

Génesis didáctica del cálculo integral: el caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico

Germán Muñoz Ortega

CIMATE de la Universidad Autónoma de Chiapas & DME del Cinvestav-IPN.
México

german_munoz_ortega@hotmail.com

Resumen

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. Buscamos desentrañar las condiciones para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico pero vista como una unidad dialéctica. Nuestras investigaciones nos han permitido percibir a la Didáctica del Cálculo integral en el sentido de identificar las condiciones para propiciar y controlar la génesis artificial, de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico inmerso en un contexto sociocultural específico, a lo cual denominamos génesis didáctica. Un hallazgo de nuestra investigación cuando intentamos controlar la génesis artificial de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico consiste en perfilar un rol del profesor que no se corresponde con la devolución ni con la institucionalización.

Introducción

Todo proyecto didáctico en tanto proyecto social (Chevallard, *et al*, 1997) tiene asociado un contexto sociocultural contemporáneo específico, el cual por una especie de necesidad funcional intenta no sólo generar nuevo conocimiento científico sino también transmitir el conocimiento científico construido por generaciones anteriores. En ese sentido la Matemática Educativa en tanto disciplina científica se encarga de propiciar las condiciones para transmitir el conocimiento científico a través de la institución escolar. Sin embargo, esta tarea, demasiado compleja, origina una serie de fenómenos que van desde la selección del conocimiento a enseñar hasta el predominio de ciertas relaciones entre profesor, estudiantes y saber matemático.

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. El sentido último de nuestras investigaciones consiste en generar las condiciones para propiciar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (vista como una unidad dialéctica) del Cálculo integral en instituciones escolares específicas.

Nuestros trabajos de investigación se han anclado fuertemente en la epistemología genética y nos ha permitido alejarnos de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra), y enseguida buscar condiciones de relación a partir de los dos objetos. Más bien analizamos las relaciones a partir del objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico (Muñoz, 1999a).

Por la naturaleza tan compleja de nuestra problemática ha sido necesario apoyarnos en varios supuestos teóricos y también ha sido necesario construir, en cierto modo, otros supuestos teóricos que nos están permitiendo tener una perspectiva cada vez más clara de dicha problemática y de la relevancia para la Matemática Educativa.

Hacia la construcción de un marco teórico

Algunos de los supuestos de las teorías desarrolladas en nuestra disciplina entran en conflicto cuando se trata de investigar la problemática planteada anteriormente, por ejemplo:

Analizamos el libro “Understanding in Mathematics” de Sierpiska (1994), con el propósito de tener un referente, en cierto modo, respecto a lo que podría significar *entender un concepto o entender un algoritmo* y encontrar relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. De acuerdo a la autora, más precisamente hablaríamos de actos de entendimiento de un concepto, actos de entendimiento de un algoritmo o de actos de entendimiento de un problema que permita pensar en la integración, es decir, el objeto de entendimiento sería el Concepto, el Algoritmo o el Problema; en donde dicho objeto interactúa con el sujeto que entiende (el cual tiene una base de entendimiento). A través de esta teoría se pueden establecer relaciones entre los actos de entendimiento de un concepto y los actos de entendimiento de un algoritmo a partir de dos objetos de entendimiento distintos, sin embargo, esta perspectiva no nos permitiría observar la génesis de los conceptos y de los algoritmos.

También, analizamos la obra de Dubinsky (ver por ejemplo: Dubinsky, 1991 & Dubinsky, 1996) y discutimos con él la Teoría APOS (por sus siglas en Inglés) desde la perspectiva de nuestra problemática, por ejemplo, la etapa de Acción de un concepto tiene algunos aspectos de la naturaleza de un algoritmo, entonces, qué sería la etapa de Acción cuando lo que se está abordando es un algoritmo, cómo sería la etapa de Proceso, Objeto y Esquema en dicho caso. Otro punto de discusión fue si suponemos que tenemos la Descomposición Genética de un concepto y la Descomposición Genética de un algoritmo cómo podemos estudiar la relación entre los conceptos y los algoritmos. Nuevamente es posible estudiar la relación, sin embargo, esta perspectiva no nos permitiría observar la génesis de los conceptos y de los algoritmos.

Ahora presentamos un análisis teórico desde la perspectiva de la Epistemología Genética y considerando aspectos epistemológicos del Cálculo integral desarrollados en Matemática Educativa. Al analizar el trabajo de Cantoral (1990) se puede observar que, en cierto modo, recurre al análisis histórico-crítico para caracterizar algunos aspectos del desarrollo sociogenético del Cálculo infinitesimal, en donde encontramos una evidencia de la imposibilidad de esa separación en el desarrollo sociogenético del Cálculo integral, debido a que existe una relación muy estrecha entre la noción de *Predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor*. Entonces, cuáles son las condiciones para propiciar que el funcionamiento del sistema didáctico permita garantizar la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, con referencia al Cálculo integral. Identificamos una condición necesaria a través del siguiente análisis:

Por una parte, en la enseñanza de la Matemática se ha reducido el concepto de integral a la definición de integral de Cauchy o de Riemann (en tanto objeto de enseñanza) y al estudiante como sujeto cognoscente se le obliga a interactuar con la definición en tanto objeto de conocimiento. Sin embargo, a partir de los trabajos de Cantoral (1990) y Cordero (1994) hemos encontrado evidencias que nos muestran que en el desarrollo sociogenético del Cálculo integral han jugado un papel crucial las nociones de *Predicción*, *Acumulación* y *Constantificación de lo variable*. Por supuesto existen otras nociones asociadas al concepto de integral, sin embargo, es importante remarcar que las nociones mencionadas adquieren sentido para el estudiante cuando el objeto de conocimiento se caracteriza por una situación problema derivada de un fenómeno de variación o cambio. También, en cierto modo, la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990) señala que un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante.

Por otra parte, la enseñanza de la Matemática ha reducido el aprendizaje de los algoritmos a la ejercitación del procedimiento subyacente del algoritmo. En cierto modo, se intenta obligar al estudiante a interactuar con un procedimiento preestablecido en tanto objeto de conocimiento, lo cual conduce a cierto tipo de empirismo debido a que se cree que el estudiante por simple condicionamiento, a través de la experiencia de realizar ejercicios repetitivos de los procedimientos preestablecidos, hace una copia pasiva de la realidad externa (en este caso el procedimiento preestablecido juega el papel de realidad externa) u ocurre un simple reflejo-copia del saber ajeno a través de la transmisión social. Hemos analizado tres procedimientos de integración socialmente establecidos y de acuerdo a la definición de algoritmo, en el contexto de los campos conceptuales, es indispensable una situación problema, previamente clasificada, para discutir ciertos aspectos de la algoritmia (ver Muñoz, 2000b).

Este análisis nos conduce a identificar un objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa.

De manera que la identificación de la condición anterior nos permitió alejarnos de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra), y enseguida buscar condiciones de relación a partir de los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del *objeto de conocimiento común* a lo Conceptual y a lo Algorítmico (Muñoz, 1999a), es decir, que las situaciones problema permitan, al interactuar con el estudiante, construir ciertas nociones y procedimientos asociados al Cálculo integral, y así poder encontrar condiciones para propiciar la relación a partir de investigar cómo se coordina el desarrollo de las nociones con el desarrollo de los procedimientos ante una secuencia de situaciones problema, por ejemplo, si alguna noción resulta crucial para que un procedimiento alcance el nivel de algoritmo. Así que la pregunta obligada es ¿cuál es ese tipo de problemas?

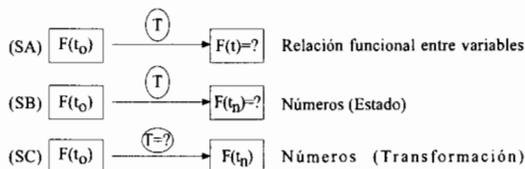
En resumen, la naturaleza del objeto de conocimiento común a lo Conceptual y a lo Algorítmico la precisamos, en lo más posible, a través de precisar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración; después analizamos y clasificamos las diferentes situaciones que se derivan de ese tipo de problemas (ver Muñoz, 2000b). Las implicaciones del hallazgo teórico de haber identificado el objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico se pueden resumir en:

- La posibilidad de mirar a lo Conceptual y lo Algorítmico como una unidad dialéctica (mirar las propiedades de la molécula de agua H_2O , por ejemplo, por qué extingue el fuego). Y no correr el riesgo de analizar por separado a lo Conceptual (las propiedades de H, por ejemplo, enciende el fuego) y a lo Algorítmico (las propiedades de O, por ejemplo, mantiene el fuego) y enseguida buscar las condiciones para propiciar la relación (a través de mirar la adición de las propiedades de H y O).
- El centrar la atención en un objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico y no en dos objetos de conocimiento nos está permitiendo desentrañar la génesis de lo Conceptual y lo Algorítmico a través de analizar la interacción de los estudiantes ante una secuencia de situaciones problema diseñadas a partir de la naturaleza del *objeto de conocimiento común*.

Hacia la construcción de una metodología de investigación

En forma breve el recorrido que estamos siguiendo para producir secuencias de actividades didácticas consiste en:

- Selección de un Marco Epistémico compatible con la naturaleza de la institución escolar específica:** Por ejemplo, en el contexto de una institución escolar para usuarios de la matemática como la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas seleccionamos el marco epistémico de Newton: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior de un sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994), constituido en un contexto sociocultural específico del siglo XVII, y en donde se puede apreciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, por ejemplo, existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor*, en la cual subyace un procedimiento de derivación sucesiva (Cantoral, 1990). En breve, en la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico y cuya naturaleza es compatible con la institución escolar analizada.
- Construcción de un campo conceptual a partir de un marco epistémico:** Construimos un campo conceptual del Cálculo (ver Muñoz, 2000b), es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, con base en el marco epistémico de Newton y en la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990) así como en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 1994). Por ejemplo, para la primera categoría, tres situaciones posibles son:



en donde: SA=Situación A; SB=Situación B; SC=Situación C; T=Transformación; $F(t_0)$ =Condición inicial conocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n)-F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$), (Cordero, 1994). Las tres situaciones abarcan a la llamada integración definida porque las condiciones iniciales del problema están dadas. También caracterizamos una segunda categoría en donde se requiere encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio cuando no son conocidas las condiciones iniciales del problema.

c) **Caracterización de la génesis contemporánea:** Hemos realizado algunos estudios experimentales con estudiantes contemporáneos, inmersos obviamente en un contexto sociocultural contemporáneo específico, para estudiar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (Muñoz & Cordero, 1998a; Muñoz, 1998b; Muñoz, 1999b). Las situaciones específicas a tratar con los estudiantes son desprendidas del campo conceptual previamente construido.

d) **Hacia una génesis didáctica:** Intentamos propiciar y controlar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en la institución escolar específica vía un diseño adecuado de secuencias de actividades didácticas, es decir, desarrollamos estudios experimentales que buscan el *control de la génesis artificial de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico*. Todo lo anterior siempre estará matizado por la perspectiva del rediseño del discurso matemático escolar. Partimos de un diseño inicial que consiste en una secuencia de seis hojas de actividades didácticas, y que servirá como punto de partida para rediseños posteriores con base en los estudios experimentales que se desprenderán producto de la interacción entre investigadores y profesores en ejercicio. Las seis hojas de actividades didácticas están organizadas a través de tres niveles. **En el nivel 1** los estudiantes interactuaron con un fenómeno de variación específico, el movimiento uniforme. **En el nivel 2** los estudiantes interactuaron con un fenómeno de variación específico, el movimiento no uniforme, en donde se proporcionó la información de la velocidad. Además las preguntas son de naturaleza correspondiente a las situaciones A, B, y C del campo conceptual descrito anteriormente, por ejemplo, **la Hoja de actividades No. 3:** *De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información,*

$t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	(segundos)
$V / 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$	(metro/segundo)
$t / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	(segundos)
$P / 2,$	(metros)

i) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 segundos ii) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo iii) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo 6 (segundos) hasta el tiempo 12 (segundos) iv) Realizar la gráfica de velocidad vs tiempo y la gráfica de posición vs tiempo v) Dar diferentes valores a la pendiente de la gráfica de la velocidad, considerando fijo el valor de la velocidad inicial, en los siguientes intervalos: mayor que uno, menor que uno y mayor que cero, menor que cero. Discutir el efecto en las gráficas de posición vi) Describir el comportamiento de las gráficas de la posición cuando la pendiente de la gráfica de velocidad tiende a infinito positivamente, cuando tiende a cero y cuando tiende a infinito negativamente vii) Construir una expresión algebraica para la función velocidad y para la función posición que describa la síntesis del inciso vi).

Sin duda que los estudios experimentales del tipo que se han mencionado en el inciso d) son de importancia capital, sin embargo, sostenemos que no debe darse primacía a los estudios experimentales en situación escolar ni tampoco primacía a los estudios experimentales en situaciones no escolares, sino que debe haber una interacción entre los dos tipos de estudios, lo cual nos permitiría propiciar la compatibilidad entre la génesis contemporánea y la génesis didáctica.

En todo el recorrido anterior nos estamos guiando por las siguientes hipótesis: i) La relación entre lo conceptual y lo algorítmico que se presenta en la *génesis histórica* se conservará en lo que hemos llamado la *génesis contemporánea*, pero su naturaleza será distinta. ii) El caracterizar, en lo más posible, la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico permitirá identificar las condiciones para propiciar la *génesis didáctica* de dicha relación, en el funcionamiento del sistema didáctico en tanto sistema abierto.

La primera hipótesis nos guiará en la pregunta: cómo se constituye un marco epistémico contemporáneo cuando los estudiantes interactúan con situaciones problema en tanto objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico derivado del marco epistémico de Newton. Por lo cual es indispensable analizar la interacción entre la componente social y la componente intrínseca al sistema cognoscitivo a través de la noción de mediación social, específicamente a través de caracterizar los tipos de mediación social (ver Muñoz, 2001). Aun más en Matemática Educativa es necesario tener control de esas constituciones de marcos epistémicos en la sociedad contemporánea vía la institución escolar. Para lo cual, la segunda hipótesis nos guiará en el sentido que entre más precisemos los tipos de mediación social ganaríamos precisión acerca de: en que momento la intervención del profesor es necesaria, en que momento es necesaria la interacción estudiantes-situación problema y en que momento se le debe ceder el paso a los procesos comunicativos. Sin embargo, una pregunta obligada de importancia capital y muy compleja es ¿Cómo llevar a cabo dichos tipos de mediaciones?

Consideraciones finales

Un hallazgo de nuestra investigación cuando intentamos controlar la génesis artificial de la relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico consiste en perfilar un rol del profesor que no se corresponde con la devolución ni con la institucionalización (Brousseau, 1994; Brousseau, 2000) sino con un tipo de intervención del profesor en el sentido de introducir propiedades que no pueden ser “abstraídas” por la interacción entre los estudiantes y el objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico, y en donde es imprescindible la mediación social, *por ejemplo, cuando los estudiantes desarrollan la hoja de actividades No.3 (descrita anteriormente) el profesor introduce el análisis de la variación local de la variable independiente para poder predecir la evolución de la variable dependiente.*

Así, nuestros hallazgos nos han permitido percibir a *la Didáctica del Cálculo integral* en el sentido de desentrañar las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial*, de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico inmerso en un contexto sociocultural específico; a lo cual denominamos *génesis didáctica*.

Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1994). *Los diferentes roles del maestro*. Didáctica de las Matemáticas: aportes y reflexiones (pp. 65-94). Argentina: Ed. Paidós Educador.
- Brousseau, G. (2000). *Educación y didáctica de las matemáticas. Educación Matemática* 12(1), 5-38.

- Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa, México.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Ed. Aique.
- Chevallard, Y; Bosch, M; Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. España: Ed. ICE-Horsori.
- Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1996). *Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria*. *Educación Matemática* 8 (3), 24-41. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Muñoz, G. & Cordero, F. (1998a). *Epistemological and cognitive aspects of the link between the conceptual and the algorithmic in the teaching integral calculus. Proceedings of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 1, p. 157). North Carolina State University Raleigh, North Carolina, USA..
- Muñoz, G. (1998b). *Lo conceptual y lo algorítmico en la integración: algunos aspectos cognitivos*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 12 (1), 34-37. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Muñoz, G. (1999a). *Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración*. Ponencia aceptada en la modalidad de análisis teórico e impresión de un resumen en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo (pp. 14-15). México.
- Muñoz, G. (1999b). *Relación entre lo conceptual y lo algorítmico desde la perspectiva de la psicogénesis de la integral*. Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo (p. 53). México.
- Muñoz, G. (2000a). *Análisis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el aprendizaje y la enseñanza de la integración*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 13 (1), 96-103. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Muñoz, G. (2000b). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3 (2), 131-170.
- Muñoz, G. (2001). *Tipos de mediación social en la didáctica del Cálculo integral: relación entre lo conceptual y lo algorítmico*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14(1), 532-539. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Piaget, J. & García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI, 6a. ed.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series. Vol. 2. Series Editor: Paul Ernest. USA: School of Education University of Exeter, The Falmer Press.
- Yergnaud, G. (1990). *La Théorie des Champs Conceptuels*. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10 (13), 133-170.