

# Resignificación escolar de la regla de la cadena: una visión socioepistemológica

*Ramón Flores Hernández*

Universidad Autónoma de Coahuila-Instituto Tecnológico de Saltillo. México

rnfloresh@hotmail.com

## Resumen

Esta es una investigación que pretende tomar la aproximación socioepistemológica como sustento teórico para llegar a establecer el objetivo de mirar a la regla de la cadena bajo una perspectiva distinta a como es mirada en los textos escolares, acarreado este proceso un desarrollo tendiente a encontrar elementos de orden epistemológico que expliquen las dificultades que conlleva su construcción social. Para tal efecto, se tomó la ingeniería didáctica como metodología de investigación. El estado actual que guarda este trabajo corresponde al tránsito del análisis preliminar a la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, localizando una problemática relacionada con tres estadios: la apropiación, las matemáticas aplicadas en contextos variacionales y, el consenso y didáctica.

## Introducción

Actualmente la sociedad reclama de manera más consciente e insistente el uso inmediato, en el medio social, de las matemáticas que se enseñan en la escuela. Por otro lado, el contenido curricular en cuanto a matemáticas, cada vez que se revisa debido a diferentes causas, es modificado irresponsablemente, legitimando las propuestas por consenso, tal como señala Cantoral (2001). De aquí se dilucidan dos problemas: el primero, relacionado con las matemáticas aplicadas y el otro, relacionado con el consenso. Dentro de esta problemática dual está inmerso el objeto de estudio: la regla de la cadena, mirada bajo la perspectiva de aplicación y, consenso y didáctica; esto último originado ahora por los textos escolares. De manera genérica se puede mencionar que su uso se hace indispensable cuando, por necesidad del problema o teorema tratado, se quiere expresar una derivada en función de otra variable independiente y no de la variable independiente original. El papel que toma en diversos problemas variacionales permite detectar una doble dificultad: por un lado de enseñanza; por otro, de aprendizaje, acarreado una problemática que se mirará desde una perspectiva epistemológica y, que induce a plantear la siguiente interrogante: ¿bajo qué epistemología podemos dar cuenta de la resignificación de la regla de la cadena, de tal forma que alcance a ser mirada como un conocimiento con utilidad (un saber)? Este trabajo pretende enmarcarse en la Matemática Educativa, dentro de la línea de investigación denominada “Pensamiento y Lenguaje Variacional” (Cantoral y Farfán, 2000), desarrollada en el CINVESTAV del IPN en México.

## Marco teórico

Ésta investigación está encaminada al rediseño del discurso matemático escolar, bajo un interés centrado en el efecto que tiene el aspecto social en la construcción del conocimiento matemático y, de cómo es puesto en la escena educativa.

La visión de ver en primer plano la actividad humana en la construcción del conocimiento matemático y no como se ha venido viendo, al considerar primero el conocimiento matemático hecho por una sociedad (Cordero, 2001), permite que se teorice esta perspectiva, generándose

una aproximación basada en las prácticas humanas produciendo conocimiento matemático. Tal aproximación es llamada el acercamiento socioepistemológico (Cantoral y Farfán, 2000; Cantoral, 2001), el cual incorpora cuatro componentes para el estudio de la construcción social del conocimiento: epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. Aquí la construcción social del conocimiento matemático avanzado se da cuando se articulan los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de la matemática avanzada y las prácticas humanas altamente especializadas (Cantoral, 2001). El funcionamiento de las componentes citadas no es aislado, sino que se articulan bajo una práctica institucional y una práctica social. La práctica institucional es inmediata y está implícita en el proceso de investigación de la construcción social del conocimiento matemático y, la práctica social se adiciona a cada una de las cuatro componentes citadas de tal forma que se ancla en ellas, siendo ahora inherente a sus significados. Este acercamiento permite, en consecuencia, hacer un cambio de epistemología hacia la matemática, donde se privilegia la actividad humana.

### **Objetivos de la Investigación**

En seguida se plantean los alcances de la investigación. Con base en esta pretensión y en nuestro problema de investigación, se puede señalar como objetivo general:

*Favorecer la construcción de la regla de la cadena bajo la actividad de encontrar elementos de orden epistemológico que expliquen las dificultades vividas en su apropiación, utilizando las prácticas humanas para provocar la relación; epistemología - generación de conocimiento.*

Bajo el objetivo general, se deducen otros objetivos secundarios con los cuales se logra especificar algunos alcances de este trabajo:

- Diseñar secuencias didácticas en torno al tema regla de la cadena que den explicación sobre su apropiación.
- Analizar el papel que juega la función compuesta en la regla de la cadena y si ésta constituye un obstáculo para su aprendizaje.
- Describir los elementos intrínsecos que se originan al ponerse en juego el cambio de variable independiente de la función derivada y su influencia en la relación sujeto –objeto de conocimiento.
- Provocar en el estudiante una movilización de registros de representación de la regla de la cadena bajo diferentes contextos sociales y matemáticos y, observar sus efectos desde una aproximación socioepistemológica.

Finalmente, se puede decir que: existen formas distintas de conocer o, mecanismos alternos que permiten mirar la regla de la cadena bajo un estatus de saber, al modificar el discurso matemático escolar actual desde una perspectiva socioepistemológica.

### **Metodología**

La metodología utilizada en la investigación corresponde a la ingeniería didáctica. Metodología orientada por un proceso experimental basado en cuatro fases: la primera fase se refiere al análisis preliminar, la segunda fase es la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la tercera fase es la experimentación y, la fase cuarta se refiere al análisis a posteriori y evaluación (Artigue, 1995).

Una actividad principal de la ingeniería didáctica, es la de diseñar situaciones didácticas;

para lo cual, se establecen y controlan variables didácticas relacionadas con el sistema didáctico, de tal forma que favorezcan la aparición del saber de referencia en el estudiante. La ingeniería didáctica se utilizó, en principio, como un medio para la producción de situaciones didácticas, teniendo como noción central la regla de la cadena. Pero también será utilizada como metodología de investigación, donde bajo esta visión se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase (Artigue, 1995), significando que bajo un trabajo *in situ*, se conciben, realizan, observan y analizan secuencias de enseñanza; en este caso, bajo el fin de buscar explicación sobre el comportamiento del estudiante ante el conocimiento de la regla de la cadena. Artigue (1995), menciona que la ingeniería didáctica se diferencia respecto a otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por: el registro en el cual se ubica, es decir, los estudios de caso y; las formas de validación a las que está asociada, es decir, por una validación interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

### **Análisis preliminar**

Esta primera fase se estructurará con base en las componentes: didáctica, epistemológica y cognitiva y; bajo el apoyo del marco teórico, se complementará con la componente sociocultural, la que permitirá examinar el quehacer humano en la construcción de significados y además, asegurar la interrelación de las componentes.

### **Componente didáctica**

La dimensión didáctica se refiere al estado que guarda la enseñanza del tema aludido; es decir, cómo vive la regla de la cadena en el aula y cuál es su devenir como saber enseñable. Como inicio, se revisó la problemática existente en la enseñanza de la regla de la cadena, recabando apuntes de clases de distintos profesores: al examinarlos, se observa que la forma tradicional de enseñar el cálculo, incluyendo la regla de la cadena, es con base en los libros de texto. El discurso matemático escolar del profesor es copiado del contenido de dichos libros, por lo que en esta acción está de por medio un consenso con un fin didáctico (Cantoral, 2001). Así que el trabajo se centró en estudiar los libros de texto utilizados cotidianamente. En la mayoría de ellos la regla de la cadena es presentada fuera de contextos físicos o sociales (presentación que se debe tomar en cuenta para el diseño), en cambio, bajo una pequeña explicación “lógica” de adquisición de valores de las variables en juego, tratan de hacer obvio una cadena de esta toma de valores; viniendo en seguida, la exposición del teorema que regula dicha regla, teniendo como base la función compuesta. Aquí es donde cabe hacer un estudio epistemológico que nos dé luz acerca de algunos procesos relacionados con la regla de la cadena, tales como: ¿cuál fue su epistemología de origen en cuanto a un contexto social y un contexto matemático?

### **Componente epistemológica**

La realización de un estudio epistemológico de la regla de la cadena localiza su naturaleza en los escritos de Newton, en especial en “The October 1666 Tract on Fluxions” (Newton, 2001; Edwards, 1979); primer trabajo formal sobre el cálculo. A principios de 1665, Newton estudió el problema de la tangente a través de combinar las componentes de la velocidad de un punto móvil en un sistema coordenado. Esta investigación fue la motivación para el nuevo método de fluxiones (derivadas:  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$ ) y la llave para sus aplicaciones geométricas.

Edwards (1979), menciona que Newton mira a la curva  $f(x,y) = 0$ , como el lugar de la intersección de 2 líneas móviles, una vertical y otra horizontal y, mira el movimiento como la composición de estos 2 movimientos (horizontal y vertical), teniendo como vectores velocidad a  $\dot{x}$  (notación punto) y a  $\dot{y}$  respectivamente. Así mismo, el vector tangente velocidad es considerado como la suma de los vectores  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  (ley del paralelogramo). Por lo mismo, la pendiente de la recta tangente a la curva es  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$  (aquí se mira a la tangente dinámicamente y no estáticamente como en la geometría griega).

Actualmente vemos que las fluxiones  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son simplemente las derivadas de  $x$  y  $y$  con respecto a  $t$  (tiempo):  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  y  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  (a),

y su razón es la derivada de  $y$  con respecto a  $x$ :  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$  (b)

Newton trata un primer problema, el cual consiste en encontrar la relación entre las fluxiones  $x$  y  $y$  dada la relación  $f(x,y)=0$ . Para el caso donde  $f(x,y) = \sum a_{ij}x^i y^j$  sea un polinomio, él da la solución:  $\sum \left( \frac{i\dot{x}}{x} = \frac{j\dot{y}}{y} \right) a_{ij}x^i y^j = 0$  (c)

Newton también trata el problema inverso; es decir, la antidiferenciación. Al tratar estos dos problemas es que surge la regla de la cadena, al respecto Edwards (1979) menciona:

*The tangent and area problems emphasize the importance of systematic procedures for differentiation (the calculation of, given) and antidifferentiation by substitution methods—equivalent to what we call the chain rule and integration by substitution-- that is essentially "built into" the calculus of fluxions.*

Se puede decir que, originalmente la regla de la cadena surge como un método de sustitución; es decir, como una herramienta que permitía hacer un cambio de variable bajo la mira de encontrar la derivada de una función. Este procedimiento de cómo Newton aplicaba la regla de la cadena para calcular  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ , lo podemos ver generalizado en seguida: Supongamos que queremos diferenciar  $y = [f(x)]^{m/n}$ , donde es un polinomio; Newton inicia introduciendo una nueva variable  $z = f(x)$  con fluxión  $z = f'(x)x$ , según (c). Entonces  $y^n = z^m$ , y por (c) tenemos:

$$ny^{n-1}\dot{y} = mz^{m-1}\dot{z}$$

$$\text{De aquí surge } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{mf'(x)[f(x)]^{m-1}}{n[f(x)]\left[\frac{m}{n}\right]^{(n-1)}} = \frac{m}{n} [f(x)]^{\frac{m}{n}-1} f'(x)$$

Lo anterior permite ver el significado intrínseco de la regla de la cadena, ésta basada en las relaciones (a), donde Newton considera a las fluxiones  $y$  en un contexto físico como cambios instantáneos de un movimiento continuo.

### Componente cognitiva

Esta componente se refiere a cómo piensa la regla de la cadena el estudiante de ingeniería y cuáles son las dificultades que se dan en su apropiación. Al respecto se examinaron 5

grupos de estudiantes de distintas ingenierías en el periodo 1999-2001, en el Instituto Tecnológico de Saltillo, bajo un proceso directo *in situ*, consistente en examinar las respuestas de reactivos tocantes a la regla de la cadena, elaborados bajo dos perspectivas: de aplicación en contextos matemáticos (para funciones de una y dos variables), y de aplicación en contextos físicos (para funciones de una variable). Este estudio permitió observar que, el estudiante no logra comprender, en principio, la función compuesta, y por otro lado, no logra comprender el producto  $\frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ ; es decir, no entiende la parte toral de la regla de la cadena: cómo una variable es en el mismo hecho matemático, variable independiente y variable dependiente y, la ligazón de sus razones instantáneas de cambio o variaciones. En otros casos, la concepción que poseen es que la confunden con la regla de las potencias. Por otro lado, cuando la regla de la cadena es enseñada fuera de todo contexto, solo logran hacer el algoritmo. Se puede mencionar que, las dificultades vividas en el proceso de apropiación de la regla de la cadena devienen en tres direcciones: dificultades asociadas a las ideas intrínsecas que contiene, dificultades relacionadas a la vinculación con contextos matemáticos y, con contextos sociales.

### **Componente sociocultural**

Lo sociocultural permitirá observar el problema desde una perspectiva social; es decir, permitirá mirar el problema a través de un trabajo humano, desarrollando una actividad matemática, con el objetivo de reconstruir el conocimiento matemático bajo un fin último, el de su apropiación. Por lo mismo, ayudará a unir las componentes anteriores con base en el quehacer humano desarrollado en cada una de ellas; por ejemplo: la actividad humana localizada en el estudio didáctico tiene que ver con el profesor y los autores de libros (saber a enseñar) ejercitando mecanismos de consenso y de reproducción social. Lo anterior permite decir que un elemento que entra en juego en el sistema escolar y que miraremos bajo un trabajo humano, es el texto escolar. Este soporte de acción y de puesta en el escenario educativo de un saber afectado por una transposición didáctica, obedece a una mecánica de formación de consensos; es decir, los textos escolares son un medio que permite generar consensos hacia el qué enseñar e incluso hacia el cómo enseñar y a la vez, es un medio de reproducción social (Cantoral, 2001). Así que los textos escolares permiten generar consensos para explicar la regla de la cadena; pero, a diferencia de otros temas matemáticos donde podemos aplicar diferentes versiones de lo mismo, el tema de estudio no posee dicho aspecto y, es aquí donde cobra fuerza la investigación acerca de este concepto, pues deberíamos tener otros caminos u presentaciones de la regla de la cadena (ver Dubinsky, 1998) y así generar un verdadero consenso. El diseño, entonces, debe ser diferente a cómo los textos escolares enseñan la citada regla. El estudio epistemológico apoya este cambio de epistemología, con base en la explicitación del sentido social que propició la naturaleza de la regla de la cadena; es decir, en el trabajo desarrollado por Newton hacia cómo él, bajo una idea de movimiento, con un origen social, llega a establecer la regla de la cadena. En cuanto a la dimensión cognitiva, la influencia social se ubica en el consenso y didáctica (Cantoral, 2001), puesto que el estudiante aborda problemas que utilizan la regla de la cadena sólo con base en las explicaciones que da el profesor y no con base en recursos variacionales o estrategias de resolución de problemas.

Así que bajo un trabajo humano, considerado en un primer plano, la regla de la cadena no sólo debe ser mirada como una estructura teórica, sino que también debe ser vista como un

ente con movilidad y en consecuencia, la cadena a resignificarse al embonarla en diferentes contextos variacionales. La regla de la cadena bajo este acercamiento sociocultural no sólo es derivar una función compuesta, sino es estudiar un fenómeno útil para una sociedad que requiera evolucionar a través de cambios sucesivos, llevando como proceso fundamental un cambio de variable independiente de la función derivada.

### **Conclusiones acerca del análisis preliminar**

Del análisis preliminar se puede señalar que los textos escolares no hacen una explicación clara de la regla de la cadena; su base de la explicación se fundamenta en la función compuesta, misma que no entiende el estudiante. En la mayoría de los libros examinados no hay una presentación en contexto. Los estudiantes cuando la manejan, sólo hacen su algoritmo; no pueden aplicarla en contextos sociales ni matemáticos. En algunos casos la confunden con la regla de la potencia. Por otra parte, Newton hace un tratamiento distinto al que ahora hacen los textos escolares: utiliza un cociente de cambios instantáneos y un cambio de variable. También se observa que el origen social de la regla de la cadena se ubica en el estudio del movimiento, el que es tomado como una circunstancia de su invención. Lo que permite decir que en esta transición de épocas y de sociedades, ocurre un cambio de epistemología, gestándose obstáculos tales como: uno, reconocido fuertemente, es el concepto de función (Sierpiska, 1993), el cual arrastra el concepto de función compuesta; otro, es el relacionado con el doble papel que asume una variable en una situación problema, como variable independiente y como variable dependiente; y, la ligazón intrínseca de las razones de cambio que se da entre éstas. Los obstáculos se pueden ubicar alrededor del obstáculo de función, por su interdependencia. Finalmente diré que, el diseño se circunscribe en tres direcciones según la componente sociocultural: textos escolares, cambio de epistemología y, mirar al estudiante como parte de un colectivo.

Recapitulando lo expuesto se puede mencionar que, cuando la regla de la cadena es puesta en la escena educativa, su problemática deviene en tres direcciones: una, relacionada con su apropiación; otra, relacionada con las matemáticas aplicadas (cómo y donde se aplica); y, la última, relacionada con el consenso y didáctica (es el medio actual que se utiliza para decidir cómo enseñarla).

### **Situación didáctica inicial**

Con base en el análisis preliminar se diseñó una situación didáctica, teniendo un carácter de referencia, pues dependiendo del análisis a posteriori se podrán diseñar nuevas exploraciones. Los objetivos que persigue este diseño son los siguientes:

- Proporcionar contextos sociales que permitan introducir la transición de variables y así ver aparecer la función compuesta.
- Proporcionar contextos sociales que permitan aparecer en el estudiante la regla de la cadena ligada a la función compuesta, bajo el doble papel que asume una variable y la fusión intrínseca que se origina entre razones de cambio.
- Confrontar la presentación de la regla de la cadena como un cociente de cambios instantáneos, con la de un producto de cambios instantáneos.
- Inducir al estudiante a transitar dentro de tres registros de representación que posibiliten la construcción social de la regla de la cadena: registro gráfico, numérico y algebraico; bajo una construcción de consensos.

También se identificaron las siguientes variables didácticas:

- La relación existente entre las variables independiente y dependiente y, sus contextos.
- Los contextos de ubicación de la regla de la cadena: matemático (gráfico, numérico y algebraico) y social (dentro de la vida cotidiana, dentro de la ingeniería o dentro de otra rama de la ciencia).
- La formación de la función compuesta bajo la necesidad de utilizar una tercera variable.

## Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica*. En Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Gómez, P. (ed.). Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica. México., pp. 33-59
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 7, N° 2, pp. 33-115.
- Cantoral, R. & Farfán, R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. En R. Cantoral (Ed.), El futuro del Cálculo Infinitesimal. ICME-8. Sevilla, España. México: Grupo Editorial Iberoamérica., pp. 69-91
- Cantoral, R. (2001). *Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos*. En G. L. Beitía (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 14. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición, pp. 64-75
- Dubinsky, E. (1998). *Una Década de Investigación en Educación Matemática Sobre Algunos Temas de Matemáticas Avanzadas*. En F. Cordero (Ed.). Programa Editorial. Serie: Antologías. N° 3, pp. 223-247. CINVESTAV-IPN. México
- Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. USA: Springer-V.
- Newton, I. (2001). *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*. UNAM. México. [I. Newton. *Tractatus De Methodis Serierum Et Fluxionum*. 1671]
- Sierpinska, A. (1993). *On Understanding the Notion of Function*. En The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. Harel y Dubinsky (Eds.). MAA Notes Vol. 25., pp. 25-59