

Potencialidades del Cálculo Diferencial para la enseñanza de la resolución de problemas

Carmen Luisa Méndez Fabret, Caridad González Sánchez y J. Raúl Delgado Rubi
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE).Cuba
menlui@ind.ispjae.edu.cu

Resumen

En este trabajo se presenta el resultado de una investigación realizada a la asignatura Cálculo Diferencial (CD) que se imparte en el primer año de Ingeniería Industrial, la que abarca los contenidos Funciones, Límite, Continuidad, Derivada y Diferencial de funciones de una y varias variables, con el objetivo de identificar las potencialidades que poseen estos contenidos para implementar en esta asignatura una propuesta organización del proceso de enseñanza aprendizaje de los recursos heurísticos.

Se toma como marco teórico La Enseñanza Problémica y la Resolución de Problemas, enfoques de orientación heurística que tienen entre sus premisas epistemológicas y psicológicas; el considerar la matemática como una disciplina dinámica, no agotada y el concebir el aprendizaje como un proceso en que el desempeño del estudiante juega un papel protagónico.

Se dan algunas recomendaciones didáctico-metodológicas a través de ejemplos concretos que ilustran como se pueden abordar los contenidos para eliminar limitaciones que presenta la organización tradicional de la asignatura y poder implementar de manera efectiva una nueva organización.

Introducción

Desde que las ideas de Polya (1945) empezaron a utilizarse significativamente en la enseñanza de la Matemática, alrededor de los años ochenta, el interés en torno a la Resolución de Problemas se ha incrementado, no sólo por la inconformidad de la comunidad científica docente con los resultados que se alcanzan en la educación matemática, sino también, porque este enfoque o modo de concebir las actividades educativas es de los que exhibe mayores posibilidades para dar respuesta a las exigencias de los tiempos actuales, que demandan cada vez más, de un estudiante mejor preparado para enfrentar los cambios sociales, económicos y científico-técnicos que nos esperan en el presente milenio.

En un inicio los estudios psicopedagógicos y sus aplicaciones educativas parecían compartir la idea de que la resolución de problemas y su enseñanza estaba basada en la adquisición de estrategias generales, pero en los últimos años estos modelos generales están siendo sustituidos por otros específicos. Schoenfeld (1985) ha mostrado que las heurísticas de Polya pueden ser importantes en el aprendizaje de los estudiantes si se discuten a un nivel contextualizado y si se acompañan de heurísticas particulares.

De acuerdo con lo anterior, la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos aplicables a la Resolución de Problemas y su implementación en una asignatura, exigen explorar exhaustivamente los contenidos específicos a los cuales se refieren los problemas, para identificar y aprovechar las potencialidades que estos ofrecen a tales fines.

En este trabajo se presenta el resultado de una investigación realizada en la asignatura

Cálculo Diferencial que se imparte en el primer año de la carrera de Ingeniería Industrial, la que abarca los contenidos Funciones, Límite, Continuidad, Derivada y Diferencial de funciones de una y varias variables, con el objetivo de identificar las potencialidades que poseen estos contenidos para implementar en esta asignatura una propuesta de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos.

Se dan algunas recomendaciones didáctico-metodológicas a través de ejemplos concretos que ilustran como se pueden abordar los contenidos para eliminar limitaciones que presenta la organización tradicional de la asignatura y poder implementar de manera efectiva la nueva organización.

Fundamentación Teórica

Lo que aquí se identifica como recursos heurísticos y que algunos autores llaman métodos de solución de problemas, métodos heurísticos o simplemente heurísticos, son los numerosos principios, reglas, estrategias y medios, aplicables a la resolución de problemas, que aunque no garantizan con su ejecución obtener la solución de los mismos, funcionan razonablemente bien en muchos casos y con frecuencia nos llevan al resultado esperado.

Las formas de organizar las heurísticas planteadas por el profesor Horst Müller (1987) es el llamado Programa Heurístico General para la solución de problemas, que lo define como un conjunto de procedimientos heurísticos organizados y ordenados en forma de sistema. Este programa constituye una de las fuentes utilizadas en la selección y organización de los heurísticos en este estudio.

El surgimiento mismo del CD es consecuencia de la necesidad de resolver importantes problemas que se plantearon los hombres en una época pretérita del desarrollo de la humanidad, como por ejemplo determinar la pendiente de la recta tangente a una curva conocidas la función y el punto de tangencia, determinar la velocidad instantánea conocida la ley del movimiento, etc.

Los cursos tradicionales de CD en las carreras de ingeniería han incluido como contenido objeto de estudio un tema para abordar las “aplicaciones”; tema dentro del cual está contemplada la realización de tareas de diferentes tipos entre los que se encuentra la de “resolver problemas” de: velocidad o razón de cambio, cálculo aproximado y optimización.

Los problemas de razón de cambio se introducen después de estudiar la derivada de la función compuesta, los *problemas de cálculo aproximado* se introducen después de estudiar el diferencial y los *problemas de optimización* se resuelven prácticamente al finalizar la asignatura después de introducidos los contenidos sobre extremos.

Tradicionalmente, para enseñar a resolver estos problemas, en el desarrollo de las conferencias, el docente resuelve un problema tipo a modo de ejemplo, el cual el estudiante utiliza posteriormente como patrón para “atacar” a los otros, que con un orden de dificultad similar deberá realizar de manera independiente.

Como consecuencia de este tipo de enseñanza, el planteamiento y la resolución de problemas, permite tan sólo mostrarlos en su carácter de aplicación específica del contenido; objetivo que puede lograrse, sin que ello implique el aprendizaje de destrezas, técnicas y recursos heurísticos que, si bien no dan por sí solo la solución, pueden ayudar al estudiante a obtenerlas

en muchos casos.

Sería de mayor trascendencia para el aprendizaje de los estudiantes presentar la resolución de problemas como un proceso mediante el cual se construya y se refuerce el contenido matemático a estudiar, de modo que se puedan aprovechar todas sus potencialidades para el entrenamiento de los estudiantes en el uso de los recursos heurísticos de manera consciente.

Con este propósito ha sido diseñada una propuesta de organización del proceso de enseñanza aprendizaje de los recursos heurísticos (Méndez, 1999). Para implementar dicha organización en la asignatura Cálculo Diferencial fue necesario realizar un análisis del contenido de cada tema, que permitiera determinar las potencialidades de los contenidos para el desarrollo de habilidades heurísticas y metacognitivas y con ello organizar el contenido en forma apropiada. Una síntesis de los principales resultados obtenidos es lo que se describe a continuación.

Potencialidades del Cálculo Diferencial para la resolución de problemas.

Las funciones

Las funciones constituyen el objeto de estudio del CD. El concepto de función está presente en múltiples procesos de la Naturaleza que representan relaciones cuantitativas entre las magnitudes que intervienen en los fenómenos que deben ser modelados por los ingenieros. De ahí la necesidad de que en carreras de Ingeniería este concepto se profundice y amplíe con el aprendizaje de nuevas funciones elementales y la introducción al estudio de las funciones de varias variables.

En investigaciones realizadas (Méndez, 1999; Delgado, 1999, Hernández et al, 1997) se ha detectado que en muchas ocasiones las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de los problemas de aplicación que se presentan en la asignatura CD están motivados por problemas de modelación de relaciones funcionales y no por el planteamiento de otros modelos matemáticos como el límite, la derivada, el diferencial, etc.

Expresar las relaciones funcionales que aparecen en los es una labor que requiere ingenio, lo cual justifica la necesidad de realizar acciones didácticas que permitan estudiar estos modelos antes de ser utilizados en la resolución de los problemas de aplicación en los temas subsiguientes.

En correspondencia con ello se indica implementar una actividad docente para estudiar de forma particular las funciones como modelo matemático.

En ella se recomienda aprovechar la presencia de las relaciones funcionales de los diferentes fenómenos y situaciones que aparecerán como problemas de aplicación, para realizar la modelación de las mismas como parte del tratamiento del tema y de manera anticipada a su uso en dichos problemas.

Ejemplo 1

Durante el estudio de los extremos condicionados (al finalizar prácticamente la asignatura), aparecen los llamados problemas de optimización y con ellos el uso del esquema *Función objetivo-Sistema de restricciones-Método de optimización*, esquema del cual el estudiante generalmente se apropia con rapidez. Sin embargo la dificultad mayor estriba en la modelación

de la función objetivo y las ecuaciones de enlace, lo que impide que en muchos casos no se llegue a resolver exitosamente el problema.

En esta investigación se constató que esta dificultad puede ser eliminada, si en el primer tema (funciones) se le propone al estudiante, en lugar de resolver el problema de optimización, solamente modelar la función objetivo y las ecuaciones de enlace.

Problema de optimización:

Se desea construir una caja cerrada de base rectangular de doble longitud que anchura. Teniendo en cuenta que la tapa y las caras laterales deben estar hechas de un material que cuesta \$4.00 el metro cuadrado, mientras que el material de la base cuesta \$6.00 el metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que produce el menor costo?

Ahora la pregunta del problema se sustituye, en correspondencia con el objetivo planteado, que es solamente modelar la función.

Hallar una expresión analítica que permita calcular el costo de la caja conocidas sus dimensiones.

De esta forma el estudiante puede comenzar a resolver problemas desde las primeras actividades educativas y además le facilita el poder establecer las conexiones entre los contenidos objeto de estudio. Otras de las posibilidades que ofrece el CD es que los problemas que se abordan tradicionalmente en los temas finales de la asignatura pueden comenzar a plantearse desde los comienzos mismos de ella.

Ejemplo 2

Ejemplificando nuevamente con los problemas de optimización, pueden presentarse problemas cuyas funciones objetivo sean funciones elementales y que sus extremos puedan determinarse sin el uso de la derivada, o sea a partir del conocimiento previo que se tiene de las mismas y los puntos donde esta los puede alcanzar.

Problema de optimización

Cierta empresa ha descubierto que el ingreso anual depende del precio en dólares según la relación

$$I = -50p^2 + 500$$

- ¿Qué precio debe cobrarse para que el ingreso sea máximo?
- ¿Cuál es el máximo valor del ingreso?

Para resolver el problema (se resuelve al finalizar la clase) el alumno debe darse cuenta que la función representa una parábola y que por lo tanto sus valores extremos deben estar en el vértice de la misma. Determinar las coordenadas del vértice de una parábola forma parte de la base de conocimientos de los estudiantes desde el nivel precedente, conocimiento que se refuerza y profundiza con la identificación de las principales propiedades de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ y su representación en un sistema de coordenadas cartesianas. Este ejercicio además de potenciar la habilidad “resolver” (Delgado, 1999), puede servir para discutir estrategias como “sumar cero” y “multiplicar por uno”, las cuales se utilizan cuando un problema se debe expresar en cierta forma donde es conveniente su uso.

Las heurísticas anteriores, utilizadas en el completamiento cuadrático para hallar las coordenadas del vértice de la parábola, podrían utilizarse también para hallar el centro y los semiejes de una elipse, el centro de una hipérbola y el centro y el radio de una circunferencia.

En este tema también se puede introducir el principio heurístico de reducción. El tratamiento descrito anteriormente para el caso de ecuaciones de segundo grado que no están completas puede ser un ejemplo.

En resumen, el contenido del tema "Funciones" posee potencialidades para el tratamiento de reglas y estrategias heurísticas importantes como "sumar cero"; "multiplicar por uno", "sustituir", "dibujar una figura de análisis"; a la vez que sirve para introducir la interpretación del Programa Heurístico General, las fases fundamentales y tareas principales para la resolución de problemas y para desarrollar las habilidades interpretar, graficar, modelar y resolver, entre otras.

El límite

El límite es un importante concepto del Análisis Matemático, permite estudiar profundamente las cantidades variables que aparecen en los diferentes fenómenos de la naturaleza y los procesos tecnológicos. Es uno de los conceptos más difíciles de formar en el estudiante y a la vez es trascendental en el aprendizaje del Cálculo ya que otros conceptos como continuidad, derivada, integral y series recurren a él.

El límite tiene un carácter dual, pues aparece como proceso y como resultado; es modelo para los procesos de convergencia y es instrumento de cálculo para: la derivada, la comparación entre funciones, las asíntotas de una función, entre otras.

Por otra parte está íntimamente relacionado con los procesos de aproximación.

Ejemplo 3

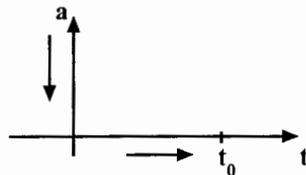
Cuando queremos representar el proceso de convergencia de una magnitud a un valor, el límite hace la función de modelo y en el proceso de modelación intervienen determinadas reglas heurísticas que pueden ser revaladas a los estudiantes.

En la siguiente situación problemática se discuten algunas de ellas.

Problema de modelación a través del límite

Un viajero observa en la pizarra electrónica de la estación, la hora y la distancia a la que se encuentra el tren que espera. Analice si existe convergencia de la relación que se establece entre el tiempo de llegada del tren y la distancia que lo separa de la estación, cuando el tiempo que indica el reloj se acerca a las 5 pm, hora de llegada del tren.

- Designar las magnitudes con variables: Sea t el tiempo, $t_0 = 5$ pm, es el tiempo de llegada y d la distancia del tren a la estación.
- Hacer una figura de análisis.
- Algunas preguntas pueden ser:



- ¿Qué características pueden observarse en el proceso que describe la situación problemática?
- ¿Cómo son las magnitudes que intervienen en el proceso? R / ¿Intervienen magnitudes variables!
- ¿De qué tipo es la relación que se establece entre las magnitudes del problema? La distancia depende del tiempo $d=d(t)$ R / ¿la relación es funcional! El tiempo aumenta y la distancia disminuye ¿la relación es de causa y efecto!
- ¿Hacia dónde tienden las magnitudes del proceso?
 Cuando el tiempo t esté muy próximo al tiempo t_0 , la distancia estará muy próxima a 0.
 Cuando el tiempo $t \rightarrow t_0$ la distancia $d \rightarrow 0$ R / ¿el proceso es de “convergencia”!
 Cuando el tiempo $t=t_0$ la distancia $d(t)=0$ R / ¿la convergencia es a un valor numérico!
- ¿De cuántas formas podemos acercarnos al punto t_0 ?
 Esta relación sólo puede establecerse por la izquierda de t_0

Saber reconocer cuándo un problema conduce al planteamiento de un proceso de paso al límite, constituye uno de los objetivos fundamentales a lograr en este curso, ya que de ello depende la realización exitosa de la construcción del concepto de derivada, el cual se realiza a partir del planteamiento de un problema cuya solución lleva implícito un proceso de paso al límite.

El tratamiento del concepto de límite es de una riqueza incalculable. La construcción de este concepto; la formulación de su definición y el cálculo de límites donde aparecen formas indeterminadas cuya solución requiere de un proceso más bien heurístico que algorítmico; constituyen verdaderos problemas para el estudiante y como tales se deben plantear para su tratamiento.

En resumen, el estudio del límite ofrece sus mayores ventajas para sistematizar los principios heurísticos de Analogía, Reducción y Generalización; las reglas “sumar cero” y “multiplicar por uno”, así como las que se introducen en el tema precedente; sirve además, para reforzar el desarrollo de habilidades como graficar, modelar y resolver y reforzar la utilidad del concepto de función en la modelación y el planteamiento de nuevos problemas.

La derivada

La derivada es otro instrumento poderoso del CD, el cual permite abordar la resolución de problemas sencillos de: cálculo aproximado, razón de cambio, máximos y mínimos y realizar análisis de curvas.

La formación del concepto de derivada de una función, su interpretación geométrica, física y económica pueden ser abordados como problemas, y en este contexto tiene sentido también, el desarrollo de habilidades en la aplicación del Programa Heurístico General, específicamente el modelo para resolver un problema. El estudio del tema es propicio para sistematizar y aplicar los recursos heurísticos introducidos en los temas precedentes. El concepto de diferencial brinda su mayor aporte en las posibilidades que ofrece para el

desarrollo de la habilidad de aproximar y resolver (Delgado, 1999) ya que muchos problemas de aplicación involucran a este concepto.

Conclusiones

El estudio realizado al contenido de los temas fundamentales del Cálculo Diferencial ha servido para determinar las principales potencialidades que estos poseen para el desarrollo de las habilidades vinculadas directamente con en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas.

El resultado de este estudio constituye un requerimiento esencial para implementar una propuesta de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos heurísticos en el CD, ya que ellos brindan información valiosa para la organización apropiada de cada actividad docente.

Se dan algunas recomendaciones didáctico-metodológicas a través de ejemplos concretos que ilustran como se pueden abordar los contenidos para eliminar limitaciones que presenta la organización tradicional de la asignatura y poder implementar de manera efectiva la nueva organización.

Referencias bibliográficas

- Colectivo de Autores (1994). *Los métodos participativos. Una nueva concepción de la enseñanza*. Dpto. Pedagogía y Psicología CEPES. Universidad de la Habana. Cuba.
- Delgado, J. R. (1999). *La enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. Tesis en opción al grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ciudad de La Habana Cuba.
- Hernández, S & Méndez, C. L. & Delgado, J. R. (1997). "Organización del tema de funciones con enfoque sistémico". *Actas de la RELME-11*. México.
- Méndez, C. L. (1999). *La instrucción heurística como opción pedagógica para contribuir al aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos*. Tesis de Maestría. La Habana. Cuba.
- Müller, H. (1987). *Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática la E G P. L. "Frank País García"*. Santiago de Cuba. Cuba.
- Santos, L. M. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Cuadernos de investigación # 28 CINVESTAV- IPN. México.
- Pozo, J. I. (1994). *La solución de problemas*. Santillana S.A. Madrid. España.
- Rodríguez, R. (1988). *Cálculo Diferencial e Integral*. Pueblo y Educación Ciudad de la Habana. Cuba.
- Sáenz, J. (1995). *Cálculo Diferencial para ciencias e ingeniería. Barquisimeto*.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. USA.