Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio

Sabrina, Garbin Dall'Alba
Universidad Simón Bolivar , Sartenejas (Caracas), Venezuela
sgarbin@usb.ve

Resumen

El estudio consiste en la primera fase de una investigación cualitativa que centrada en las situaciones de coherencia y/o incoherencia que manifiestan los alumnos en relación con sus esquemas conceptuales asociados a la noción de infinito actual, pretende acercarse a responder: ¿Qué tipo de conexiones reconocen y establecen los estudiantes universitarios que tienen conocimientos previos de cálculo diferencial e integral en problemas en que está presente el mismo concepto pero expresado en diferente forma?. ¿Qué relación y cómo influencian estas nociones formales en la coherencia y/o incoherencias de los estudiantes?. ¿Cómo influyen estos conocimientos formales en la formación consistente de la imagen conceptual del infinito actual?. Participaron 89 estudiantes con edades comprendidas, entre 18 y 20 años. Los resultados de esta primera fase inducen a pensar, que el conocimiento previo formal del cálculo diferencial e integral es de ayuda, pero no de manera significativa o determinante, a establecer y reconocer las conexiones oportunas y fundamentales entre los problemas planteados.

Antecedentes y fundamentación teórica

Son numerosas las investigaciones realizadas en didáctica sobre el infinito matemático y las que se pueden considerar pilotos y pilares en el área de la didáctica del infinito matemático (Fischbein, Tirosih y Hess(1979); Tirosh(1991); Nuñez (1994); Moreno y Waldegg(1991); Tsamir y Tirosh (1995,1999)) revelan entre otras cosas que la intuición natural del infinito es sumamente inestable y que las situaciones de conflicto que se presentan dependen de las influencias conjeturales y contextuales de las cuestiones involucradas. El estudio que aquí se reporta, está centrado en la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus en relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado. Los conceptos tratados son, de manera particular, el concept image y el concept definition (Tall y Vinner, 1981) e inconsistencias (Vinner, 1990; Tall, 1990; Tirosh, 1990). En Garbin (2000)(Garbín y Azcárate, 2002) se quiere identificar las inconsistencias y representar, categorizar y analizar las situaciones de coherencia que manifiestan alumnos de 16-17 años en relación con sus esquemas conceptuales (concept image) asociados al concepto de infinito actual. Se caracterizan los términos incoherencia, diferenciándolo del de inconsistencia, y tarea de conexión. Se construyen tres líneas de coherencia (finitista (o de evasión de infinitud), actual y potencial) y se clasificaron tres tipos de alumnos: alumno coherente y consistente, alumno coherente pero inconsistente, y, alumno incoherente.

Tall (2001), define y caracteriza a la informal image y el formal image. Afirma que entre la imagen formal e informal ocurren interconexiones y probablemente se originan confusiones, lo cual no favorece una formación coherente de la imagen formal; y por tanto, los esfuerzos individuales deben reconstruir conceptos y conexiones en el esquema conceptual para buscar la coherencia deseada de la imagen formal. Esta caracterización de Tall (2001) y el estudio de Garbin (2000)(Garbin y Azcárate, 2002) plantean nuevas interrogantes: ¿Qué tipo de conexiones reconocen y establecen los estudiantes universitarios que tienen conocimientos previos de cálculo diferencial e integral en problemas en que está presente el mismo concepto pero expresado en diferente forma?. ¿Qué relación y cómo influencian estas nociones formales en la coherencia y/o incoherencias de los estudiantes?. ¿Cómo influyen estos conocimientos formales en la formación consistente de la imagen conceptual del infinito actual?. Surge entonces el interés de comenzar una investigación que permitiera acercarse a las respuestas. En el presente reporte se describe el estado actual y primera fase de esta investigación.

Metodología, descripción de los participantes e instrumentos de recogida de datos.

La investigación se enmarca en un estudio de tipo cualitativo. El análisis de datos es inductivo y el foco de la investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Se sigue, en parte, la metodología usada en Garbin (2000)(Garbin, Azcárate (2002)). La experiencia se realiza con 89 estudiantes universitarios con edades comprendidas entre 17 y 25 años (73 de los 89 alumnos tienen entre 18 y 20 años). Nueve de los alumnos estudian Ciencias (Química y Física) y el resto Ingeniería (Polímeros, Mecánica, Metalmecánica, Computación, Eléctrica, Producción, Electrónica, Geofísica y Metalúrgica). Los estudiantes tienen conocimientos previos formales sobre límites, derivadas, integrales, sucesiones y series; todos estudiaron los mismos cursos básicos de matemáticas dictados por el departamento de matemáticas (Matemáticas I, II, III y IV) y están cursando la quinta matemática obligatoria.

Se utiliza como instrumentos de recogida de datos, dos cuestionarios (C_1 y C_2). El *primer cuestionario*, C_1 (fig.1, ver Anexo), consta de las mismas 5 preguntas del C_1 aplicado en el estudio de Garbin (2000) (Garbin y Azcárate (2002)). En todas está implícita la noción matemática, el infinito actual, y los problemas son de divisibilidad infinita. La particularidad de la mayoría de las preguntas consiste en ser una versión actualizada, diferenciada por el contexto, de la primera paradoja de Zenón de la división. Otras generan la misma paradoja. El *segundo cuestionario*, C_2 (fig. 2, ver Anexo), se aplica al mismo grupo de alumnos después de aplicar el C_1. Consta de 6 preguntas y su objetivo es poder extraer información sobre las posibles conexiones y relaciones que establecen los estudiantes a partir de las preguntas 1,3 y 4 del C_1; y el reconocimiento o no de la influencia que puedan tener los problemas entre sí, en la resolución y respuestas de los mismos, a partir de las conexiones que se pueden hacer.

Metodología específica y resultados

Las líneas de coherencia y la "utilización" de los conceptos asociados de límites, sucesiones y series en la resolución de los problemas.

Se opta por el uso de las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas de los alumnos.

Se diseña una red sistémica para cada pregunta del cuestionario, con la que se pueden observar las respuestas categorizadas de los alumnos. Se elabora con estos datos las líneas de coherencia: potencial, actual y finitista (o de evasión de infinitud), instrumento que permite mostrar las respuestas coherentes y/o incoherentes de los estudiantes en los problemas de C_1. (Metodología empleada en Garbin 2000, (Garbin y Azcárate, 2000; 2002)). La pregunta 2(b) no se considera en el análisis por considerarse no relevante para esta primera fase de la investigación. El número y el porcentaje de alumnos por pregunta en cada línea, se observa en la siguiente tabla:

	Línea finitista (o de evasión de infinitud) (línea 1)		**Línea potencial (línea 3)**		**Línea actual (2) (línea 2)**	
	Nº	**%**	**Nº**	**%**	**Nº**	**%**
Pregunta 1	3	3,37	56	62,92	17	19,10
Pregunta 2	25	28,8	14	15,73	13	14,60
Pregunta 3	8	88,98	34	38,20	18	20,22
Pregunta 4	2	2,24	60	67,41	21	23,59
Pregunta 5	16	17,97	27	30,33	17	19,10

Las líneas de coherencia permiten clasificar la situación de coherencia y/o incoherencia de cada estudiante. Las respuestas coherentes en el sentido de cada línea, son las que determinan la clasificación: a) Si un alumno tiene tres o más respuestas coherentes según una línea determinada, se le sitúa en el grupo de la línea correspondiente; b) Si un alumno tiene sus respuestas situadas en diferentes líneas, se le sitúa en un grupo que se llama Mixto. Con estos criterios se obtienen 4 grupos de alumnos, en la siguiente tabla podemos observar el número y el porcentaje de alumnos por grupo:

Grupo	**1**	**2**	**3**	**Mixto**
Nº alumnos	3	12	32	42
%	3,37	13,8	35,95	47,19

De cada grupo se pudo establecer unas subcategorías que permiten observar el número de respuestas "actualistas", "finitistas" (o de evasión) y/o potenciales. Se llama respuestas "finitistas" a las que fueron escritas con argumentos finitos y "actualistas" las que reflejan una concepción actual del infinito. Es decir un alumno pudo tener 5 respuestas en la línea actual (5A) o, 3 en la línea actual, 1 en la línea finitista (o de evasión) y 2 en la línea potencial (3A+1F+2P). En la siguiente tabla se observan las subcategorías y entre paréntesis el número de alumnos.

Grupo 1

4F + 1P (i)	3F + 2P (1)	3F (1)

Grupo 2

5A (1)	4A (1)	3A (2)	3A + 1P (2)	3A + 2P (4)	4A +1F (1)	4A +1P (1)

Grupo 3

5P (2)	4P+1A (5)	3P (4)	3P+1A (2)	3P+ 2A (2)
4P (5)	4P+ 1F (6)	3P+1F (2)	3P+2F (1)	3P+1A+1F (3)

Grupo Mixto

1F (1)	1A (4)	2A+1P (5)	1F+2A+2P (1)
1F+2P (8)	1A+1P (4)	2P (7)	1F+2A+2P (1)
2F+1P (1)	1A+2P (2)	2P+2F (1)	2F+1A+2P (1)
2F+2P (1)	2A+1F (2)	1F+1A+2P (3)	2F+1A+2P (1)

Se nota, entre otras cosas, que hay un solo estudiante coherente y consistente (grupo 2) y dos alumnos coherentes en el grupo 3 en todas las preguntas. Un alto número de estudiantes se encuentran en el grupo Mixto. No hay presencia de respuestas "actualistas" en el grupo 1 y sólo un estudiante del grupo 2 presenta una respuesta "finitista" (o de evasión de infinitud) en sus respuestas.

Los grupos 1 y 3, muestran un mayor "arraigo" de la concepción potencial del infinito, a pesar del conocimiento previo de las nociones asociadas a las preguntas, de límite, sucesiones y series. Los alumnos que se encuentran en el grupo Mixto muestran una mayor apertura a la concepción actual del infinito y un mayor número de combinaciones de incoherencias en sus respuestas.

Por lo que muestran las respuestas de los estudiantes y las redes sistémicas, la mayoría de los estudiantes responden afirmativamente o negativamente a las preguntas: a) dejándose llevar por la intuición; b) con argumentos que recurren a la división infinita en mitades, posibilidad de poder dividir infinitamente o a la existencia de infinitos puntos en una recta; c) sumando y aproximando valores; e) afirmando que una pelota siempre recorre una distancia finita; d) aceptando sin demostración la convergencia o divergencia de la serie 1 2^n . De los 89 alumnos sólo 2 estudiantes prueban, a partir del cálculo del límite de las sumas parciales, que $1/2^n=1$. (para responder a la pregunta 2).

La noción de infinito actual está implícita en los problemas, y las respuestas de los alumnos muestran que si bien saben calcular una suma infinita (aunque no calculen la suma), reconocen si es convergente o divergente, y conocen y saben calcular un límite al infinito, no necesariamente aceptan la situación de que en el infinito se alcanza el punto límite. Pueden sustentar su creencia haciendo uso de estos conceptos. Al resolver la pregunta 1 el Alumno (40)(A(40)) escribe: "No es posible llegar a una situación donde el punto de bisección coincide con el punto B. Podemos ilustrarlo pensando que cada bisección es la suma de una distancia. Así podemos pensarlo como una serie $1/2^n$, que sabemos nunca llega a 1 aunque puede llegar muy cerca de él (converge a 1). Si la distancia entre A y B es considerada 1 entonces sabemos que la suma de las distancias (vistas como serie) no llega nunca a ser 1".

Clasificación de las relaciones que evidenciaron los estudiantes entre los tres problemas del C_2.

Se analizan las respuestas de la pregunta 1 del C_2 y se clasifican en grupos no excluyentes: un mismo estudiante puede estar en uno o en varios de los grupos. Los estudiantes expresan las relaciones de similitud entre los tres problemas y focalizan su atención en diferentes aspectos estructurales: a) *El planteamiento del problema*: la respuesta del alumno está en relación a lo que plantean los problemas o en lo que se pide hacer: A (33): "Supongo que el planteamiento de los tres casos es probar el concepto de tendencia. Examinar si para el estudiante es teóricamente posible que si una sucesión, una suma, o fracción tiende a un número determinado, llegará eventualmente a tomar el valor de dicho número. Para mí no es así"; A (59): "Los tres problemas son distintas maneras de plantear la misma situación, una suma infinita de términos que decrecen. La primera es la forma geométrica, luego una forma analítica (sólo álgebra) y después en forma gráfica". b) *El proceso de convergencia y divergencia implícito en cada pregunta (aceptando o no la situación límite)*: A (16):"las funciones van haciendo que sea un valor más y más pequeño, además de que su planteamiento es un valor que a medida que crece, genera un resultado que tiende a otro valor más pequeño. c) *El concepto implícito*, la noción de infinito, o el reconocimiento que se trata del mismo concepto o tema en todas las preguntas: A(38)": "los tres se relacionan con el infinito"; A(82): "En los tres problemas se plantean que para llegar a un resultado hay que tener en cuenta el matemático (...); A(3): "La pregunta es la misma, el concepto que se quiere "evaluar" es el mismo para las tres preguntas". d) *Los conceptos asociados de límites, sucesiones y/o series*: A(9):"Tienen como fundamento las definiciones de límites, sucesiones y series. e) *Resultados: puede ser el tipo de resultado o el procedimiento o modo de resolución del problema:* A(22): "la resolución de los tres en forma exacta es imposible"; A(8): "se resuelven similarmente". f) *Encuentran similitud en algunas y/o detallan semejanzas y diferencias entre los problemas:* A(12): "Sólo hay similitud entre el problema 1 y 2 a manera de fracciones"; A(75): "Entre el primer problema y el segundo hay una similitud, pues hay un término que se va dividiendo a la mitad y el siguiente término es cada vez más pequeño. Sin embargo, en el primer problema tenemos una sucesión y los puntos de la recta se van acercando a un límite que sería el extremo B, mientras que en el segundo problema tenemos una serie armónica cuyos términos se van sumando sin converger a un valor (su límite tiende a o no existe). En el tercer ejemplo tenemos una función que tiene límite igual a 2, y al tener límite podemos decir que tiene unasimilitud con la sucesión del problema 1.

En la siguente tabla se puede ver el número de alumnos por cada grupo clasificado.

Planteamiento General		**Conceptos Asociados**							
Planteamiento (Finalidad)	Lenguajes matemáticos diferentes	Límite, sucesión y serie	Límite	serie	sucesión	sucesión y serie	Suma ∞	Función Exponencial	Infinitesimales
7	4	1	10	8	4	7	3	1	1

Proceso implícito de convergencia y divergencia			**Concepto implícito**	
Acepta situación límite	No Acepta situación límite	No Aluden la situación límite	Noción de ∞	Mismo concepto o teoría matemática
3	1	9	3	2

Resultados		**similitud en algunas, semejanzas y/o diferencias en los lenguajes**
Tipo de Resultado	**Procedimiento o modo de resolución**	
11	20	9

En Garbin (2000) se caracteriza la “tarea de conexión”, “que consistiría en identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas asociadas coherentes en los problemas”. La inducción de esta tarea en algunos alumnos entrevistados, deja en evidencia que ha sido “fundamental”: a) reconocer en todas las preguntas el proceso de divisibilidad infinita, con los dos tipos de iteraciones, la divergente y convergente; b) establecer la relación y conexión entre las preguntas a través de la sucesión numérica. Como se puede observar en las tablas anteriores, los alumnos focalizaron su atención al describir las relaciones, conexiones o similitudes en los problemas de C_2 , en diferentes partes estructurales de ellos, el planteamiento, la resolución, los resultados, los conceptos asociados, etc. Se puede decir que algunas de las similitudes expresadas no son elementos estructurales fundamentales para la coherencia y/o el reconocimiento de que se está en presencia de un mismo problema pero expresado de forma diferente, como son las afirmaciones que los procedimientos de solución son similares, los conceptos asociados son los mismos o de que se necesita la misma teoría matemática para su resolución.

Conclusiones e implicación docente

El análisis de la “utilización” de los conceptos asociados a las preguntas, de límites, sucesiones y series por parte de los estudiantes en la resolución de los problemas, está pautada para la segunda fase. Sin embargo, por los datos reflejados, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes responden afirmativamente o negativamente a las cuestiones, sin recurrir a argumentos probatorios matemáticos, ni a los conceptos antes mencionados. Por otra parte, que los alumnos de los grupos "finitista" y potencial muestran un mayor arraigo de la concepción potencial del infinito y del grupo Mixto de la concepción actual, en sus esquemas conceptuales.

La clasificación de 6 grupos (no excluyentes) de respuestas, muestran en parte, qué tipo de conexiones reconocen y establecen los estudiantes entre tres de los problemas planteados en el estudio. Esta clasificación evidencia que reconocer y/o establecer conexiones "fundamentales" entre "un mismo" problema pero representado e diferente forma, no es una habilidad espontánea y que debe ser adquirida. El docente debe ser consciente de que el estudiante ante un "mismo problema" pero representado en diferentes lenguajes, puede o no reconocer este hecho, así como puede reconocer sólo algunos de los aspectos de semejanza estructurales de los problemas, como los clasificados. Las similitudes y diferencias, en cuanto a planteamiento, concepto implícito, conceptos asociados, procedimiento de resolución y tipos de resultados, deben ser inducidas durante la práctica docente, así cómo la habilidad de reconocer aquellas conexiones "fundamentales" que generen respuestas asociadas coherentes.

Los resultados, en esta primera fase, inducen a pensar, que el conocimiento previo formal del cálculo diferencial e integral es de ayuda, pero no de una manera significativa o determinante, para establecer y reconocer las conexiones "oportunas" y "fundamentales" entre los problemas planteados; así como de potenciar la noción del infinito actual.

Referencias bibliográficas

Bliss, J. & Monk, M. & Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research.* Coom Helm. London.

Fishbein, E. & Tirosh, D. & Hess, P. (1979): *The intuition of infinity.* En Educational Studies in Mathematics, 10, 2-40.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. España. ISBN: 84-490-2029-8.

Garbin, S. & Azcárate, C. (2000). *Esquemas conceptuales e incoherencias con relación al concepto de infinito actual.* En Educación Matemática, 12 (3), 5-17.

Garbin, S. & Azcárate, C. (2002). *Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años* . En Enseñanza de las Ciencias, 20 (1).

Moreno, L. & Waldegg, G. (1991). *The conceptual evolution of actual mathematical infinity.* En Educational Studies in Mathematics, 22 (3), 211-231.

Nuñez, E. (1994). *Subdivision and small infinities: Zeno, paradoxes and cognition.* En Actas del PME 18, 3, 368-375.

Tall, D. (1990). *Inconsistencies in the learning of calculus and analysis.* En Focus on Learning Problems in Mathematics, 12. Pp. 49-64.

Tall, D. (2001). *Natural and Formal Infinities*. En Educational Studies in Mathematics, 48 (2/3), 199-238. •

Tall, D. &Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity*. En Educational Studies in Mathematics, 12 (2), 151-169.

Tirosh, D. (1990). *Inconsistencies in students' mathematical constructs*. En Focus on Learning Problems in Mathematics,12, 111-129.

Tirosh, D. (1991). *The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorian theory*. En Tall, D. (ed), Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London, 199-214.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1995). *Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito* En La matemática e la sua didattica, 2, 122-131.

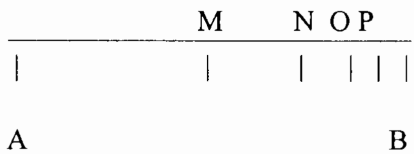
Tsamir, P. & Tirosh, D. (1999). *Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity*. Journal for Research in Mathematics Education, 30 (2), 213-219.

Vinner, S. (1990). *Inconsistencies: their causes and function in learning mathematics*. En Focus on Learning Problems in Mathematics,12, 85-97.

ANEXO
Primer Cuestionario (C_1)

1.- Observa la siguiente figura.

Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M, N, O, P, son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.



Si se siguen haciendo más y más bisecciones. ¿Crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B?.

Explica tu respuesta de forma detallada.

2.- Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2.

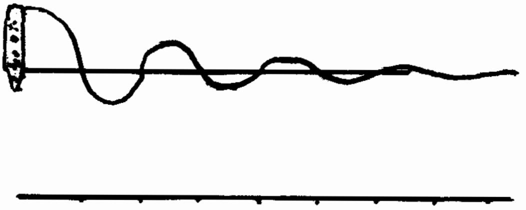
a)¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota?. Explica tu respuesta de forma detallada.

b)¿Podrías decir cuantos rebotes hará la pelota?. Explica tu respuesta de forma detallada?.

3.- Considera la siguiente suma $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + \ldots$

¿Cuál crees que es el valor de la suma?. Explica tu respuesta de forma detallada.

4.- La siguiente figura representa la gráfica de una función



Describe lo que pasa con la función para valores muy grandes de x.

¿Podrías determinar el valor de la función cuando x se hace extremadamente grande?. Explica tu respuesta con detalle.

5..- Considera la siguiente ecuación: $y = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + ... + 1/2^n + ...$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta y = 2?.

Explica tu respuesta en forma detallada.

Cuestionario 2 (C2)

La primera página del cuestionario presenta nuevamente las preguntas 1, 3 y 4 del C_1.

Aparece la siguiente indicación: Lee los tres problemas y contesta a las preguntas que aparecen en las páginas siguientes:

1.- Si existen, defina una o varias relaciones (conexiones, similitudes) entre los tres problemas (planteamiento y resolución) presentados en la página anterior. Escriba detalladamente.

Observación: Escribimos sólo la primera pregunta del C_2, debido a que es la única pregunta que ha sido analizada y categorizada en la primera fase de la investigación.