La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria

José Antonio Juárez López

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

jajul32@hotmail.com

Resumen

Gran parte de los estudios realizados en torno al concepto de variable y sus diferentes usos se ha centrado en estudiantes de secundaria, bachillerato y primer semestre universitario; en todos ellos se han detectado divesrsas dificultades para la comprensión y manejo adecuado de tal concepto. El concepto de variable es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del álgebra. Como marco teórico para esta investigación se utilizó la descomposición que Ursini y Trigueros (1998) hacen del concepto de variable. En ésta se consideran una serie de aspectos que incluyen la capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los 3 usos de la variable que se consideran, a saber: variable como incógnita específica, variable como número general y variables en relación funcional. Este resumen se refiere a los resultados de una investigación llevada a cabo con 74 profesores de matemáticas de secundaria a los que se les aplicó un cuestionario de 65 preguntas abiertas, dicho instrumento ya había sido diseñado y validado para realizar un estudio con estudiantes universitarios. Posteriormente se realizaron entrevistas a 6 profesores, tomando como base las respuestas dadas en el cuestionario. Se encontró que algunas de estas dificultades son similares a las que presentan los estudiantes.

Introducción

La presente investigación tiene como propósito analizar la comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria. Asimismo se contempla detectar cuáles son las dificultades más comunes que presentan los profesores al tratar con los diferentes aspectos de la variable en el contexto del álgebra elemental.

Gran parte de los estudios que se han realizado en torno a la comprensión del concepto de variable está centrada en estudiantes de secundaria (Booth, 1988; Stacey y MacGregor, 1996; Warren, 1999). También se conocen resultados de investigaciones realizadas con estudiantes de bachillerato (López, 1996) e incluso, se ha estudiado la evolución que tiene la comprensión de dicho concepto a lo largo de las etapas escolares que van desde el primer grado de secundaria hasta el primer semestre universitario (Lozano, 1998; Trigueros y Ursini, 1999; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000). En otro estudio realizado con estudiantes universitarios que iniciaban el primer semestre (Ursini y Trigueros, 1998) se encontró que el aprendizaje del concepto de variable es poco significativo, lo que se reflejó en las dificultades que presentaron los estudiantes para resolver problemas que involucraban dicho concepto.

Sin embargo, los estudios realizados hasta el momento sobre la comprensión del concepto de variable no han sido suficientes para poder dilucidar la problemática de su aprendizaje dentro del álgebra elemental en la que, sin duda, este concepto juega un papel preponderante. En particular, no hay hasta ahora estudios que indaguen las posibles dificultades que tienen los profesores de matemáticas de secundaria con el concepto de variable. Este es justamente el objetivo del presente estudio en el cual nos proponemos investigar la comprensión que tiene el profesor de matemáticas de secundaria en torno al concepto de variable y sus diferentes usos dentro del álgebra elemental.

Antecedentes y marco teórico

Tal como mencionan Schoenfeld y Arcavi (1988) el tratar de definir el término "variable" con una sola palabra nos conduce a usar palabras como: símbolo, parámetro, argumento, espacio vacío, entre otras, de ahí que consideren que este término tiene diversos significados que dependen del contexto en el que aparece. Otros investigadores también han subrayado la importancia que tiene el contexto en el papel que juegan las letras cuando los estudiantes usan el álgebra elemental (Philipp, 1992; Wagner, 1981). Esta última autora, por ejemplo, sugiere que así como las palabras del lenguaje verbal, los símbolos de variables matemáticas adquieren significado cuando aparecen en algún contexto y tienen algún referente. Así como en el lenguaje verbal, el símbolo y su referente determinan el papel semántico de la variable, mientras que el símbolo y su contexto determinan el papel sintáctico de la variable; esto quiere decir que el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable. Wagner (1983), por otro lado, comenta la complejidad que tiene el uso de literales así como la dificultad que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a ellos.

El concepto de variable es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del álgebra. En el salón de clase se suele presentar como si pudiera entenderse fácilmente llegando, incluso, a manejarlo con cierta naturalidad, sin valorar la complejidad del concepto ni los significados y usos que pueden tener las letras. En este sentido, Rosnick (1981) realizó un estudio acerca de las concepciones erróneas sobre el uso de letras que presentaron algunos estudiantes de nivel superior y encontró que cuando se les presentan relaciones funcionales en forma analítica, tienden a confundirse entre la variable independiente y la variable dependiente. El concepto de variable es multifacético e incluye diversos aspectos. Usiskin (1988), por ejemplo, pone de manifiesto cuatro usos diferentes de la variable y los asocia a cuatro distintas concepciones del álgebra haciendo énfasis en la relación de éstas con los propósitos de la enseñanza del álgebra elemental. Dichos usos aparecen en la tabla siguiente:

CONCEPCIÓN DEL ÁLGEBRA	USO DE LA VARIABLE
Aritmética generalizada	Generalizadores de patrones
Procedimientos para resolver problemas	Incógnitas, constantes
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros
Estudio de estructuras	Marcas arbitrarias en el papel

Tabla 1 (Usiskin, 1988, p. 17)

Por otra parte, Ursini (1994) considera que en el álgebra elemental aparecen esencialmente 3 usos de la variable: incógnita específica, número general y en relación funcional. Señala también que un usuario competente del álgebra es capaz de interpretar la variable de modos distintos dependiendo del problema donde aparece. Esto significa que, por ejemplo, a pesar de que las siguientes expresiones involucran el mismo símbolo literal:

$$(x + 2)(x + 3) \qquad\qquad (x + 2) + (x + 3) = 24$$

el uso que se hace de él en cada una es distinto, pues mientras en la primera expresión la letra representa un número general, en la segunda representa un valor específico y están dadas las condiciones para determinar dicho valor. Además, la misma autora señala que un usuario competente debe ser capaz de manipular las variables simbólicas sin necesidad de conocer su valor eventual. Esto quiere decir, por ejemplo, que debe poder simplificar una expresión algebraica como:

$$(2xy + 3x) - (4xy - 2)$$

También debe ser capaz de trabajar con la idea de correspondencia y variación cuando las variables se encuentran en una relación funcional. Por ejemplo, debe ser capaz de resolver el siguiente problema:

Dada y = 3x + 2, encuentra el valor de y cuando x toma valores en el intervalo –2 x10

Un usuario competente debe poder también identificar la incógnita y determinar su valor específico, por ejemplo, en una ecuación:

Determinar el valor de x en la ecuación $3(x + 2) = 2(x + 1)$

Existen también importantes resultados de investigaciones sobre la manera en que los alumnos interpretan los símbolos literales. Así Küchemann (1980) analizó las respuestas que más de 3000 estudiantes entre 13 y 15 años dieron a un cuestionario que implicaba el uso de los símbolo literales. Para contestar el cuestionario los alumnos debían interpretar y manipular expresiones algebraicas. Küchemann identificó seis maneras diferentes de interpretar los símbolos literales:

1) **Letra evaluada**: A la letra se le asigna un valor numérico.
2) **Letra no utilizada**: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.
3) **Letra como objeto**: Se considera la letra como una abreviatura del nombre de un objeto o como a un objeto en sí.
4) **Letra como incógnita específica**: La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
5) **Letra como número generalizado**: Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores.
6) **Letra como variable:** Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

De acuerdo con este autor, estos resultados revelan esencialmente dos niveles de comprensión de los alumnos: el primero abarca las tres primeras categorías y refleja un bajo nivel de respuesta mientras que las tres categorías restantes indican que el alumno se está acercando al álgebra. Aunque este autor propone un orden de dificultad creciente para las 6 categorías encontradas, Ursini (1994) considera que esto no implica que tal orden sea recomendable para la enseñanza pues los distintos usos de la variable pueden ser enseñados en diferentes niveles de complejidad.

Como marco teórico para la presente investigación, se utilizó la descomposición que Ursini y Trigueros (1998) hacen del concepto de variable. En esta descomposición se consideran una serie de aspectos que incluyen la capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los 3 usos de la variable considerados, a saber: variable como incógnita específica, variable como número general y variables en relación funcional.

La descomposición del concepto de variable usada como marco teórico para esta investigación aparece de manera esquemática a continuación:

Variable como incógnita

Se considerará que un manejo adecuado de la variable como incógnita implica:

- reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;
- interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;
- sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;
- determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;
- simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y usarlas para plantear ecuaciones.

Variable como número general

Se considera que un manejo adecuado de la variable como número general implica:

- reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas
- interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado que puede asumir cualquier valor;
- deducir reglas generales y métodos generales distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en secuencias y familias de problemas;
- manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica;
- simbolizar oraciones generales, reglas y métodos.

Variables en relación funcional.

Se considera que un manejo adecuado de las variables en relación funcional implica:

- reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;

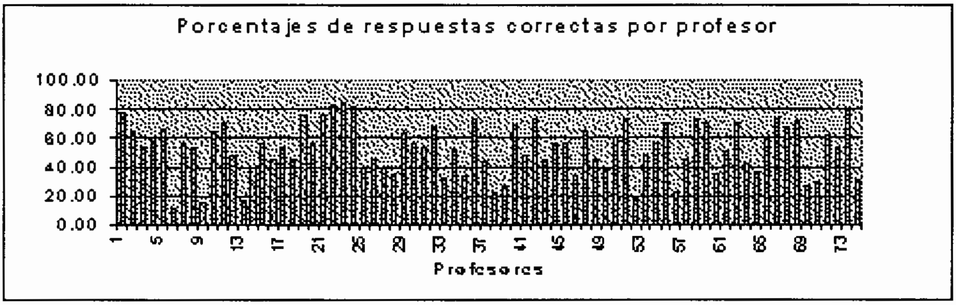
- ❖ determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
- ❖ determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
- ❖ reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;
- ❖ determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;
- ❖simbolizar una relación funcional basada en el análisis de los datos de un problema.

Metodología

Para llevar a cabo la presente investigación se utilizó una metodología que combina un acercamiento cuantitativo con un acercamiento cualitativo. Inicialmente se aplicó un cuestionario de 65 preguntas abiertas a una población de 74 profesores de matemáticas de secundaria, tanto en el D. F. como en la ciudad de Puebla. Posteriormente se realizaron entrevistas para profundizar sobre la comprensión y las dificultades de los maestros en torno a este concepto, tomando como base las respuestas dadas al cuestionario.

Análisis cuantitativo de las respuestas

En la siguiente gráfica podemos apreciar que de los 74 profesores sólo 3 obtuvieron más del 80% de respuestas correctas; 23 obtuvieron entre el 60% y el 80% de aciertos, mientrasque 28 obtuvieron entre el 40% y el 60%; 16 profesores alcanzaron entre el 20% y el 40% de aciertos; y sólo 4 profesores no alcanzaron ni el 20% de respuestas correctas. Resalta también el hecho de que ningún profesor pudo contestar correctamente todas las preguntas. Estos resultados muestran que sólo un 35% de los profesores contestaron correctamente la mayor parte de las preguntas del cuestionario.



Análisis e interpretación de las entrevistas

En este apartado se muestran algunos de los resultados del análisis realizado a las entrevistas hechas a seis de los profesores que fueron seleccionados previamente. Aparece aquí sólo una pregunta donde se pudo apreciar algunas de las dificultades de los profesores para contestarla.

Pregunta 4.

"En este ejercicio, solamente escribe una fórmula. NO CALCULES el número. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7."

Para contestar esta pregunta se requiere que el profesor traduzca al lenguaje algebraico una oración y sea capaz de simbolizar el número general así como de operar con él. Dicha pregunta ha sido motivo de análisis en otros trabajos (Ursini y Trigueros, 1998; Lozano, 1998). La respuesta incorrecta típica que dan los profesores para esta cuestión es: en donde se observa el uso de dos variables ligadas mediante el signo igual, lo que establece una relación funcional. Resalta el hecho de que este tipo de respuesta se encontró con alumnos de secundaria, de bachillerato y estudiantes universitarios, (ver Lozano, 1998; López, 1996 y Ursini y Trigueros, 1998). Cabe mencionar que 27 profesores dieron esta respuesta lo que coincide con las respuestas dadas por cuatro de los seis profesores que fueron entrevistados. Lo que resalta más en cuanto a las dificultades para contestar esta pregunta es el hecho de que los profesores entrevistados no conciben la expresión $x/5$ como un objeto con el cual se puede operar, de ahí que lo relacionen con otra variable a través del signo igual. Parece ser que la palabra resultado los induce a escribir el signo de igualdad, tal como lo menciona el siguiente profesor que denominaremos S9 (de aquí en adelante se identificará a cada profesor con una S seguida del número que se le asignó a cada profesor desde el inicio del estudio).

6. E: "¿Por qué dice que, necesariamente tiene que hallar un resultado?"

7. S9: "Porque así me lo está expresando. Aquí dice: un número desconocido dividido por 5 y el resultado (*enfatiza*) sumado a 7, es lo que yo entiendo que tengo que encontrar un resultado y le tengo que sumar 7."

Esta tendencia también la podemos observar con otro profesor:

29. E: "Bueno ¿para usted por qué es necesario poner el signo igual, o sea por qué tiene que aparecer?"

S28: "Es quizá la costumbre puesto que aquí tenemos la palabra resultado, suponemos siempre que se trata de algo "igual a", quizás ya es algo...un esquema ¿no?, una reacción automática, al escuchar "resultado" suponemos que se trata ya de una igualdad, de un valor que ya conocemos."

Conclusiones

Los resultados de esta investigación sugieren que los profesores de matemáticas de secundaria no tienen un buen manejo de los tres usos de la variable estudiados. Si bien se observó que son capaces de reconocer el papel de la variable en expresiones y problemas simples, un aumento leve en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la tendencia a buscar soluciones memorizadas o a emplear procedimientos aritméticos. Gran parte de los estudios que se han realizado hasta ahora pusieron de manifiesto las diversas dificultades que tienen los estudiantes cuando trabajan con el álgebra. Lo anterior sugiere que dichas dificultades podrían ser causadas por la escasa comprensión que tiene el profesor de los diferentes aspectos de la variable y que al momento de enseñar los contenidos esta misma incomprensión es transmitida a los alumnos sin que el profesor sea consciente de ello.

Referencias bibliográficas

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. *The Ideas of Algebra, K-12.* NCTM, pp. 20 – 32.

Küchemann D. (1980). The Understanding of Generalized Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children, *PhD Thesis, University of London.*

López A.L. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior*. Tesis de Maestría. UAQ. México.

Lozano D. (1998). El concepto de variable: evolución a lo largo de la instrucción matemática. *Tesis de Licenciatura. ITAM. México.*

Philipp R. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables, Mathematics Teacher 85 *(October): 557 – 61.*

Rosnick P. (1981). Some Misconceptions Concerning the Concept of Variable, *Mathematics Teacher 74* (September): 418 – 20.

Schoenfeld A. H. y Arcavi A. (1988). On the Meaning of Variable, Mathematics Teacher 81 *(September): 420 – 27.*

Stacey K. y MacGregor M. (1996). Origins of Students' Interpretations of Algebraic Notation, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (Eds.), Proceedings of the XX PME Inrenational Conference, *Valencia, España, p. 3 – 297, 3 – 304.*

Trigueros M. y Ursini S. (1999). Does the Understanding of Variable Evolve through schooling?, en Zaslavsky, O. (Ed.), *Proceedings of the XXIII PME International Conference*, Haifa, Israel, p. 4 – 273, 4 – 280.

Trigueros M., Ursini S. y Lozano D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matemática. *México, Grupo Editorial Iberoamérica, 12, 2, ag. pp. 27-48.*

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. Educación Matemática. *México, Grupo Editorial Iberoamérica, 6, 3, dic. pp. 90-108.*

Ursini S. y Trigueros M. (1998). *Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable.* En Hitt, F. (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 445-463.

Usiskin Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. *The Ideas of Algebra, K-12.* NCTM, pp. 8 – 19.

Wagner S. (1981). An Analytical Framework for Mathematical Variables, in *Proceedings of The V PME International Conference,* Grenoble, France, p. 165 – 170.

Wagner S. (1983). What are These Things Called Variables?, Mathematics Teacher 76 *(October): 474 – 79.*

Warren E. (1999). The Concept of a Variable; Gauging Students' Understanding, en Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of the XXIII PME International Conference, *Haifa, Israel, p. 4 – 313, 4 – 320.*