

# El paso de la letra como objeto a la letra como número generalizado una experiencia de aula en el CED San Bernardino

Blanca María Peralta y Carmen Martínez

CED San Bernardino. CED Brasilia. Bogotá, Colombia.

bmpguacheta@hotmail.com camartin@uniandes.edu.co

## Resumen

El propósito de este proyecto es facilitar el tránsito de los estudiantes desde la interpretación de la letra como objeto hasta la interpretación como número generalizado. El procedimiento seguido para el desarrollo de este proyecto fue el siguiente, se aplicó la prueba diagnóstica propuesta por Küchemann, a partir de los resultados de esta se hizo una clasificación haciendo un análisis global de la prueba y luego una mirada particular a cada uno de los ítems. Después de la clasificación se dispuso el diseño de talleres que permitieran superar algunas de las dificultades vistas a través de esta prueba; cada uno de los talleres podía tener una duración mayor de una clase o incluso una semana, al final de estos se sacaban conclusiones para evaluar la efectividad de los mismos. Las actividades, se basaron en encontrar patrones en una organización dada, con ello los estudiantes debían ilustrar la situación, responder unas preguntas guía y por último hallar una fórmula que les permitiera hallar la cantidad de objetos, en una posición o momento cualquiera.

## Introducción

Dentro de las dificultades que se presentan en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas escolares, se encuentra la incursión de los estudiantes en el álgebra y su lenguaje. Según estudios realizados por Brown et al (tomado de El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar) *"Los estudiantes de bachillerato parecen tener, en general, algún conocimiento de los conceptos básicos de la geometría y el álgebra. Sin embargo, los resultados de esta evaluación indican, como lo han mostrado otros resultados, que frecuentemente los estudiantes no son capaces de aplicar este conocimiento a situaciones de resolución de problemas y que tampoco parecen comprender muchas de las estructuras que están detrás de estos conceptos y habilidades"* Una consecuencia de esta situación es la imposibilidad que muestran los estudiantes para representar situaciones usando un lenguaje diferente al cotidiano, así mismo encontrar posibles hipótesis que expliquen dicha situación ó que de alguna manera logre asociar con su entorno. Por lo tanto es de vital importancia que el alumno se apropie de estructuras algebraicas que le permitan ampliar su visión de las matemáticas y por tanto, que le faciliten desarrollar habilidades y destrezas cuando se enfrenten a la solución de problemas que lo involucren. Dentro de estas estructuras se halla la interpretación de la letra, es importante que se haya realizado el paso desde la letra como objeto hasta la letra como variable para que la modelización de situaciones cotidianas sea más sencilla.

## Objetivos

### *Objetivo General:*

- Plantear y desarrollar una propuesta para facilitar el paso de los estudiantes desde la letra no usada hasta la letra como número generalizado.

### *Objetivos Específicos:*

- Proponer y desarrollar actividades que le permitan al estudiante apropiarse y hacer uso de otros significados de la igualdad.
- Ampliar el universo numérico que poseen los estudiantes.
- Hacer evidente la necesidad del uso de signos de agrupación en expresiones algebraicas.
- Proponer y desarrollar actividades que le ayuden al estudiante a usar la letra como objeto, como incógnita y como número generalizado.

### **Descripción**

**3.1 Antecedentes.** La nueva Ley de Educación de nuestro país pretende mejorar la educación matemática, tanto a nivel de enseñanza como de aprendizaje. Esto ha generado la conformación de grupos de investigación interesados en estudiar las características de la población educativa e implementar metodologías acordes a ellas, aunque inspiradas en las tendencias educativas actuales internacionales. En el año 1998 el Ministerio de Educación Nacional expide los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) que proponen el desarrollo del pensamiento numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio a través de procesos de resolución de problemas, comunicación, representación y conexión con otras áreas del conocimiento. Esta propuesta implica su implementación durante toda la etapa escolar, sin embargo los currículos del país insisten en permanecer diseñados como lo obligaba una ley en 1975, la cual colocaba el álgebra en el octavo grado y solo hasta ese grado se estudiaban temas concernientes a ella; esto ha hecho que se descuide el proceso de desarrollo de pensamiento del estudiante y se presenten tantas dificultades en la enseñanza como en el aprendizaje del álgebra escolar.

### **3.3 Descripción de la población**

El proyecto de aula se realizó en el C.E.D San Bernardino J.T. , ubicado en la Localidad 7(Bosa), sur de Bogotá. En los grados décimo y noveno de educación básica secundaria, con 112 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 14 y los 19 años, pertenecientes a los estratos socioeconómicos 1 y 2. Algunos provienen de hogares desintegrados y en algunos casos trabajan para ayudar con el sostenimiento económico de sus familias o ayudan con las actividades domésticas o con el cuidado de sus hermanos menores

### **3.2 Marco Teórico**

#### **El lenguaje algebraico**

El cálculo algebraico nace como generalización del modelo numérico, para trabajar con un modelo algebraico, debemos ser hábiles en cálculos con variables.

Todo cálculo algebraico se construye a partir de las cinco propiedades características del sistema numérico: la conmutativa y asociativa de la suma y el producto, y la distributiva del producto respecto de la suma.

- *El signo de igualdad*

En aritmética el signo = se entiende como una acción física, sirve para conectar un problema con su resultado numérico, otras veces permite relacionar dos procesos que dan el mismo resultado  $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$  y en algunos casos relaciona las secuencia de pasos intermedios de

un proceso que conduce a un mismo resultado  $3x(5-2)+4=3x3+4=13$  donde cada eslabón de la cadena de igualdades, expresa una simplificación o cambio de forma de su predecesor, es decir, una reducción.

En álgebra el sentido de igualdad aritmética se conserva cuando se trabaja con tautologías algebraicas, pero no en las ecuaciones.

- *La sustitución formal*

La sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como:

- o Generalización: cuando términos numéricos son reemplazados por variables o modelos concretos son extendidos
- o Simplificación, cuando en una expresión dada, expresiones parciales son reemplazadas por variables
- o Eliminación, cuando variables implicadas en una sustitución son suprimidas, por ejemplo en los sistemas de ecuaciones.
- o Complicación estructural, cuando en una expresión las variables son reemplazadas por expresiones dadas
- o Particularización, cuando las variables son reemplazadas por números para verificar ciertas expresiones

- *El uso y significado de las letras*

Clasificación de la letra según Kuchemann (Tomado de La transición aritmética álgebra):

a) Letras evaluadas.

A las letras se les asigna un valor numérico desde el principio. Por ejemplo cuál es el valor de  $5a+3$  cuando  $a=1$ ,  $a=2$ ,  $a=3$ .

b) Letras ignoradas.

Los alumnos ignoran las letras, o a lo más reconocen su existencia, pero no le asignan ningún significado. ¿Si  $a+b=43$   $a+b+2=?$

c) Letras como objeto.

Son vistas como un objeto concreto (frutas, lados de un polígono, etc.), eliminando así el significado abstracto de las letras por algo más concreto y real.

El uso de las letras como objeto reduce el significado abstracto de las letras u objetos, pero esta reducción ocurre con frecuencia donde no es adecuada. Esto sucede especialmente en problemas donde se involucran objetos (lápices, peras, etc.) y es esencial distinguir entre los objetos mismos y su cantidad.

d) Letras como incógnitas

Son consideradas como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente.

e) Letras generalizando números.

Consideradas como una representación, o al menos son capaces de deducirlo, de varios valores numéricos antes que de uno exactamente.

f) Letras como variables.

Son consideradas como una representación de un conjunto de valores no especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

El concepto de variable implica claramente el conocimiento de la incógnita y de sus posibles valores pero esto está más allá de la comprensión de las letras como magnitudes y como generalización de números.

## **Los Estadios de Desarrollo y las Matemáticas**

1. Preoperatorio (4-6 años).

2. Temprano de operaciones concretas (7-9 años).

Capacidad para trabajar significativamente con operaciones simples sobre elementos concretos, pero los elementos y las operaciones están relacionadas con objetos físicos y situaciones realizadas experimentalmente. La clausura es fundamental y tener un resultado único para que la operación tenga sentido.

3. Estadio 2 final de operaciones concretas (10-12 años).

Capacidad para trabajar con cierto número de operaciones en secuencias si los números son pequeños y con números grandes si forman parte de operaciones simples. Comparan expresiones sencillas como  $5+8+7$  con  $5+8+3$ .

4. Estadio 3 de generalización concreta (13-15 años).

Se usa cierto número de operaciones, no asequibles físicamente, en la medida en que tienen una garantía de que los elementos y sus combinaciones pueden clausurarse en cualquier momento y proporcionan un resultado único que puede ser aplicado a la realidad física. Utilizan elementos generalizados (cifras grandes y letras en sustitución de números) y trabajan con fórmulas siempre que se les capacite para tener en cuenta que cada letra representa a un único número y que cada operación binaria puede clausurarse en cualquier momento.

5. Estadio 4 de operaciones formales (16 años en adelante).

No hay necesidad de relaciones, elementos, operaciones o la combinación de ellos con modelos análogos físicos, y se puede tomar como realidad un sistema abstracto bien determinado con sus definiciones, relaciones y reglas, no aborda la clausura hasta que ha agotado todas las posibilidades.

Trabajan con letras que representan números o variables que empleen una operación bien determinada. Puede trabajar con variables como tales, porque puede sacar una generalización sin necesidad de agotar todas las posibilidades.

En síntesis el pensamiento operacional concreto es caracterizado por la necesidad de considerar y manipular materiales físicos, implica solamente, operaciones que representen clausura, es decir, una expresión matemática será significativa si es posible concluir con un único número.

### 3.3 Metodología

Para el desarrollo de este proyecto se tomaron en cuenta los siguientes pasos, primero, se aplicó la prueba diagnóstica propuesta por Küchemann. Esta prueba está dividida en dos secciones, la primera conformada por siete preguntas y la segunda por seis. Las preguntas involucran conceptos numéricos y geométricos. En estas secciones presenta preguntas que indagan por la interpretación de la letra, desde la letra ignorada hasta la letra como número generalizado.

Segundo, a partir de los resultados de esta se hizo una clasificación de los estudiantes, haciendo un análisis global de la prueba y luego una mirada particular a cada una de las repuestas de los ítems. Tercero, después de la clasificación se dispuso el diseño de talleres, dirigido a los estudiantes, de tal manera que les permitiera superar algunas de las dificultades vistas a través de esta prueba. Las actividades, fueron de diversas características, en su orden se trabajó el significado de igualdad, la ampliación del universo numérico y la generación de patrones. En todas las actividades estaba inmerso el lenguaje algebraico como medio para representar la situación presentada, la representación gráfica de la situación y de la expresión algebraica (pues no siempre la expresión algebraica era representante de la situación). En general las clases se desarrollaron así: los estudiantes se organizaban por grupos de tres personas, se presentaba a los estudiantes la situación problema junto con las preguntas, se les daba un tiempo determinado para su solución al cabo de la cual se discutían los resultados entre todos los integrantes del curso.

La primera actividad llevaba el nombre de *el juego de las igualdades*, con el se pretendía propiciar un acercamiento al trabajo con la igualdad, estimular el cálculo mental y el trabajo con calculadora, ampliar el universo numérico que los estudiantes manejan y evidenciar la necesidad del uso de símbolos de agrupación y propiedades de las operaciones. Para esta actividad se escribían ciertos números en el tablero, los cuales debían ser hallados usando algunas o todas las operaciones aritméticas y una clase de números determinados con anterioridad, podrían ser los naturales, los enteros, los racionales o los reales. A pesar de parecer bastante sencilla esta actividad tardó un mes y medio aproximadamente. Se esperaba que con el paso del tiempo y el incremento en el nivel de dificultad de los problemas, los estudiantes fueran más ágiles en cálculos mentales, de tal manera que fuera más sencillo el uso de la calculadora, con esto el estudiante debía anticipar ciertos errores o dificultades que se podrían presentar de acuerdo con la naturaleza de los números. La segunda actividad se tituló *reconocimiento de patrones*, en esta se pretendía, Identificar patrones de regularidad en problemas dados, escribir patrones de regularidad usando lenguaje algebraico, identificar situaciones en las cuales la letra es vista como objeto, representar patrones de regularidad usando diversas formas (tabular, simbólica, gráfica, concreta). Para estas clases se presentó un problema de organización de un campeonato de fútbol en el colegio, aquí se pretendía que el estudiante pudiese hallar una expresión algebraica que le pudiera representar, la cantidad de equipos, los partidos por equipos y los partidos que en total se jugarían en el campeonato. En esta parte hubo una tardanza de mes y medio aproximadamente. La tercera actividad se denominó *a contar cuadrillos*, consistía en la presentación de una secuencia de cuadrillos. En gran parte se parecía a la anterior pues la finalidad era hallar una expresión algebraica para representar la situación y resolver exitosamente unas preguntas. De nuevo la tardanza en esta situación fue de dos y medio meses. En total el proyecto tuvo una tardanza de un año.

En términos generales las teorías de Piaget y Kieran presentan ciertos estadios o momentos del desarrollo de los estudiantes, se suponía que por la edad que la mayoría de los estudiantes tenía algunas de esos estadios deberían haberse superado. Lo mínimo que se esperaba era la ampliación del universo numérico, la percepción de otro sentido de la igualdad y el reconocimiento de patrones.

#### **4. Análisis y discusión de resultados**

Hasta el momento los resultados de esta propuesta son: ampliación del universo numérico, lo cual se consiguió por medio del juego de las igualdades, este juego también les permitió a los estudiantes diferenciar los decimales infinitos periódicos de los infinitos no periódicos, reconocer las fracciones como división indicada, de igual manera diferenciarla de la división como operación, utilizar adecuadamente los signos de agrupación, desarrollar un método para operar números usando calculadora, ver la igualdad como una relación de equivalencia, empezar una distinción entre la letra como objeto y la letra como incógnita, utilizar diversas formas de representación para un problema (tabular, gráfica, pictórica, simbólica), realizar traducciones entre ellas. Estos hallazgos fueron evidenciados mediante la observación directa de la actitud, preguntas, y reacciones de los estudiantes en el desarrollo de la clase. Dos de los tres cursos que participaron hallaron las regularidades, hicieron varias representaciones, tabular, gráfica, algebraica, pictórica y traducciones entre ellas, sin embargo no hay una razón muy clara de la razón por la cual el otro curso no ha conseguido progresar en este sentido.

El trabajo en equipo fomentó la participación, la discusión, el análisis, el respeto por la opinión del otro, la tolerancia, la solidaridad y el sentido de la responsabilidad.

#### **5. Conclusiones**

El hecho de buscar nuevas estrategias metodológicas hace evidente la preocupación del docente por mejorar su quehacer y en esa medida motivar al estudiante para un mayor y mejor desempeño dentro y fuera de clase.

Para tener éxito en la aplicación de las actividades propuestas es necesario contar con bastante tiempo para que el maestro estudie, planee sus clases adecuadamente y haga un correcto análisis de los resultados encontrados que le permitan colaborar mas eficientemente en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y en esa misma medida evaluar su propio desempeño.

#### **Referencias bibliográficas**

- Grupo Pretexto. (1999). *La transición aritmética álgebra*. Bogotá: Editorial GAIA
- Socas, M. Matías, M. Palarea, M. Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Kieran, C. (1994). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. (Vilma María Mesa, trad). Bogotá: Una empresa docente.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de educación.
- NCTM (1995). *Estándares curriculares de matemáticas*.