguno de ellos alcanzara su objetivo. Algunos sin embargo, sirvieron para analizar casos particulares y para explicar la regla en la enseñanza de la época. Después de esta demostración, las discusiones sobre la regla de los signos siguieron distintos rumbos. Entre ellos, se intentó, como lo hicieran Budan, Sturm o Fourier (ver Dickson, 1903 o Rey Pastor et al, 1963), generalizarla de manera que los métodos de separación de raíces fuesen más potentes.

Regla de los signos de Descartes en los textos

En los libros de texto contemporáneos, no se presenta a la regla acompañada de sus demostraciones ni de justificaciones que la presenten factible a los estudiantes, sino mas bien, como dijera el propio Descartes, se considera que el examen de diversos ejemplos dará las pistas de su validez. Así encontraremos, presentaciones que podemos ubicar en dos vertientes: unas que se ocupan de la validez y pertinencia de la regla a partir de ejemplos, y otras que se interesan por demostrarla bajo un cierto cuerpo discursivo. Entre las primeras podemos mencionar a (Sullivan, 1989; Mataix, 1969; Hall & Knight, 1980), mientras de las segundas a (Dickson, 1939; Ferrar, 1943; Kostrikin, 1978; Uspensky, 1948). La primera de dichas formas se apoya en el teorema fundamental del álgebra de Gauss (acercamiento algebraico), mientras que la segunda lo hace basando sus argumentaciones en el teorema de Bolzano o teorema del valor intermedio del análisis matemático clásico (acercamiento analítico).

Para la lógica algebraica, la explicación de las variaciones de signo entre los coeficientes se debe al efecto que produce sobre el signo de los coeficientes la multiplicación del polinomio por el factor (x *raíz positiva*); mientras que en la lógica analítica en cambio, la presencia de la raíz positiva se justifica a través de las variaciones de signo entre coeficientes. En este segundo caso se usa la explicación del cambio de signo de la función en dos puntos del dominio para mostrar la existencia de raíces entre dichos puntos.

Acercamiento algebraico

Si $V(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_2x^2 + a_1x + a_0) = q$

$\Rightarrow V[(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_2x^2 + a_1x + a_0)(x - a) = q+1$

Una adición de un cambio ded signo proviene de la presencia de una raíz positiva más

Acercamiento analítico

Si $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x +a_0$ y con $a_i\, a_{i+1} < 0$ para algún $i \Rightarrow$ f puede tener a lo más una raíz en un cierto intervalo

Un cambio de signo en la lista de los coeficientes sucesivos, hace factible una raíz positiva más

Esquema de las lógicas algebraica y analítica

Visualizando la regla de los signos de Descartes

Entendemos visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso social muy utilizado en distintas áreas del conocimiento matemático y científico. Nos interesa analizar el comportamiento que tendrán las gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas a consecuencia de los signos de sus coeficientes. Consideramos que en estos casos particulares, es posible distinguir el papel que desempeñan los signos de los coeficientes de la función con las oscilaciones de las gráficas y en consecuencia con el número de raíces positivas de la ecuación algebraica respectiva.

Iniciemos planteando el caso de la función lineal $p(x) a x b$, donde a y b son reales distintos de cero. Estas funciones quedan caracterizadas mediante los coeficientes a y b; respectivamente su pendiente y su ordenada al origen, por tanto en caso de producirse un cambio de signo entre los coeficientes a y b, se tendrá en consecuencia una raíz real positiva de la ecuación. Esta afirmación confirma el enunciado de la regla y se apoya en el sentido que las variables visuales, pendiente y ordenada, juegan en el diseño anterior.

Continuemos con el análisis de las funciones polinomiales de segundo grado. Consideremos para ello, la función real $p(x)ax^2bxc$ en la que a no es cero. En esta situación habremos de centrar la atención en la concavidad de la curva. Consideraremos sólo parábolas cóncavas hacia arriba, de este modo, al igual que en el caso de las ecuaciones lineales tendremos que, de producirse un cambio de signo en la secuencia de los coeficientes a, b y c de la cuadrática, existen tantas raíces reales positivas como cambios de signo se tengan en la ecuación, o en su defecto, dos raíces menos a causa de la posibilidad de contar con raíces complejas conjugadas. Esta afirmación confirma el enunciado de la regla de los signos, que hemos asociado a las variables concavidad, pendiente y ordenada.

Predicción y la regla de los signos de Descartes

En este apartado presentaremos la regla de los signos con argumentos basados en la noción de predicción. Para ello, habremos de vincular los signos de los coeficientes con los signos de las derivadas sucesivas de la función original. En este sentido, al mirar al polinomio como una expresión en serie de potencias podremos interpretar los cambios de signo en los coeficientes con los cambios de "dirección" en la gráfica.

Desde nuestro punto de vista, la noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud B con el paso del tiempo. Sabemos, por ejemplo, que B depende a su vez de otra magnitud P que fluye incesantemente. Necesitamos saber entonces el valor que tomará B antes de que transcurra el tiempo, antes de que P transite del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que, el verdadero valor de B esté distante de las expectativas que nos generan los valores de B y de P en un momento dado, de la forma en la que P y B cambian, de la forma en la que cambian sus cambios, y así sucesivamente.

El caso de mayor interés se presenta, naturalmente, cuando no se dispone en forma explícita de la relación entre B y P. Entonces habrá que hacer emerger progresivamente una nueva noción, una que permita de algún modo la generación de la solución óptima a una clase de situaciones propias de la predicción. En su momento, este programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo, con el programa de Lagrange donde emerge la noción de función analítica.

Ahora bien, para aplicar estas ideas de predicción al problema de la determinación de las raíces positivas de un polinomio arbitrario tendremos que recordar que los coeficientes de una ecuación polinomial se corresponden con las derivadas sucesivas de la función polinomial evaluadas en cero. Ejemplificaremos esto para el caso de las funciones cúbicas.

De este modo, la ecuación $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$, puede escribirse como .
$f(x)=\frac{f'''(0)}{6}x^3+\frac{f''(0)}{2}x^2+f'(0)x+f(0)=0$ El número de cambios de signo entre a, b, c y d es entonces el número de cambios de signo entre $f'''(0)$, $f''(0)$, $f'(0)$ y $f(0)$. Esto es coherente con la idea de predicción que hemos presentado, pues el comportamiento de la gráfica a la derecha (a la izquierda) del origen está completamente determinado por el comportamiento de la función en un punto, en nuestro caso en $x = 0$.

Para visualizar esto, resumimos en un diagrama y de forma sucinta, la relación entre los signos de las derivadas sucesivas de una función cúbica con el comportamiento de la misma.

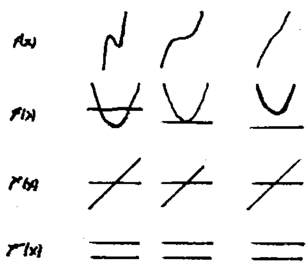

Diagrama 1: Gráficas de las cúbicas y sus derivadas

Siguiendo estas ideas, podemos establecer la regla de acotación de Newton: "Un número positivo a es cota superior de las raíces positivas de la ecuación $f(x)\ \ 0$, donde f es una función polinomial de grado n, si ninguna de las derivadas sucesivas en a es negativa". Si $f(a) \geq 0, f'(a) \geq 0, ..., f^{(n-1)}(a) \geq 0$ y $f^{(n)}(a) > 0$, se tendrá entonces para todo número p mayor que la cota, $p > a$, que la función evaluada vale $f(p) = f(a) + f'(a)(p - a) + ... + f^{(n)}(a)/n!\,(p-a)^n > 0$. De este modo, sabemos que el comportamiento de la función después de a, es tal que no le permite cruzar al eje X en esa zona.

Así, podemos estudiar las combinaciones de signos y analizar las posibles gráficas de los polinomios $y = f(0)$, $y = f(0) + f'(0)x$, $y = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2!$, ..., $y = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2! + ... + f^{(n)}(0)x^n/n!$ que aproximan a la función polinomial f. Con este esquema, el número de cambios de signo en las derivadas es coherente con la tesis que postula la regla de los signos de Descartes y explica el comportamiento de la gráfica a partir de las ondulaciones de la gráfica de la función original (ver diagrama 2).

Conclusiones

El desarrollo de conceptos como función, raíz o solución han requerido de siglos de evolución hasta alcanzar sus estados actuales. Durante ese periodo las nociones se modifican y adquieren progresivamente los significados que les son característicos. Es por esa razón que consideramos importante indagar respecto del proceso de construcción de los significados asociados a los conceptos y procedimientos matemáticos a lo largo de su devenir histórico y social. Pues comprender estos episodios resulta valioso al momento de buscar explicarse el por qué estos conceptos matemáticos resultan tan resistentes al entendimiento de los alumnos de nuestros días.

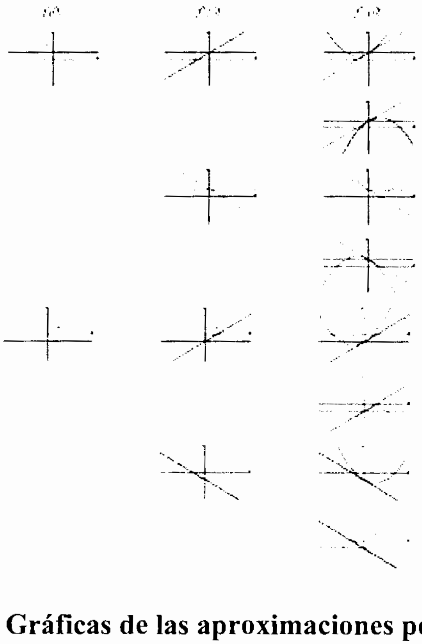

Diagrama 2. **Gráficas de las aproximaciones polinomiales**

Creemos que este trabajo ilustra el sentido de la búsqueda de la construcción social del conocimiento, pues si bien el teorema que hemos estudiado es publicado por Descartes y también por Harriot, hecho que dio lugar a una muy prolongada polémica respecto de la originalidad del resultado (Stedall, 2000), es cierto también que su completa demostración y difusión institucional se ha debido a una gran cantidad de personas en contextos y circunstancias concretas. Así mismo, la explicación alternativa de la regla de los signos que hemos propuesto con apoyo de la predicción es la continuación de un programa de trabajo cooperativo pues consideramos que la preocupación por la predicción, no es exclusiva de los físicos o los astrónomos, sino que es, como hemos insistido, el producto cultural de un largo proceso de socialización de diversas y complejas necesidades humanas que llegan a formar, en algún momento de su evolución, parte de teorías altamente sofisticadas así como del conocimiento institucional, ya sea al nivel de los eruditos o de la sociedad escolarizada.

Consideramos también que el conocimiento matemático, como parte de la cultura, vive en sus instituciones y en las prácticas que le son características. La predicción, la regla de los signos, la teoría de ecuaciones o la noción de verdad en la ciencia, comparten escenarios y circunstancias culturales, históricas e institucionales. Las actividades humanas que acontecen al seno de organizaciones sociales impregnan por igual a las prácticas cotidianas como aquellas que consideraríamos las más especializadas; en este sentido, al atender a estas cuestiones creemos que un amplio programa de investigación emerge en beneficio del quehacer didáctico. El problema de la estructuración del conocimiento escolar, cada vez con más claridad, está siendo entendido como un verdadero asunto de investigación científica. Este aporte en consecuencia, se suma a aquellos que plantean el estudio sistémico del quehacer educativo.

Referencias bibliográficas

Acevedo, M. & Falk, M. (2000). *Formación del pensamiento algebraico de los docentes*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(3), 245 – 264.

Bartolozzi, M. & Franci, R. (1993). *La Regola del Signi dall'Enunciato di R. Descartes (1637) alla Dimostrazione di C. F. Gauss (1828)*. Archive for History of Exact Sciences 45(4), 335 – 374.

Borowczyk, J. (1989). *Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations de signe de Descartes. La Démonstration mathématique dans l'histoire*. Actes du 7ème colloque inter - IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 275 – 293.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis*. Epsilon, Vol. 42, Núm. 14(3), 854 – 856.

Descartes, R. (1637). *Géométrie.*

Dickson, L. (1903). *Introduction to the Theory of Algebraic Equations.*

Ferrar, W. (1943). *Higher Algebra*. Oxford University Press.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemologica. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav del IPN.

Gauss, C. (1828). *Beweis eines algebraischen Lehrsatzes.* Journal für die reine und angewandte Mathematick. 1 – 4.

Hall, H. & Knight, S. (1980). *.Álgebra Superior.* Unión tipográfica editorial hispano americano.

Kostrikin, A. (1978). *Introducción al Álgebra.* Editorial MIR.

Lacroix, S. (1797). *Traité élémentaire de calcul différentiel, et de calcul intégral.* Bachelier Imprimeur Libraire de l'Ecole Polytechnique.

Lagrange, J. (1797). *Théorie des fonctions analytiques.* Imprimeur libraire pour les mathématiques.

Pastor, R. (1963). *Análisis Matemático.* Tomo 1. Buenos Aires, Argentina: Kapeluz.

Stedall, J. (2000). *Rob'd of Glories: The Posthumous Misfortunes of Thomas Harriot and His Algebra.* Archive for History of Exact Sciences 54(6), 455 – 497.

Uspensky, J. (1948). *Theory of equations.* McGraw Hill.