

Modelación didáctica de la representación y su formación en el proceso de resolución de problemas matemáticos

Isabel Alonso Berenguer

Universidad de Oriente. Cuba

ialonso@csd.uo.edu.cu

Resumen

En el trabajo se propone un modelo didáctico de la representación del problema matemático y su formación en el proceso de resolución, que presenta como novedad científica, la concepción y fundamentación del representar como una habilidad, con una estructuración donde se integran las operaciones externas e internas, como dos fases cuyo resultado tributa a la excelencia de la representación. También se devela la representación como una dimensión dinamizadora del proceso de resolución de problemas matemáticos.

La representación de un problema matemático

Un referente importante, que a los propósitos de la modelación teórica se tiene en cuenta, lo propicia la Didáctica de la Matemática cuando postula que mediante el trabajo con las representaciones los estudiantes asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, sin lo cual no es posible la resolución de problemas. También constituye un referente, la Psicología Cognitiva Contemporánea y dentro de ella, dos de sus direcciones fundamentales: la Escuela Histórico Cultural con su tesis sobre el origen histórico social de las funciones psíquicas superiores y el Enfoque del Procesamiento de la Información, basado en la semejanza entre los programas computacionales y los procesos cognitivos.

De acuerdo con la Escuela Histórico Cultural, las funciones psicológicas superiores tienen una estructura mediatizada y para comprenderlas es necesario estudiar los instrumentos que actúan como mediadores. En el contexto de la Matemática estos instrumentos mediadores adquieren importancia esencial, al no ser los objetos matemáticos directamente accesibles a la percepción, sino, por el contrario, construcciones de la mente que requieren de su representación.

El Enfoque del Procesamiento de la Información estudia la cognición humana en términos de los procesos por medio de los cuales las entradas sensoriales son transformadas, reducidas, elaboradas, almacenadas, recuperadas y usadas. El hecho de que se haya postulado la existencia de representaciones mentales brinda un basamento teórico de gran importancia para introducir, en esta investigación, la modelación didáctica de la representación interna, poco trabajada en la didáctica de la Matemática, en su necesaria interrelación con la representación externa, para la resolución de problemas matemáticos.

A partir de este paradigma del procesamiento de la información, se asume que el resolutor se forma una organización interna de la información que le brinda el problema, la que va reelaborando en función de los intercambios con el exterior y, sobre la base de esta organización interna (esquemas, reglas, etc.), interpreta, resignifica y configura en forma dinámica el problema. Así, la representación de un problema puede verse como el procesamiento de la información que éste brinda, regulado por la BCE del resolutor.

Para profundizar en cómo el estudiante se representa y resuelve un problema matemático surge la necesidad de una nueva definición de problema, que explicita el tipo de información que brinda éste y su estructura. De aquí que se defina un problema matemático como una situación matemática que contempla tres elementos objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: *condiciones y exigencias relativas a esos elementos*; y *que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias*.

Una vez definido el problema matemático, es necesario pasar al estudio de la representación del mismo. Para ello pueden encontrarse conceptos generales de representación, representación interna y representación externa, los cuales no se ajustan a los requerimientos de esta investigación, siendo necesario dar una definición de representación de un problema matemático, es decir: *abstracciones de los objetos, características y relaciones que intervienen en el problema que se está resolviendo, las cuales son formadas e integradas sobre la base de los conocimientos y experiencias adquiridos previamente, reflejadas en forma de imágenes y conceptos y manifestadas a través de la expresión oral, símbolos escritos, dibujos o tablas*.

Poder desarrollar el proceso de representación de un problema implica una habilidad, que como tal se puede formar en los estudiantes. Sin embargo el *representar* como habilidad no ha sido tratada por los didactas, no habiéndose develado su estructura operacional, de ahí que no exista un instrumento que oriente a los docentes sobre la forma en que debe realizarse dicha formación y en esa dirección se dirige esta investigación. A continuación se explican las operaciones que conforman la habilidad en cuestión.

La formación de una representación de un problema matemático requiere que el resolutor descomponga mentalmente el problema en sus partes e identifique los elementos que intervienen en el mismo. Para ello requerirá de la comparación de esos elementos del problema con conceptos disponibles en su base de conocimientos y experiencias (BCE), de manera que los mismos adquieran un significado objetivo. Así, en el momento de la identificación necesitará adicionar información, resultado de esa comparación, necesaria para hacer inferencias adecuadas. Adicionar información es "vestir" al problema con elementos que no posee, que tiene el resolutor guardados en su BCE.

Una vez identificados los elementos involucrados, se requerirá de su comparación y del establecimiento de nexos entre ellos y con respecto a las componentes del problema, de manera que se puedan seleccionar los aspectos relevantes, en dependencia de las exigencias y condiciones del problema. Esta identificación y selección de los elementos relevantes, su posterior abstracción del análisis de las partes y su integración, dan lugar a una síntesis y conclusión, al nivel superior, en el conocimiento del problema.

El proceso de abstracción - generalización desarrollado hasta aquí, se logra a través de un proceso de análisis y síntesis por medio del cual se lleva a cabo el aislamiento de unos aspectos de otros, el establecimiento de relaciones entre ellos y la selección de los esenciales o relevantes. A partir de la integración de los elementos considerados esenciales, se alcanza una síntesis como resultado de la integración de los mismos en función de las condiciones y exigencias del problema, lo que constituye una primera representación del problema y un peldaño superior en su comprensión.

A través de todo este proceso se establece un canal de comunicación entre la BCE del resolutor y los elementos del problema, mediados por las condiciones y exigencias del mismo. Esto permite realizar comparaciones sistemáticas entre los elementos del problema y los conceptos y experiencias almacenadas en la memoria del resolutor. El intercambio se establece mediante un proceso de análisis y síntesis como base de generalizaciones que se van haciendo y que permiten la adición de la información necesaria para profundizar y precisar la información que da el problema. La exteriorización, de la representación del problema puede hacerse mediante la expresión verbal, el uso de gráficos, modelos etc.

Todo lo anterior permite presentar la habilidad representar un problema matemático con una estructura operacional conformada por las operaciones *descomponer* mentalmente el problema en partes, *identificar* los elementos que involucra, *comparar* y establecer nexos entre los elementos y en relación con el problema, *identificar* y seleccionar elementos relevantes para su solución, *integrar* los elementos seleccionados y *exteriorizar* la representación concebida a través de la expresión oral, un modelo, etc. Todas mediadas por las operaciones *comparar* los elementos del problema con los de la BCE del resolutor y *adicionar* información necesaria para la precisión de elementos que contempla el problema.

El proceso de resolución de problemas matemáticos

La representación es un proceso que dinamiza el proceso de resolución de problemas matemáticos, dado su carácter mediador en el conocimiento, permitiendo al resolutor dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Es una dimensión que nos ha posibilitado explicar el movimiento del proceso de resolución de problemas matemáticos y conceptualizar dicho proceso, de manera novedosa, como *la evolución de las representaciones del problema en el pensamiento del resolutor*. Las representaciones del problema que se van obteniendo a lo largo de su resolución, expresan el tránsito desde un primer estadio, es decir, desde la representación inicial, hasta un estadio final o solución.

Los eslabones del proceso de resolución de problemas matemáticos permiten expresar la lógica interna del mismo, a través de la relación temporal que se establece entre ellos. Así, identificamos como tales a *la valoración del problema, la concepción de una representación inicial del mismo, la generación progresiva de una serie de representaciones y la evaluación de la solución y del proceso*.

La valoración del problema permite determinar el grado en que éste se corresponde con los criterios que tiene el resolutor disponibles en su BCE, los cuales según A. Labarrere (1994), constituyen un sistema referencial que se ha formado a partir del análisis precedente de problemas que ha resuelto o visto resolver, y en los que se han desmembrado aquellos aspectos que serán motivo de valoración y que una vez observados se han guardado, integrados en un sistema que le permite valorar otros problemas. De esta manera, la relación entre el *problema matemático* y la BCE del estudiante da lugar a una *representación general* de dicho problema que determinará el surgimiento, o no, de la necesidad de resolver la dificultad intelectual que el mismo trae implícita.

Una vez que el estudiante comienza a ocuparse de la resolución del problema, se manifiesta el eslabón *concepción de una representación inicial del mismo*. Se orienta en la tarea, comienza a representarse los objetos que intervienen en el problema, la lógica de sus

relaciones, nexos y cualidades y empieza a generar esquemas virtuales de solución.

Para conformar una representación interna requerirá de operaciones ya explicadas en la estructura operacional. Al culminar la fase interna, el producto obtenido puede ser considerado como una representación inicial del problema, pudiéndose exteriorizar a través operaciones como graficar, simbolizar, expresar verbalmente, modelar o simular. La exteriorización de la representación interna puede dar lugar a su perfeccionamiento ya que permite hacer un análisis más completo. La interrelación y el equilibrio entre las dos fases de la representación tienen su manifestación en la excelencia del producto obtenido.

El tercer eslabón, *generación progresiva de una serie de representaciones*, parte de la representación inicial obtenida. En la generalidad de los casos la vía de solución de un problema no es obtenida con la primer representación, por lo que será preciso generar otras, más elaboradas, que conduzcan a la misma. Esto lleva a la sistematización de dicha representación. Para lograr esta generación de representaciones, será necesario adicionar elementos que vayan enriqueciendo cada representación del problema en la dirección de la solución. Estos elementos deben facilitar el paso de una representación a otra que debe ser cualitativamente superior ya que estará más cercana a la solución.

La determinación de los elementos a adicionar dependerá de los conocimientos del resolutor, el que deberá recuperar de su memoria, los conceptos, métodos y procedimientos que puedan ser congruentes con la representación a transformar, los que deberá probar. En caso de no resultar aplicables deberá descubrir o elaborar el procedimiento adecuado.

La representación inicial del problema, activa el conocimiento específico guardado en la memoria del resolutor. Cuando uno de los esquemas del mismo se relaciona con la representación en cuestión, éste guía sus acciones dando lugar a una representación que puede conducir a la solución. Si la aplicación del conocimiento específico lleva a una nueva representación (o representación transformada) que no aporta un avance en la búsqueda de la solución, se requerirá una reevaluación de las fases previas. Si se llega a una nueva representación del problema pero de ella no se obtiene aún la solución, se someterá al análisis la nueva representación obtenida con el objetivo de generar, a partir de ella, otra que sea cualitativamente superior y así hasta alcanzar la solución.

En caso de que el esquema de que dispone el resolutor no sea lo suficientemente rico como para que le permita abordar la solución del problema de manera directa, tendrá que guiarse por estrategias generales para buscar algún método específico de solución. Si la aplicación del método encontrado lleva a una nueva representación, pero ésta no genera un avance en la búsqueda de la solución, habrá que reevaluar las fases anteriores. Si se llega a una nueva representación pero de ella no se obtiene aún la solución, se continuará trabajando sobre la misma para tratar de generar otra cualitativamente superior y el proceso se desarrollará así hasta alcanzar la solución. Realmente, en la práctica, este eslabón no transcurre de una forma rígida. Aunque se tiende a usar más un conocimiento que el otro; ante un problema, ambos interactúan para llegar a la solución.

El cuarto eslabón se manifiesta una vez resuelto el problema, al hacer una *evaluación de la solución y del proceso*. Para someter a regulación los diferentes momentos de la solución, el resolutor debe introducir elementos comparadores, que son representaciones que tiene

de cómo debería ser ejecutada la actividad y acerca de cómo ella se ha ejecutado realmente. De esta forma, al finalizar el proceso puede tener una representación general de cómo se desarrolló el mismo. Existen también los comparadores que se integran a partir de representaciones de resultados, los cuales permiten el control de la solución obtenida (Labarrere, 1994).

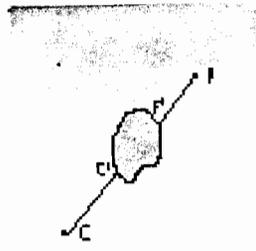
Ejemplo de Solución de un problema matemático

En la Grecia antigua la población de una ciudad creció tanto que el abastecimiento de agua llegó a ser insuficiente y fue necesario conducir el agua desde los montes vecinos. Como una alta montaña se interponía entre la ciudad y la fuente, no había otra alternativa que cavar un túnel. Los constructores del túnel comenzaron la excavación a ambos lados de la montaña y se encontraron en el centro, según lo planificado. Cómo determinaron los planificadores la dirección exacta de manera que ambos grupos se encontraran?

Una vez leído y valorado el problema, y que ha surgido un interés por hallar su solución, comienza una segunda lectura más detallada de la situación original; se van analizando las partes, comparando sus elementos con los conocimientos almacenados en la BCE, e identificando los objetos involucrados. Dichos objetos, en este problema, resultan muy comunes, pues se trata de una ciudad, una fuente, un túnel y una montaña. Si se profundiza en el estudio de las características de estos objetos y sus relaciones, se puede pensar en considerar dos puntos, uno simbolizando la ciudad y el otro la fuente. Además, el supuesto canal a construir, se puede imaginar como el segmento de línea recta que une esos dos puntos y la montaña interponiéndose.

Al relacionar todo esto con la exigencia del problema, puede llegarse a que la dificultad está en cómo trazar esa dirección a ambos lados de la montaña, dado que desde uno de estos puntos no se divisa el otro. La exteriorización de la representación interna que del problema se tiene puede hacerse mediante la siguiente representación geométrica:

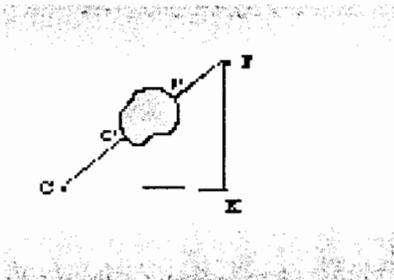
Aquí C^1 y F^1 son puntos en la base de la montaña sobre la recta CF , quedando integrados todos los elementos considerados en dicha representación. Debe puntualizarse cómo para su formación no fue necesario tener en cuenta que la situación ocurrió en Grecia ni el crecimiento de la población, dichos aspectos se excluyeron del análisis, trabajando sólo con la información que se consideró relevante. Puede notarse, además, la adición de objetos matemáticos para representar los objetos reales del problema.



crecimiento de la población, dichos aspectos se excluyeron del análisis, trabajando sólo con la información que se consideró relevante. Puede notarse, además, la adición de objetos matemáticos para representar los objetos reales del problema.

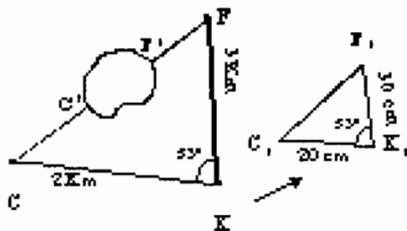
La insuficiencia de esta representación inicial del problema está dada por la imposibilidad de conectar directamente los puntos C y F. Sin embargo, estos se podrían conectar indirectamente a través de un tercero (adición de un nuevo objeto). Para ello será necesario seleccionar un punto K desde el cual sean visibles C y F. Esta extensión de la representación del problema nos lleva al plano, donde tenemos tres puntos C, F y K, los cuales determinan un triángulo.

La nueva representación del problema (o representación transformada), después de adicionado el punto K y relacionado con los otros puntos C y F mediante los segmentos KC y KF, puede expresarse mediante la siguiente representación geométrica:



Al comparar esta representación con los conocimientos almacenados en la BCE, se puede llegar a recordar información importante para la solución buscada. Por ejemplo, se sabe que conocer completamente un triángulo significa conocer las medidas de sus lados, ángulos y que hay diferentes criterios que permiten, a partir del conocimiento de algunos de estos elementos, determinar los restantes. Observando la actual representación del problema, se puede ver que los segmentos KC y KF son medibles, así como el ángulo correspondiente al vértice K. Sin embargo desde el punto C no puede verse el punto F y viceversa, motivo por el cual los ángulos en los vértices C y F no son medibles, como tampoco lo es el segmento CF, es decir, pueden conocerse dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre estos.

Como la dirección CK es conocida, si se tuviera la magnitud del ángulo en el vértice C, podría trazarse la dirección CC' . Análogamente, si se conociera la magnitud del ángulo en el vértice F podría trazarse la dirección FF' . Es decir, que el conocimiento de estos ángulos es suficiente para la solución del problema. Pero es imposible medir directamente en el terreno los ángulos en los vértices C y F. Sin embargo, en este caso puede emplearse la semejanza de triángulos. Se construye sobre papel un triángulo que



posea un ángulo igual al ángulo en el vértice K y los lados que comprenden a este ángulo posean una misma razón de proporcionalidad con los lados KC y KF. Suponiendo que la distancia KC fuera de 2 Km., la KF de 3 Km. y que el ángulo CKF fuera de 53° , puede dibujarse el triángulo semejante $C_1K_1F_1$ con longitud K_1C_1 de 20 cm y longitud K_1F_1 de 30

cm y con un ángulo $C_1K_1F_1$ de 53° . Visto así, la representación geométrica del problema sería como se muestra en la figura:

Como los triángulos tienen ángulos homólogos iguales, el ángulo KCC^1 es igual a $K_1C_1F_1$ y el ángulo KFF^1 es igual a $K_1F_1C_1$. Y como en el triángulo construido podemos medir los ángulos $K_1C_1F_1$ y $K_1F_1C_1$, queda resuelto el problema. Notar que la solución del problema permite calcular el largo del túnel y de aquí, el trabajo a realizar por los constructores.

Como puede observarse, durante el proceso de solución se formó una *representación inicial del problema*, para lo cual hubo de realizarse un proceso de análisis y síntesis que permitió la adición de la información necesaria para profundizar y precisar la que brindaba el problema. Dicha representación se fue transformando a partir de la adición de nuevos elementos, hasta llegar a una que permitió calcular la solución del problema.

Conclusiones

La modelación didáctica de la formación de representaciones de problemas matemáticos que se propone se ha fundamentado a partir de importantes y actualizados referentes teóricos.

La concepción del representar como habilidad y su estructuración de manera tal que se integran las operaciones internas y externas como dos fases cuyo resultado tributa a la excelencia de la representación del problema, constituye un resultado novedoso dentro de la modelación que se presenta.

La concepción de la representación en calidad de dimensión dinamizadora del proceso de resolución de problemas matemáticos permitió explicar el mismo, y conceptualizarlo como la evolución de las representaciones del problema en el pensamiento del resolutor.

Referencias bibliográficas

- Alonso, I. & González, H. (2003). *¿Cómo tener éxito al resolver problemas matemáticos?* Libro de texto. Ed. Visión Creativa. Bolivia.
- Fridman, L. & Turetski, E. (1989). *Como aprender a resolver problemas*. Ed. Ilustración. Moscú.
- Krantz, S. (1997). *Techniques of Problem Solving*. American Mathematical Society. USA.
- Labarrere, A. (1994). *Pensamiento. Análisis y autorregulación en la actividad cognoscitiva de los alumnos*. Angeles Editores. México.
- Morena, L. (1997). *Psicología Cognitiva Contemporánea y Representaciones Mentales. Algunas aplicaciones al aprendizaje*. Curso Pre-Congreso Pedagogía'97. C. H. Cuba.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Ed. Tecnos. Madrid. España.
- Rubinstein, J. (1967). *Principios de Psicología General*. Ed. Pueblo y Educación. Cuba.