Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato

Crisólogo Dolores Flores y Luis Arturo Guerrero Azpeitia

CECYTEH, CIMATE de la UAG, México

cdolores@uagro.mx / luis_arturo_guerrero@hotmail.com

Resumen.

En este artículo se reportan los resultados de una investigación que explora las concepciones alternativas de profesores de matemáticas de bachillerato acerca del comportamiento de funciones. Para tal exploración se diseñó un cuestionario en el que se usan los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico. En especial se exploraron concepciones relativas al comportamiento variacional de funciones [v. gr: Para qué x, $f'(x)>0$], comportamiento variacional y signo simultáneamente [v. gr: Para qué x se cumple que: $f'(x)>0$ y $f(x)<0$] y las relativas a los procesos de reversibilidad: [v. gr: Dada $f'(x)$ esbozar $f(x)$ y viceversa]. Los resultados indican que una cantidad significativa de profesores, creen que $f(x)<0$ si su gráfica está en el semieje negativo de las x; consideran a $f'(x)$ como asociada a un punto y no al comportamiento de $f(x)$; la mayoría se muestra imposibilitado para transferir información variacional de la gráfica de $f'(x)$ a $f(x)$.

1. Elementos básicos de la investigación

Problema y objetivo. Varios trabajos de investigación (Dolores, 1996; Dolores, 1998; Dolores/Guerrero/Medina/Martínez, 2001; Cáceres, 1997) muestran que en situación escolar, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PLV) en estudiantes universitarios y preuniversitarios es muy deficiente. En el marco de este problema global, adoptamos un problema específico: cómo se manifiestan en los profesores de bachillerato esas deficiencias, en especial cuando analizan el comportamiento de funciones. Para el desarrollo del PLV es indispensable poder leer e interpretar las gráficas de funciones, no obstante se ha reportado que los estudiantes no pueden usar las gráficas para comunicar o extraer información (Wainer, 1992), o que existen confusiones entre la pendiente y la altura, entre un intervalo y en un punto, etc. (Leinhardt, G. et al, 1990). Incluso estudiantes y profesores confunden la trayectoria del movimiento físico con la gráfica cartesiana (Dolores /Bello/ Carvajal, 2002). ¿Pero qué pasa con las concepciones de los profesores sobre el comportamiento de funciones? El análisis de funciones es muy importante en la escuela media y superior pues en él se sintetiza el objetivo primordial de la matemática de las variables. Por ello en esta investigación nos planteamos como objetivo, detectar y caracterizar las concepciones alternativas de profesores de matemáticas de bachillerato sobre los aspectos básicos del análisis de funciones.

Elementos teóricos. El PLV es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática del cambio por una lado y los procesos del pensamiento por otro; implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio (Cantoral, 1997). Por otro lado, las representaciones semióticas juegan el papel de mediatizadores del conocimiento en la actividad matemática, a través de ellos, las representaciones mentales se exteriorizan para fines de comunicación y son al mismo tiempo esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, ya que aquellas dependen de la interiorización de las representaciones semióticas (Duval, 1998). Los rasgos característicos del comportamiento de las funciones de nuestro interés son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula; estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los profesores. En los medios escolares se cree que las gráficas son de gran ayuda para visualizar el comportamiento de funciones. Sin embargo, con frecuencia esas visualizaciones y los significados que los estudiantes atribuyen a las gráficas no son congruentes con los significados aceptados en textos o los que comparten los expertos. Esta incongruencia causa conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello ha recibido varias denominaciones: errores, errores sistemáticos, preconcepciones y concepciones alternativas. El término error enfatiza la incongruencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado, las preconcepciones se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que está fuertemente arraigado en la mente, las concepciones pueden o no ser acordes con los significados aceptados por textos y expertos, por nuestra parte en este trabajo adoptamos el término concepciones alternativas en el sentido de Confrey (1990), Mevarech y Kramarsky (1997), porque enfatiza lo que las personas piensan o saben por sobre lo que no conocen.

Metodología. Para la exploración se utilizó un cuestionario y entrevistas. El cuestionario se diseñó para que permitiera extraer información sobre las concepciones de los profesores al analizar el comportamiento de funciones por medio de los sistemas de representación gráfico, analítico y verbal. Se plantearon nueve situaciones que fueron diseñadas sobre la base de cuatro criterios: dadas las condiciones analíticas de $f'(x)$ construir o seleccionar $f(x)$, dadas las condiciones (en forma verbal) de $f'(x)$ seleccionar $f(x)$, dada la gráfica de $f'(x)$ construir $f(x)$ y dada la gráfica, seleccionar las condiciones analíticas a las que se sujeta.

CUADRO 1. CARACTERISTICAS DE LAS PERGUNTAS DEL CUESTIONARIO

PREGUNTAS	TRANSICIÓN	DADA LA CONDICIÓN VARIACIONAL EN FORMA:
1	Gráfico-Analitico	Gráfica, seleccionar su comportamiento expresado en forma analítica.
2,3	Analítico-gráfico	Analítica de $f'(x)$, seleccionar la gráfica de $f(x)$
7,8		Analítica de $f'(x)$,constrtuir la gráfica de $f(x)$
4,5	Verbal-gráfico	Verbal de $f'(x)$, seleccionar la gráfica de $f(x)$
6,9	Gráfico-gráfico	Gráfica de $f'(x)$, construir la gráfica de $f(x)$

El cuestionario se aplicó a 16 profesores de matemáticas que tenían experiencia en la enseñanza del Cálculo Diferencial, todos ellos adscritos al Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Hidalgo (CECyTEH), institución educativa de nivel medio superior. Además a ocho de estos profesores se les entrevistó utilizando las mismas situaciones planteadas en el cuestionario a fin ampliar y confirmar la información encontrada. Para la detección de las concepciones se hizo un análisis cualitativo a las respuestas obtenidas en el cuestionario y en las entrevistas. A continuación se presenta el análisis de las respuestas, las gráficas correspondientes a cada una de las preguntas (cuando fueron proporcionadas) aparecen en el Cuadro 2.

2. Análisis las respuestas dadas al cuestionario

Pregunta 1. La gráfica siguiente corresponde a cierta función f(x). Subraye la opción u opciones que satisfagan a cada pregunta ¿Para qué intervalos se cumple que:

1.A) $f(x + h)$ $f(x) > 0$, para $h > 0$? a) $-3 < x < -2$ b) $-2 < x < 0$ c) $0 < x < 2$ d) $-3 < x < -0.5$ e) otro: ________

1.B) $f(x + h)$ $f(x) < 0$, para $h > 0$? a) $-3 < x < -2$ b) $-2 < x < 0$ c) $0 < x < 2$ d) $-0.5 < x < 0.5$ e) otro: ________

1.C) $f(x + h)$ $f(x) = 0$, para $h > 0$? a) $x = -3$ b) $x = -0.5$ c) $x = 0$ d) $x = 2$ e) otro: ________

Respecto de la pregunta 1C, una quinta parte de los profesores consideró que: f(x+h)-f(x)=0 en x = 0 y otra quinta parte en x = 2, ninguno asoció todos los puntos estacionarios de la función con esta expresión, un tercio de los profesores la asoció con los puntos de corte de la gráfica con el eje x. Por otra parte, el 18% de los profesores asocian: f(x+h)-f(x)>0 con la región donde f(x) > 0 y f(x+h)-f(x)<0 con la región donde f(x)< 0, esto hace suponer que confunden crecimiento con el signo positivo de la función y decrecimiento con el signo negativo de la misma; solo el 13% identificó correctamente los rasgos solicitados, un tercio no dio respuesta .

Pregunta 2. Escriba, f´(x)>0; f´(x)<0 o f´(x)=0, donde las gráficas satisfagan la condición. Un 40% establece relaciones aceptables entre las condiciones analíticas dadas y sus correspondientes representaciones gráficas, es decir, relacionó simultáneamente las tres condiciones con sus respectivas gráficas: la 2A, 2C y 2E con f´(x)>0; las gráficas 2B y 2F con f´(x)<0 y la gráfica 2D con f´(x)=0. El 20% de los profesores asoció f´(x)>0 con la gráfica ubicada en el semieje positivo de las ordenadas y a f´(x)<0 con la gráfica que se ubica en el semieje negativo de las ordenadas donde x<0. Por otra parte, el 13% asoció las expresiones f´(x)<0 y f´(x)>0 con las gráficas que se ubican en el semieje negativo y positivo de las abscisas, respectivamente. Estos resultados hacen suponer que, para este sector de profesores existe confusión entre f´(x) con f(x), parecen no diferenciar que la primera reporta comportamiento y la segunda ubicación.

Pregunta 3. Escriba, f´(x)>0 y f(x)>0, o bien f´(x)<0 y f(x)<0, donde las gráficas satisfagan las condiciones al mismo tiempo. El 44% asoció simultáneamente tanto las condiciones f´(x)>0 y f(x)>0 (creciente y positiva) con las gráfica 3A, 3C y 3F, como f´(x)<0 y f(x)<0 con las gráficas 3B y 3D; a pesar de que la gráfica 3E no satisfacía ninguna de las condiciones dadas los profesores la seleccionaron para alguna de ellas. El 33% de los profesores, tal parece que sólo asocian una de las dos condiciones ya sea f´(x)>0 y f(x)>0 si la gráfica de la función está en el semieje positivo de las ordenadas o bien f´(x)<0 y f(x)<0 si se ubica en el semieje negativo. El 18% asocia solo una de las dos expresiones analíticas, mostrando preferencia por f´(x)<0 y f(x)<0 si la gráfica de la función se localiza en el semieje negativo de las abscisas o bien por f´(x)>0 y f(x)>0 si se ubica en el semieje positivo de las abscisas. En forma global, para el 50% de los profesores, es suficiente el cumplimiento de una condición.

Pregunta 4. Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y positiva, o bien, función decreciente y negativa, según el comportamiento de sus gráficas. El 66.7% de los profesores asoció correctamente las gráficas de 4B y 4F con las condiciones creciente y positiva, en tanto que para las gráficas 4D y 4E asociaron las condiciones decreciente y negativa, sin embargo, de esta cifra, el 80% tuvo alguna elección simultáneamente en las gráficas 4D y 4E, lo que hace suponer que las elecciones de profesores son endebles; en tanto que el restante 20% no asoció ninguna de las dos condiciones que se le presentaron, mostrando, tal vez, cierta solidez en sus argumentos. En el 33% restante no mostró un patrón definido en sus respuestas. Es posible que cierto sector de los profesores considere que al cumplirse una de las dos condiciones de la conjunción, es suficiente, mostrando cierta tendencia a asociar función creciente con función positiva por una parte, y por la otra, función decreciente con función negativa.

Pregunta 5. Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y negativa, o bien, función decreciente y positiva, según el comportamiento de sus gráficas. El 26.7% de los profesores consideró que las gráficas 4D y 4E cumplen la condición de creciente y negativa y, decreciente y positiva respectivamente (afirmación correcta), sin embargo, solo el 13.3% muestra cierto dominio en el análisis de gráficas en los rasgos ya citados, en tanto que el 13.3% restante manifiesta contradicciones en cuanto al cambio de signo de la función en dos o más incisos. Al analizar en conjunto las preguntas 4 y 5, se tiene que el 33.4% manifiesta contradicciones en sus respuestas (6.7 referente a la variación y 26.7 respectivo al signo). Un 20%, mantiene la concepción de asociar crecimiento con positividad y decrecimiento con negatividad de la función. Un 20 por ciento manifiesta proclividad a considerar como función negativa a aquella que está sobre el semieje negativo de las abscisas y positiva si esta sobre el semieje positivo. Finalmente el 13.4 por ciento no manifiesta un patrón bien definido.

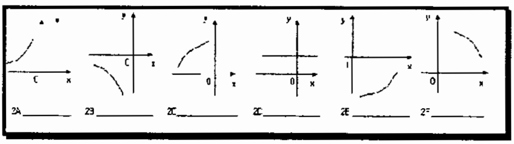
Pregunta 6. Se muestra una porción de la gráfica de la función $f'(x)$ en torno de $x = a$, esboce la gráfica de $f(x)$ en torno ese punto. El 83.4% de los profesores que esbozaron gráficas, consideraron al punto $(a, 0)$ como un cero de $f(x)$. Nótese que la pregunta planteada requiere de pasar, de la gráfica de la derivada a la de la primitiva, es decir la reversibilidad asociado al paso de $f(x)$ a $f'(x)$. Solo un profesor fue capaz de esbozar una gráfica que cumple con las condiciones solicitadas.

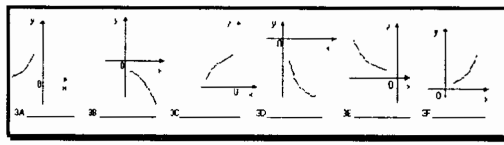
Pregunta 7. Trace las gráficas de funciones que satisfagan las siguientes condiciones: a) $f(a)>0$, $f'(a)<0$; b) $f(a)<0$, $f'(a)>0$; c) $f(a)<0$, $f'(a)=0$. Solo el 14% de los profesores esbozan gráficas correctas, sin embargo sólo el 7 por ciento, hizo manifiesta en ellas la ubicación del punto a, para, a partir de esto, cumplir con las condiciones preestablecidas, utilizando como principal argumento, una recta tangente en $f(a)$; mientras que el resto de profesores no ubicaron al citado $x = a$ y bosquejaron gráficas que cumplieron con las condiciones para toda x; otro aspecto importante de resaltar, es que solamente el profesor que ubicó $f(a)$ fue quien relacionó a $f'(a)=0$ con un punto estacionario, el resto consideró una línea recta positiva o negativa y paralela al eje de las abscisas, posiblemente el argumento sea: si $f(x) = c$ entonces $f'(x) = 0$. El 28.5%, elabora esbozos que satisfacen únicamente una condición y que corresponde a $f(x)$; en tanto que el 7% busca satisfacer las condiciones para $f'(x)$ únicamente. El 14% considera gráficas separadas para cada condición solicitada, sin embargo no las satisfacen, en tanto que un 21% construye gráficos separados en las que cada uno de ellas por separado cumple las condiciones de $f(x)$ o $f'(x)$. Solamente dos profesores elaboraron gráficas para satisfacer las condiciones de $f(a)$ y $f'(a)$, el resto para las condiciones de $f(x)$ y $f'(x)$, para un punto y para toda x respectivamente.

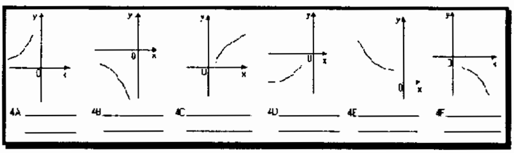
Pregunta 8. Si $f(x)$ tiene un solo punto estacionario en $x = 2$, $f'(x)> 0$ para $x < 2$ y $f'(x)> 0$ para $x > 2$. Esboce una gráfica para $f(x)$ que satisfaga estas condiciones y de la fórmula de la función. El 66.7% de los profesores que realizaron al menos un esbozo para las condiciones solicitadas, asoció al punto estacionario de la función con el cero de la misma. Con estos datos es posible considerar que existe confusión entre $f(x)$ y $f'(x)$, al menos en $x=a$. El 45.5%, esboza gráficas que cumplen con las condiciones de $f(x)>0$ para $x<2$ y para $x>2$, aunque estas condiciones debieron cumplirse pero para $f'(x)$. Un 27.3% bosquejó una gráfica que cumple las condiciones solicitadas para $f'(x)$, solamente un profesor no asoció al punto estacionario con el cero de la función. Solamente un profesor construyó una gráfica que cumple con todas las condiciones solicitadas. Existe proclividad a confundir a $f(x)$ con $f'(x)$ al menos en un 60% de los casos.

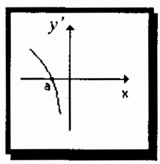
Pregunta 9. La gráfica siguiente corresponde a cierta $f'(x)$, esboce al menos una que corresponde a $f(x)$. El 44.4% de los profesores esbozó una gráfica creciente. El 22% pretendió realizar un análisis de $f'(x)$ a través de rectas tangentes en algunos puntos. Es posible que no exista habilidad en el tratamiento en el sistema de representación gráfico y por tal motivo, el proceso de reversibilidad no se haya manifestado (y si existe parece no ser consistente).

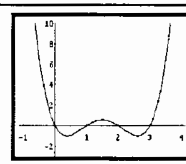
CUADRO 2 .GRÁFICAS DADAS EN LAS PREGUNTAS 2, 3, 4 ...9


Pregunta 2


Pregunta 3


Pregunta 4 y 5


Pregunta 6

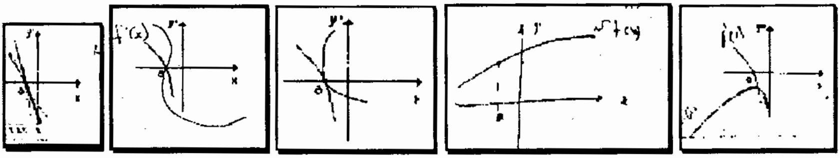
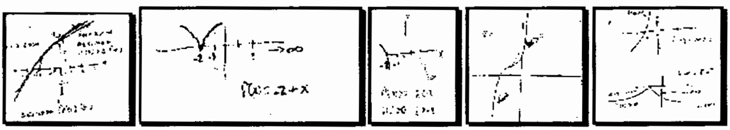
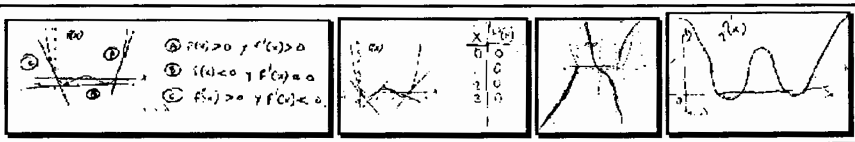

Pregunta 9

Mediante las entrevistas pudimos confirmar algunas cuestiones observadas en el cuestionario, para el 88 % (63 manifestó estar seguro y el 25 manifiesta contradicciones) considera que, crecimiento y función positiva, por un lado y decrecimiento con función negativa, son condiciones concomitantes. El 25% considera como argumento la concavidad para determinar el signo de la función (cóncava hacia arriba implica función positiva). El 38% considera privilegia al eje de las ordenadas como referencia para realizar el análisis de la función.

3. Concepciones alternativas encontradas.

Un tercio de los profesores asoció a $f(x+h)-f(x)=0$ con los cero de la función; un 18% asoció a $(x+h)-f(x)>0$ con la región donde $f(x)>0$ y $f(x+h)-f(x)<0$ con la región donde $f(x)<0$, esto hace suponer que confunden crecimiento con el signo positivo de la función y decrecimiento con el signo negativo de la misma. La mayoría de los profesores cuestionados asocian consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva (expresadas en forma verbal-escrita) con una las graficas correspondientes, sin embargo, al pedirles que asocien las condiciones creciente y negativa (bajo las mismas condiciones) por un lado, y decreciente y negativa por otro, tienden a asociar aquella función que es positiva y negativa respectivamente. Al solicitar la construcción de gráficas que cumplan dos condiciones del estilo $f'(x)>0$ y $f(x)<0$, los profesores son proclives a esbozar una gráfica por cada una de las dos condiciones, las cuales no siempre satisfacen la condición respectiva para la cual fueron construidas. Observamos que existe la tendencia en cierto grupo a confundir el crecimiento de una función ($f'(x)>0$) con su ubicación en el semieje positivo de las abscisas, en tanto que el decrecimiento de la función ($f'(x)<0$) es asociada con las gráficas cuya ubicación es el semieje negativo de las abscisas. Para otro grupo de profesores, existe proclividad a relacionar la expresión $f'(x)>0$ con una gráfica cuyas ordenadas sean positivas, mientras que, aquella función que posea ordenadas negativas, es asociada con la expresión $f'(x)<0$. En términos generales notamos la tendencia de sólo atender una condición cuando se planteaban dos simultáneamente. Es probable que esté fuertemente arraigada la idea de asociar crecimiento con *positividad* y de crecimiento con *negatividad* de la función.

Se detectó gran proclividad a considerar que, gráficamente se cumple que $f(x_0)$ es equivalente con $f'(x_0)$. El proceso de reversibilidad, el paso de la gráfica de $f'(x)$ a $f(x)$, casi no se manifiesta en los profesores, tienden a analizar o construir gráficas que satisfagan las propias condiciones de $f'(x)$ y no las correspondientes a $f(x)$, solo trabajan en un mismo plano de coordenadas pues se muestran imposibilitados para transferir información variacional del plano de coordenadas $(x, f'(x))$ al de coordenadas $(x, f(x))$ o viceversa. Generalmente el proceso de graficación de $f'(x)$ dada $f(x)$, es relativamente transitable (empíricamente), en cambio, en nuestra indagación, observamos que los profesores al plantearles construir $f(x)$ dada $f'(x)$ esbozan rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica de $f'(x)$, solo un profesor construyó una gráfica aceptable.

CUADRO. ALGUNAS PRODUCCIONES DE LOS PROFESORES	
Pregunta 6	
Pregunta 7	
Pregunta 8	
Pregunta 9	

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional.* Seminario de Investigación, Área de Educación Superior, Cinvestav/IPN México D.F.

Confrey, J. (1990). *A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming.* Review of research in Education. Vol. 16. Pp. 3-56

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.

Dolores, C. & Bello, G. & Carvajal, D. (2002). *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria.* Artículo en revisión para la revista RELIME.

Cáceres, T. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional. Un estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años.* Tesis de Maestría. Matem. Educ. Cinvestav del IPN, Méx.

Dolores, C. & Guerrero, L. & Medina, M. & Martínez, M. (2001). *Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales.* Reporte de Investigación aceptado para su publicación en las Actas de RELME XV. Buenos Aires, Arg.

Leinhardt, G. & Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990) *Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching.* Review of Educational Research Vol. 60. Pp. 1-64

Mevarech , Z. & Kramarsky, B. (1997). *From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions.* Educational Studies in Mathematics. Vol. 32 Núm. 3. pp. 229-263

Wainer, H. (1992). *Understanding graphs and tables.* Educational Researcher Vol. 21, pp.14-23