

Sobre la formulación de problemas matemáticos

Miguel Cruz Ramírez, Salvador Álvarez Reyes y Leonardo Torno Hidalgo

Instituto Superior Pedagógico “José de la Luz y Caballero”, CUBA

mrcruz@isp.holguin.inf.cu

Resumen

En el presente trabajo se propone una nueva estrategia para la formulación de problemas matemáticos, a partir de una idea desarrollada por Brown y Walter (1990). Esta estrategia tiene una estructura no lineal y consta de seis acciones, en las cuales se concatena un subsistema de operaciones constitutivas. El aprendizaje de esta estrategia, sobre la base de un sistema de técnicas aisladas por otros autores (véase Kilpatrick, 1987), ha sido experimentado en la formación del profesor de Matemática del Instituto superior Pedagógico “José de la Luz y Caballero”. Para ello se ha propuesto una metodología para caracterizar el proceso de formulación, y se han elaborado nuevos instrumentos como el que resulta de extender los «episodios gráficos» de Schönfeld al conjunto de acciones propuestas. Los resultados obtenidos constataron que la implementación de dicha estrategia favorece el proceso de formulación de problemas. También se corroboró la existencia de una estrecha interrelación entre los procesos de formulación y resolución de problemas, lo cual ha sido advertido por varios autores (Brown y Walter, 1993; Silver, 1994 y 1996; English, 1998).

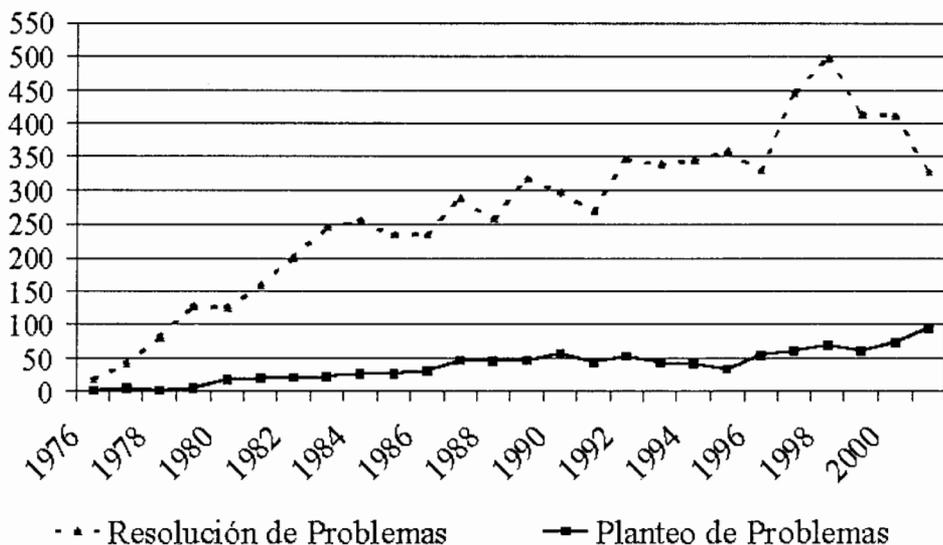
Antecedentes

Figuras prominentes de la Matemática Educativa, como Pòlya, Freudenthal y Kilpatrick han señalado que el hallazgo de nuevos problemas no sólo es una etapa cualitativamente superior de los procesos de resolución de problemas, sino también un vehículo eficaz para potenciar el aprendizaje de la Matemática. Es por ello que el *National Council of Teachers of Mathematics* en sus *Estándares Curriculares* plantea «[...] una meta mayor de la Matemática de la escuela media consiste en equipar los estudiantes con conocimientos y herramientas que les permitan formular, abordar y resolver problemas más allá de aquellos que han estudiado [...]. Ellos deben tener oportunidades para formular y refinar problemas, pues los que ocurren en el ambiente real no llegan puramente diseñados. Los estudiantes necesitan experiencia para identificar problemas y articularlos claramente, lo suficiente como para determinar cuando ellos han arribado a soluciones» (NCTM, 2000, p. 335). Algo similar se plantea en las actuales transformaciones del enfoque metodológico de la matemática educativa cubana, pues se aboga por «[l]a presentación y tratamiento de los nuevos contenidos *a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos*, de carácter político-ideológico, económico-laboral y científico-ambiental, y no solo desde la propia lógica de la asignatura» (Ministerio de Educación, 2001, p. 1: las itálicas en el original).

Por otra parte, aunque en el diseño de diversos currículos se promulga la necesidad de que los estudiantes planteen nuevos problemas, el sustento teórico que hoy existe es bastante efímero. Por ejemplo, en la base de datos MATH-DI¹, entre los años 1976 y el 2000, de 90812 resúmenes de investigación registrados sólo 990 contienen el referente

¹Correspondiente a la revista ZDM (*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, <http://www.emis.de/MATH/DI/searcha.htm>).

«problem-posing» (0.01 %). En el gráfico siguiente se ilustra la cantidad de artículos registrados en dicha base de datos, relacionados con el planteo y solución de problemas. El análisis estadístico arroja una correlación logarítmica significativa ($r = 0.91$), lo que confirma la aseveración de muchos investigadores sobre el estrecho vínculo que enlaza estos campos de investigación.



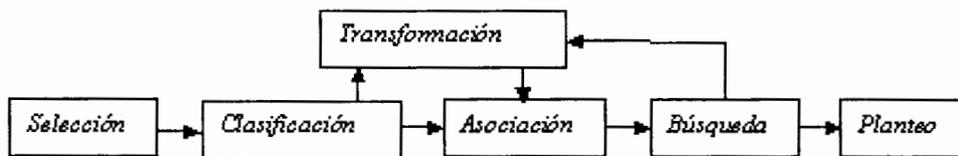
A pesar de su importancia, la formulación de problemas no ha recibido la atención requerida, como parte del currículo matemático, ni tampoco las investigaciones relacionadas con esta temática han sido lo suficientemente sistemáticas. En el presente trabajo se propone una estrategia que le facilita al maestro la formulación de problemas para su quehacer pedagógico.

Desarrollo

Una exploración objetiva del proceso de formulación de problemas exige esclarecer tanto su forma como su contenido. Tal esclarecimiento es posible si se conceptúa el acto de formulación como problema en sí mismo. En efecto, según Silver (1995, p. 69) se trata de un problema de tipo abierto, pues se parte de una situación inicial, que puede ser o no precisa; del conocimiento de la meta a alcanzar, la cual es esencialmente imprecisa; así como de la certidumbre de que el proceso de obtención del nuevo problema es desconocido a priori.

Sobre la base de las ideas de la escuela histórico-cultural, Campistrous y Rizo han conceptualizado las estrategias de resolución de problemas. Para ellos una estrategia de resolución de problemas es “un procedimiento generalizado constituido por esquemas de acciones cuyo contenido no es específico, sino general, aplicable en situaciones de diferente contenido, que el sujeto utiliza para orientarse en situaciones en las que no tiene un procedimiento ‘ad hoc’ y sobre la base de las cuales decide y controla el curso de la acción de búsqueda de la solución” (2000, p. 8). Particularmente, a partir de una idea desarrollada por Brown y Walter (1990), nosotros proponemos una estrategia que facilita la formulación de nuevos problemas, así como la implementación de otras estrategias más simples y específicas

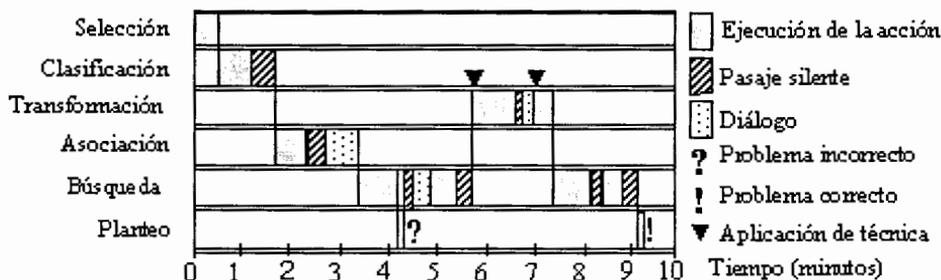
denominadas técnicas. Entre estas técnicas podemos encontrar la generalización-limitación, la utilización de analogías, considerar variables algunos elementos del problema, etcétera (véase Cruz, 2002). A diferencia de los “niveles” propuestos por Brown y Walter, los cuales permiten implementar su técnica “What-if-not”, nosotros proponemos una estrategia no lineal compuesta de seis acciones básicas. En esta estrategia no sólo se incluyen los “niveles” de estos autores, sino que se contempla también la puesta en práctica de otras estrategias de naturaleza distinta.



La **selección del objeto** es la primera acción. Su ocurrencia está condicionada por necesidades de carácter pedagógico como evaluar, motivar, ejemplificar, etcétera; así que responde a un objetivo consciente. El sujeto analiza qué clases de objetos matemáticos resultan apropiados, comparándolos con el fin de escoger aquellos que le brinden mayores posibilidades. En esta primera etapa influye mucho la esfera afectiva, por cuanto la toma de decisiones está condicionada frecuentemente por los gustos e intereses del sujeto. Una vez que se ha elegido el objeto ocurre la **clasificación de componentes**. En esta acción se procede a desmembrar el objeto en sus partes constitutivas (análisis), y la información obtenida se organiza y compara atendiendo a ciertos criterios. Paralelamente, subsiste una respectiva integración de los componentes (síntesis), de manera que pueden conformar ellos mismos otros componentes más complejos del objeto. Como ejemplo puede tomarse una figura plana, la cual está compuesta por segmentos, y a la vez ciertos tríos conforman triángulos que también son partes integrantes de la figura. La acción subsiguiente consiste en la **transformación del objeto**, que puede ser total, parcial o idéntica. Estos cambios pueden ocurrir tras la generalización de ciertos elementos emergentes durante la clasificación. Tal operación lógica es muy compleja y puede tener una naturaleza sintética o analítica. En esencia, la generalización facilita el paso de un concepto específico a otro genérico, al quitar de su contenido aquellos indicios que lo especifican (disminuye el contenido y aumenta el volumen del concepto). También es posible transformar el objeto empleando analogías; en este caso se trata de un razonamiento sobre la pertenencia a cierto objeto de un determinado indicio (propiedad o relación), tomando como base la homología de indicios sustanciales con otro objeto. Según el carácter de la información trasladada del modelo al prototipo, la analogía puede ser de propiedades o de relaciones. Habiendo transformado o no el objeto, la acción subsiguiente comprende la **asociación de conceptos**, de manera que los elementos resultantes de la clasificación son separados por abstracción y luego relacionados con un conjunto de conceptos matemáticos, los cuales pueden ser de propiedades (área, perímetro, monotonía,...) o relacionales (semejanza, paralelismo, congruencia,...). Nuevamente es necesaria la toma de decisiones, pues el sujeto debe elegir un subconjunto de tales conceptos asociados. En estos momentos pueden emerger varias interrogantes de manera natural, sin embargo es posible que muchas no tengan sentido. Es por eso que consideramos una penúltima etapa, relacionada con la **búsqueda de dependencias**, donde se analizan las relaciones existentes entre las propiedades que han sido asociadas. Finalmente se sintetiza toda la información, y las interrogantes inmanentes son valoradas a fin de seleccionar una

(o varias) de ellas. Con esta toma de decisión culmina el **planteo de la pregunta**, teniendo lugar entonces la etapa subsiguiente del metaproblema.

En la etapa de formulación es posible el análisis de las estrategias desarrolladas, una manera de hacerlo consiste en aplicar los conocidos diagramas de Schönfeld (1985) o «episodios gráficos». En este caso hemos realizado una adaptación, en la cual tomamos el producto cartesiano entre las acciones demarcadas en el esquema anterior y el tiempo transcurrido². Partiendo de una situación vinculada a un objeto o fenómeno, orientamos al estudiante que formule un problema asociado,



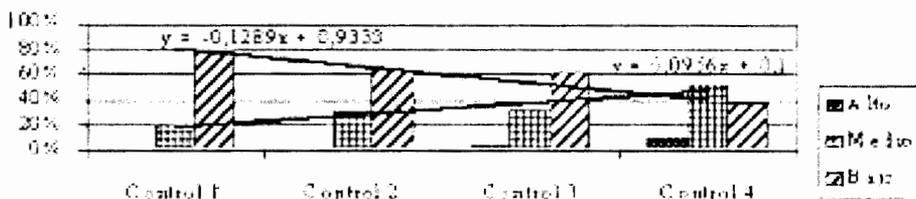
destacando la posibilidad que tiene de efectuar transformaciones. La actividad será grabada, lo cual favorece la mayor exactitud en el análisis ulterior; y en todo momento debe crearse un clima agradable, donde el alumno exprese verbalmente sus ideas. El experimentador tomará nota de sus observaciones, lo cual se complementa con la información escrita y la grabación; también podrá interaccionar con el estudiante siempre que lo considere necesario.

Estos diagramas nos permitirán comprender mejor la logicidad de las estrategias, así como las dificultades que experimentan los estudiantes durante su ejecución. Por ejemplo, la figura anterior ilustra el caso de un estudiante que no encontró grandes obstáculos en el transcurso de las dos primeras etapas, sin embargo durante la asociación comenzó a experimentar ligeras dificultades con la toma de decisiones. Al interaccionar con él fue posible que pasara a buscar relaciones convenientes, pero una síntesis inadecuada de la información lo condujo a plantear una pregunta que no tenía sentido. Después de unos segundos fue posible observar la ausencia de un examen retrospectivo, lo cual fue constatado con un nuevo diálogo. Al continuar la búsqueda y no encontrar relaciones decidió, por sí mismo, transformar el objeto dado, mostrando habilidades al respecto ya que la nueva búsqueda lo condujo al planteo de un problema después de unos dos minutos. Particularmente, el tiempo total se corresponde con la sencillez del objeto propuesto y las relaciones analizadas. La simplicidad se acentuó aún más con la transformación que tuvo lugar, la cual fue originada por la doble aplicación de la técnica lógica de limitación. Estos diagramas son una evidencia de que la estrategia propuesta no está constreñida a un orden rígido de sus acciones. La forma en que esta transcurre varía de un sujeto a otro, inclusive un mismo individuo puede obrar de manera diferentes en dependencia de la situación dada. Además, a pesar de que la selección de las técnicas pone de relieve ciertos cambios de contenido, esto no es óbice para seguir considerando

² Schönfeld lo hace considerando el modelo de Pólya enriquecido y el tiempo.

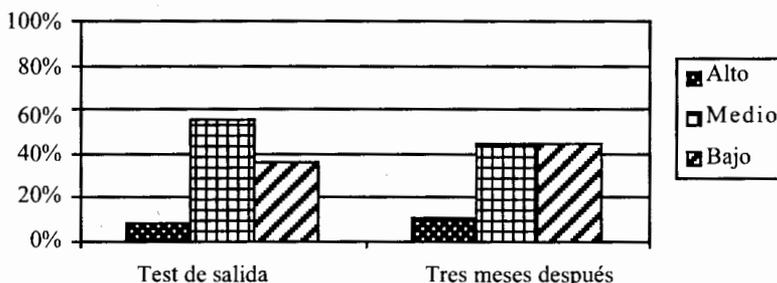
la estrategia como tal, pues tales cambios no alteran el conjunto de las acciones. Es necesario señalar que aún prescindiendo de la grabación, es posible recopilar información valiosa. En este caso, el instrumento coincide simplemente con la conocida técnica de «pensar en voz alta».

Junto a esta estrategia también hemos desarrollado las técnicas, a partir de sistematizarlas en una tipología tricotómica (algorítmicas, lógicas y heurísticas). Por su parte, a fin de materializar la implementación de la estrategia en la formación del profesor de Matemática, hemos conceptualizado un ambiente de aprendizaje que facilita la enseñanza de esta y sus respectivas técnicas en la Carrera de Magisterio. Así, la realización de un experimento nos ha podido mostrar las ventajas y deficiencias de la estrategia metacognitiva. Para ello también elaboramos una metodología que nos permite caracterizar el proceso de formulación de manera cualitativa, partiendo de tres indicadores sustantivos: la metacognición, la estrategia y el problema formulado. A continuación se ilustra los resultados obtenidos después del experimento.



Como puede observarse, subsisten mejorías discretas. Esto era esperado pues se experimentó con un grupo de estudiantes noveles (primer año). El análisis de los rangos medios mostró un elevado nivel de significación, de acuerdo al test de Friedman ($\chi^2_p(3) = 45,3; p < 0,001$). Es más, de 36 estudiantes cuyo proceso fue caracterizado como bajo en el control inicial, 19 pasaron al nivel medio (52,8%); mientras que de 9 en el nivel medio, 5 pasaron al alto (55,6%). En ningún caso se observó involuación lo cual, junto a la observación anterior, constituye una muestra de desarrollo uniforme.

Una vez concluido el período de experimentación, se procedió a la aplicación de un test post hoc tres meses después. El objetivo consistía en determinar el nivel de fijación de la estrategia aprendida. Los resultados se muestran a continuación.



Como puede observarse, existen diferencias entre el control final y el post hoc; no obstante, el test de Wilcoxon para el análisis de los rangos de signos muestra que este cambio no fue significativo ($Z_p = -0,816$; $p = 0,414 > 0,05$). Asimismo tampoco se observó cambios significativos en ninguno de los indicadores, especialmente en el problema ($Z_p = -0,333$; $p = 0,739 \gg 0,05$). Esto permite concluir que el aprendizaje fue sólido, pero advierte la necesidad de dar continuidad al desarrollo del proceso.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos en esta investigación con los de otras afines, se procedió a calcular la correlación no paramétrica entre el proceso de resolución (al inicio del experimento) y el de formulación. La aplicación del test de Spearman reveló que, en la medida en que el proceso de formulación se iba favoreciendo, la correlación con el proceso de resolución tendía a crecer en cada control ($r_s = 0,628$; $0,654$; $0,635$ y $0,734$). Esto reafirma una tesis defendida por muchos autores, referida a la estrecha interrelación que enlaza ambos procesos.

Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto una nueva estrategia, la cual le facilita al maestro de Matemática la formulación de problemas para su quehacer pedagógico. Esta estrategia está conformada por un sistema de acciones y estas, a su vez, se componen de un conjunto de operaciones básicas. A fin de constatar el valor práctico de esta propuesta, se ha experimentado su enseñanza en la formación de este profesional. Los resultados revelan que el aprendizaje de la estrategia, sobre la base de un grupo de técnicas específicas, favorece el proceso de formulación de problemas.

Es necesario destacar que el desarrollo de esta investigación ha develado una multiplicidad de problemas abiertos, como la necesidad de controlar las variables “proceso de formulación” y “proceso de resolución”, de manera que se esclarezca mejor su interdependencia. También es necesario profundizar en la forma en que la estrategia tiene lugar. Si bien se muestra un ejemplo, no fue posible extender el instrumento a la realización de los controles del experimento (como ocurre a menudo, este es un fruto a posteriori de la investigación). De esta manera se podría analizar la frecuencia de cambio entre las acciones, el tiempo promedio de estas, la ubicación de las técnicas dentro de la estrategia, etcétera. Sin embargo, tal vez el más interesante de los problemas abiertos consiste en traer a colación la implementación de esta estrategia en la formulación de problemas no matemáticos, como lo son los problemas físicos, químicos, biológicos, geográficos, etcétera. Esto abre un fascinante campo de investigación para un futuro inmediato.

Referencias bibliográficas

- Brown, S. & Walter, M. (1990). *The art of problem posing* (2nd ed.). Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.
- Brown, S. & Walter, M. (1993, Eds.). *Problem posing: reflections and applications*. Erlbaum, Hillsdale, New Jersey.
- Campistrous, L. & Rizo, C. (2000). *Tecnología, resolución de problemas y didáctica de la Matemática*. ICCP, Ministerio de Educación, La Habana
- Cruz, M. (1999). *Sobre el planteo de problemas matemáticos*. Órbita, ISP “Enrique José Varona”, La Habana.
- Cruz, M. (2001). *Estrategias para la elaboración de ejercicios del análisis diofántico*. Biblioteca Virtual de los ISP, MINED, La Habana.
- Cruz, M. & Álvarez, S. (2002). *La formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática*. Memorias del II Taller Internacional “Didáctica de las Ciencias”, OEI-MINED, La Habana.
- Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática*. Tesis Doctoral (no defendida), ISP “José de la Luz y Caballero”, Holguín.
- English, L. (1997). *Promoting a problem-posing classroom*. *Teaching Children Mathematics*, 4 (3), 172–179.
- English, L. (1998). *Children’s problem posing within formal and informal context*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1), 83–107.
- Kilpatrick, J. (1987a). *Is teaching teachable? George Pólya’s view on the training of mathematics teacher*. In F. R. Curcio (Ed.): *Teaching and learning: A problem-solving focus* (pp. 85–97). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, V. A.
- Kilpatrick, J. (1987b). *Problem formulating: where do good problems come from?* In A. H. Schönfeld (Ed.): *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Erlbaum, Hillsdale.
- Ministerio de Educación (2001). *Programas de Matemática para las Secundarias Seleccionadas*, Pueblo y Educación, La Habana.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. URL: <http://standards.nctm.org/protoFINAL>
- Silver, E. (1994). *On mathematical problem posing*. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 19–28.
- Silver, E. (1995). *The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives*. *ZDM*, 2, 67–72.
- Silver, E. (1996). *Posing mathematical problems: an exploratory study*. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27 (3), 293–309.
- Schönfeld, A. (1985). *Mathematical problem-solving*. Academic Press, New York.