

# La resolución de problemas en la Educación Matemática.

*Silvia Vilanova, María C Rocerau, Guillermo Valdez, María I Oliver, Susana Vecino,  
Perla Medina, Mercedes Astiz, Estella Alvarez*

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.N.M.P. Argentina  
svilano@mdp.edu.ar

## Resumen

En educación matemática, se observa un especial énfasis en la resolución de problemas como método integral de enseñanza. Sin embargo, el término *resolución de problemas* ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente y no siempre los docentes conocen los aspectos que intervienen en el proceso, ni las características de las clases basadas en resolución de problemas. En este trabajo presentamos un proyecto de investigación en curso en el que se analizan algunas concepciones sobre el término “resolución de problemas” y sus consecuencias en la enseñanza, se describen y evalúan algunos de los aspectos que intervienen en el proceso y se presentan los primeros resultados obtenidos hasta el momento sobre una muestra de más de 300 docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo argentino.

## Marco Teórico

### Concepciones sobre la Matemática y la Educación Matemática.

Según señala Hersh (1986), "La concepción sobre la matemática afecta la propia concepción sobre cómo debe ser enseñada. La manera de enseñar es un indicador sobre lo que uno cree que es esencial en ella... El punto entonces es ¿de qué se trata la matemática?". En este sentido, la educación matemática debería proveer a los estudiantes de una concepción y un sentido de la disciplina (alcance, poder, usos, historia...), y de una aproximación al hacer matemático, en el nivel adecuado a sus posibilidades. Desde esta perspectiva, la enseñanza debería ser encarada no sólo como un mero desarrollo de habilidades sino como una comprensión conceptual, que permita a los estudiantes la habilidad de aplicar los contenidos aprendidos con flexibilidad y criterio. Se debería también proveer a los alumnos de la oportunidad de enfrentar un amplio rango de situaciones, que vayan desde los ejercicios hasta los problemas abiertos, para ayudarlos a desarrollar “un punto de vista matemático” (Schoenfeld, 1992), caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de percibir estructuras y relaciones estructurales, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes.

Esta concepción sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, al igual que el término “resolución de problemas” varían ampliamente en su interpretación.

Thompson (1992) señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles en la que saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido.

Una visión alternativa acerca del significado y la naturaleza de la matemática consiste en considerarla como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. La característica que subyace es precisamente su hacer, sus procesos creativos y generativos. De esta concepción surge un enfoque de la enseñanza en la que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, que requieran de un pensamiento creativo que permita conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Esta visión de la educación matemática está en agudo contraste con la anterior en la cual el conocimiento y manejo de conceptos y procedimientos es el objetivo último de la instrucción.

### **Sobre los distintos significados del concepto “problema”**

Existe un acuerdo general en aceptar la idea de que el objetivo primario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan matemática a partir de la resolución de problemas. Sin embargo, dadas las múltiples interpretaciones del término, este objetivo difícilmente es claro. En efecto, el término *resolución de problemas* ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente.

Según Stanic y Kilpatrick (1988), “los problemas han ocupado un lugar central en el currículum matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas, no. Sólo recientemente los que enseñan Matemática han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial. Junto con este énfasis en la resolución de problemas, sobrevino la confusión. El término “resolución de problemas” se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular.”

Una de los significados asignados al término “problema” es el que los considera *como contexto*, es decir, como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares (como una justificación para enseñar matemática, para proveer especial motivación a ciertos temas, como actividad recreativa, como medio para desarrollar nuevas habilidades o como práctica de técnicas ya adquiridas).

Otro de los posibles significados del término es concebir la resolución de problemas *como una habilidad*. Es decir, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios, habilidad que a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas. Es importante señalar que, aún cuando los problemas son vistos como una habilidad en sí misma, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen son las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que estas técnicas puedan ser dominadas.

Por último, hay un punto de vista particularmente matemático: resolver problemas es *hacer matemática*. Polya es el matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática. Su concepción de la matemática como actividad se pone de manifiesto en la

siguiente cita: “Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados (...). Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.” (Polya, 1954). Desde este significado, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y los estudiantes tienen que adquirir el sentido de esta disciplina como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha.

### **Aspectos que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos y antecedentes de investigación.**

Hasta el momento, a pesar de no haber un marco explicativo completo sobre cómo se interrelacionan los variados aspectos del pensamiento matemático, parece haber un acuerdo general en considerar la presencia de cinco de ellos en el proceso de resolución de problemas: el *conocimiento de base*, las *estrategias*, la *metacognición*, la *comunidad de práctica* y los *factores afectivos* y el *sistema de creencias* (Schoenfeld, 1992).

El *conocimiento de base*, también llamado recursos matemáticos, se refiere a las herramientas matemáticas que tiene a su disposición la persona que resuelve un problema, es decir, qué información relevante para la situación matemática o problema tiene a mano, cómo accede a esa información y cómo la utiliza.

Los aspectos del conocimiento que llamamos de base, relevantes para la resolución de problemas, incluyen: conocimiento intuitivo e informal sobre el dominio del problema, hechos, definiciones y procedimientos algorítmicos, procedimientos rutinarios, competencias y conocimiento acerca de las reglas del lenguaje en ese dominio (Schoenfeld, 1985). Los hallazgos en la investigación señalan la importancia y la influencia de este tipo de conocimientos, que son el vocabulario y las bases para el rendimiento en situaciones rutinarias y no rutinarias de resolución de problemas. Sin embargo, este conocimiento también puede contener información incorrecta; los estudiantes arrastran sus concepciones previas o sus limitaciones conceptuales a la resolución de problemas y esas son las herramientas con las que cuentan.

Las discusiones sobre *las estrategias (o heurísticas)* en matemática, comienzan con Polya en su libro “Cómo Plantear y resolver Problemas” (1954) quien amplía su tratamiento en *Mathematical Discovery* (1981). Sin embargo, mientras su nombre es frecuentemente invocado, sus ideas son habitualmente trivializadas; poco de lo que se hace en el nombre de Polya, conserva el espíritu de sus ideas (Schoenfeld, 1992). Sobre este aspecto de la resolución de problemas es sobre el que más matemáticos han trabajado y más se ha escrito, observándose distintas posturas, desde considerar que las heurísticas deben ser enseñadas y luego utilizadas por el alumno, hasta considerar que deben ser exploradas y descubiertas por cada persona.

*La metacognición*, se relaciona con el monitoreo y el control del progreso de las actividades intelectuales. Hallazgos de investigación en educación matemática señalan que el desarrollo

de la autorregulación en temas complejos es difícil y frecuentemente implica modificaciones de conducta, que pueden producirse pero requieren largos períodos de tiempo. Los aspectos metacognitivos se relacionan, en suma, con la manera en que se seleccionan y despliegan los recursos matemáticos y las heurísticas de que se dispone.

*Los factores afectivos y las creencias*, concebidas como la concepción individual y los sentimientos que modelan las formas en que el individuo conceptualiza y actúa en relación con la matemática, comenzaron a ocupar el centro de la escena en la investigación en educación matemática, a partir de la última década. Sobre esta cuestión, Lampert (1992) señala: “ Comúnmente, la matemática es asociada con la certeza; saber matemática y ser capaz de obtener la respuesta correcta rápidamente van juntas. Estos presupuestos culturales, son modelados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa seguir las reglas propuestas por el docente y recordar y aplicar la regla correcta cuando el docente hace una pregunta o propone una tarea. La “verdad” matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente. Las creencias sobre cómo hacer matemática y sobre lo que significa saber matemática en la escuela son adquiridas a través de años de mirar, escuchar y practicar.”

Las creencias pueden ser consideradas la zona oscura o de transición entre los aspectos cognitivos y afectivos. Thompson (1992), reseñó los estudios que documentan cómo los docentes difieren ampliamente en sus creencias sobre la naturaleza y el sentido de la matemática, así como en su visión sobre cuáles son los objetivos más importantes de los programas escolares de matemática, el rol de los docentes y los estudiantes en las clases de matemática, los materiales de aprendizaje más apropiados, los procedimientos de evaluación, etc. Estas investigaciones también han mostrado que existen relaciones entre las creencias y concepciones de los docentes de matemática y sus visiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática y su propia práctica docente. Thompson encontró grandes diferencias en la visión de docentes sobre la naturaleza y el significado de la matemática, que inciden en la práctica de la enseñanza que realizan.

En suma, concientes o no, las creencias modelan el comportamiento matemático y son abstraídas de las experiencias personales y de la cultura a la que uno pertenece. Esto conduce a la consideración de la *comunidad de práctica de la matemática*, como el último, pero no por eso el menos importante, de los aspectos a considerar.

Un gran cuerpo de literatura emergente en los últimos años, considera al aprendizaje matemático como una actividad inherentemente social (tanto como cognitiva), y como una actividad esencialmente constructiva, en lugar de receptiva. La idea principal, es que la comunidad a la que uno pertenece modela el desarrollo del punto de vista de sus miembros. Es decir, el aprendizaje es culturalmente modelado y definido: las personas desarrollan su comprensión sobre cualquier actividad a partir de su participación en lo que se ha dado en llamar la “comunidad de práctica”, dentro de la cual esa actividad es realizada. Las lecciones que los alumnos aprenden acerca de la matemática en el aula son principalmente culturales y se extienden más allá del espectro de conceptos y procedimientos matemáticos que se enseñan: lo que se piensa que la matemática es, determinará los entornos matemáticos que se crearán y la clase de comprensión matemática que se desarrollará.

En síntesis, se puede afirmar que cada uno de los aspectos analizados hasta aquí que intervienen en la resolución de problemas, es en sí mismo coherente y dentro de ellos la

investigación ha producido interesantes ideas sobre los mecanismos principales. Pero todavía se comprende poco acerca de las *interacciones* entre estos aspectos y menos acerca de cómo confluyen todos en dar a un individuo su particular sentido de la actividad matemática, su “punto de vista matemático”.

Es necesaria una nueva aproximación a los factores afectivos, que considere a los alumnos como individuos con un sistema de creencias o visión del mundo particular. Comprender esa visión del mundo en toda su complejidad es una tarea difícil; las reacciones afectivas hacia la matemática ocurren dentro de una estructura relacionada con cómo se concibe al mundo en general. Es necesario conectarse entonces con las diferencias individuales y culturales en sus respuestas hacia la matemática

En suma, gran parte de lo investigado en resolución de problemas matemáticos se ha centrado en los procesos de pensamiento usados por los individuos mientras resuelven problemas. Sin embargo, queda pendiente el centrarse en los grupos y los ambientes de clase, indagando los procesos de enseñar y aprender matemática.

A partir de esta situación y desde el enfoque de la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, se propone este proyecto, como continuación de la línea de investigación que vienen desarrollando los integrantes del equipo de trabajo desde el año 1993.

### **Problema de investigación:**

¿Cómo interactúan recursos, estrategias y creencias de docentes y alumnos en la resolución de problemas matemáticos en el aula?

### **Objetivos de la Investigación.**

1. Determinar la incidencia de las concepciones y creencias de docentes y alumnos de distintos niveles de enseñanza sobre la matemática en general y la resolución de problemas en particular.
2. Evaluar si la adquisición de estrategias y conceptos para la resolución de problemas matemáticos se ve favorecida por la utilización de recursos no convencionales como las herramientas informáticas.
3. Analizar la concepción sobre resolución de problemas subyacente en la secuenciación y organización de actividades de los libros de texto de matemática más usados en la escuela.
4. Describir y comparar la utilización de estrategias y recursos en la resolución de problemas matemáticos en docentes y alumnos de distintos niveles de enseñanza.

### **Metodología y plan de trabajo**

#### **Tipo de investigación**

Este proyecto se aborda como una investigación de tipo descriptivo-correlacional, porque se describen y evalúan diversos aspectos o dimensiones que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos y se determina el grado de relación que existe entre variables.

Sobre esta base, el proyecto se organiza a través de cuatro ejes temáticos relacionados con distintos aspectos vinculados a la resolución de problemas:

Eje 1: Concepciones y creencias de docentes y alumnos sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje a través de la resolución de problemas.

Eje 2: Efectos de la utilización del recurso informático en la adquisición y transferencia de estrategias y conceptos en la resolución de problemas.

Eje 3: Concepción subyacente sobre resolución de problemas que aparece en los libros de texto más usados por docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo a partir de la reforma educativa.

Eje 4: Inventario de recursos y estrategias para la resolución de problemas matemáticos de docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo.

Estos ejes son desarrollados de manera relacionada entre sí, pero con la necesaria adecuación de metodologías e instrumentos en función de los objetivos que persigue cada uno.

Los temas que aborda cada Eje, fueron determinados en parte por los resultados obtenidos anteriormente por el equipo de trabajo y en parte por las preguntas aún abiertas en el campo de la investigación.

### **Consideraciones finales en base a los resultados obtenidos hasta el momento.**

Los resultados obtenidos, se relacionan principalmente con los siguientes temas:

a) Con respecto al *diagnóstico de recursos y estrategias para la resolución de problemas en docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo*, se realizaron hasta ahora tres tipos de actividades:

\* Talleres y encuentros de resolución de problemas con docentes de matemática de distintos ciclos y niveles. Estos talleres tuvieron una doble finalidad: a) realizar un diagnóstico de las estrategias y recursos matemáticos y b) intervenir en la modificación de la concepción sobre resolución de problemas observada.

\* Análisis de la capacidad predictiva de la resolución de problemas matemáticos en el rendimiento académico posterior de alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, a partir de la administración de una prueba de Matemática cuya aprobación era requisito para ingresar. A través de un análisis estadístico se determinó la correlación existente entre el rendimiento académico posterior de los alumnos (independientemente de la carrera elegida) y la posesión, al momento del ingreso, de estrategias y recursos matemáticos adecuados.

\* Administración de pruebas de resolución de problemas para evaluar las heurísticas para la resolución de problemas matemáticos que poseen los alumnos de distintos niveles del sistema educativo: E.G.B. 3, Polimodal y Universitario (profesorado en Matemática).

b) Con respecto al *efecto de la utilización de recursos informáticos en el desarrollo y transferencia de estrategias para la resolución de problemas*, se trabajó con una muestra de 145 docentes de E.G.B. 3 se indagó la influencia de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática atendiendo a las recomendaciones de distintos organismos relacionados

con la educación, el conocimiento sobre las posibilidades que ofrecen estas herramientas, las diferentes formas de incluirlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y el cambio de rol del docente ante la incorporación de las mismas en el aula.

Los datos reflejaron que la mayoría de ellos no conoce software para la enseñanza de la matemática. Por otra parte, aquellos que sí conocen, en su mayoría afirman no saber utilizarlos o no disponer del laboratorio de computación para su uso. Por último, quienes lo utilizan lo hacen en algún tópico puntual, no aprovechando toda su potencialidad y sólo en clases aisladas. Estos docentes también expresaron como objetivo principal del uso del software reforzar y fijar temas ya vistos con ejercitación adecuada al software seleccionado.

*c) Concepciones y creencias de los docentes sobre la matemática en general y la resolución de problemas en particular.*

Algunos de los resultados obtenidos muestran que los docentes que se desempeñan en el último ciclo de la Educación General Básica (E.G.B. 3) tienen distintas concepciones sobre la Matemática como ciencia y sobre lo que es un problema matemático, de las que se desprenden variadas consecuencias en la enseñanza. Así mismo, muchos de estos docentes (especialmente maestros y profesionales con título no específico en matemática), desconocen estrategias y recursos necesarios para enseñar a través la resolución de problemas.

A partir de los cuestionarios, entrevistas y observaciones realizadas, se ha observado que predominan en los docentes (150 docentes de E.G.B.3) dos concepciones distintas sobre la actividad matemática:

\* Una parte (minoritaria), pone el énfasis en la resolución de problemas, definiendo la matemática como una clase de actividad mental, una construcción que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, acorde a lo que Skemp denomina *matemática relacional*.

\* El resto de los docentes tiene una visión *instrumental*, en la que “saber matemática” es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina con el fin de resolver problemas cotidianos o simplemente “aprender más matemática”. Tal concepción de la matemática conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido y que implícitamente se ve reflejada, por un lado, en la manera en que orientan y evalúan a sus alumnos y por otro, en la forma en que ellos mismos encaran la resolución de los problemas planteados en el cuestionario.

## Referencias bibliográficas

- Hersh, R. (1986). *Some proposals for revising the philosophy of mathematics*. In T. Tymoczko(Ed) *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhauser.
- Lampert, M. (1992). *Handbook for Research on Mathematics\_ In Schoenfed, A.:* Learning to think mathematically, Teaching and Learning. D.Grows, Ed. New York:Mac Millan.
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving. Combined Edition*. New York: Wiley & Sons, Inc.
- Polya, G. (1954). *How to solve it*, Princeton:Princeton University Press.
- Resnik, L. & Collins, A. (1996). *Cognición y Aprendizaje*. En Anuario de Psicología. (69) pp 189-197. Barcelona: Grafiques 92, S.A.
- Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics*. In *Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Schoenfeld, A.(1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: A.Press.
- Schoenfeld, A.(1989). *Explorations of student's mathematical beliefs and behavior*. In *Journal for Research in Mathematics Education*. 20 (4), pp 338-355. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stanic, G. & Kilpatrick, J.(1989). *Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum*. In R. Charles&Silver (Eds.) *The teaching and assesing of mathematical problem solving*, pp.1-22 Reston, VA: N.C.T.M.
- Thompson, A.(1985). *Teacher's conceptions of mathematics and the teaching of problem solving*. In E.A. Silver, *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, pp 281-294. Hillsdale, NJ:Erlbaum