Una Epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con la serie de Taylor y diferencias finitas

Hipólito Hernández Pérez
Cimate. Universidad Autónoma de Chiapas, I. T. de Tuxtla Gutiérrez,
Chiapas, México
polito_hernandez@hotmail.com

Resumen

El estudio de predicción y variación de R. Cantoral (2001), así como la evolución a través de los marcos epistémicos del movimiento de: Aristóteles, Galileo y Newton (de la predicción de un estado conociendo un estado de facto Muñoz, 2000), proporcionan la base epistemológica para una epistemología inicial de la matematización del movimiento, y la búsqueda de los mecanismos de transición del binomio de Newton a la serie de Taylor; para ello revisamos textos antiguos, artículos relacionados con la investigación y textos escolares vigentes. Lo anterior nos proporcionó referentes para analizar la construcción de significados con los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil, así como incorporar contextos físicos donde las estrategias vertidas por los estudiantes para resolver problemas propios de la física, son de naturaleza tal que las ideas de cambio y variación están presentes (Solís, 1999). Nuestros resultados permitirán que los mecanismos de transición entre el binomio de Newton y la serie de Taylor profundicen las cuestiones teóricas y metodológicas para establecer la reorganización del discurso matemático escolar desde la matematización del movimiento y considerando como eje organizador la noción de predicción.

Introducción

En las carreras de ingeniería de diferentes instituciones de educación superior, en sus planes de estudios, están contempladas las materias de Ecuaciones Diferenciales, Métodos Numéricos y Cinemática o Dinámica. En lo que respecta al programa de ecuaciones diferenciales gran parte se resuelve con métodos analíticos sobre la base del cálculo diferencial e integral a través del concepto de límite, después se tratan los métodos aproximados para obtener las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden, métodos que están en los planes y en diferentes textos de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, Zill (1993) entre otros y en el programa y textos de Métodos Numéricos, por ejemplo Burden y Faire (1998) entre otros, así como las series infinitas y la serie de Taylor aparecen en los programas y textos también en forma separada.

Tanto las series de potencias como la serie de Taylor son métodos para resolver ecuaciones diferenciales, por lo que he observado durante mi práctica docente en los cursos de matemáticas y física en el nivel superior, estos contenidos están desvinculados entre un método matemático y otro, así como del contexto físico, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos que circulan en el mercado y que a la vez son recomendados en los programas de los planes de estudios. En textos de Física y de Ingeniería utilizados en nuestro medio, eventualmente aparecen ideas estrechamente vinculadas a las nociones pre-cauchianas de la serie de Taylor. Así es usual encontrar argumentos como el siguiente: " Si p representa a un parámetro físico en un instante dado de tiempo t , un momento después $t+dt$, este parámetro será $p+dp$...", que requiere para su conceptualización el pensar un tanto como lo sugiere la Serie de Taylor en cuanto instrumento de predicción y no como objeto de convergencia como aparece en los textos de matemáticas.

Aunque el discurso de la matemática escolar vigente en las escuelas de las disciplinas mencionadas parece inhibir las ideas de variación y predicción de los estudiantes (ya que el cálculo escolar es visto como una estructura formal que antecede al análisis), las estrategias seguidas por los estudiantes para resolver problemas propios de la física, son de una naturaleza dinámica donde las ideas de cambio y variación están presentes, (Ver Solís, 1999). En el documento se abordarán los siguientes aspectos: ¿Cómo se matematizó el movimiento?, ¿Cuál es el origen del Binomio de Newton?, ¿Cuál es el origen de la serie de Taylor?

Consideraciones iniciales

De acuerdo con Cantoral (1996) la Matemática Educativa no es la enseñanza de las matemáticas ni la matemática escolar una simplificación de la matemática, pero si existen fuertes vínculos entre sí, aunque no constituyen los mismos cuerpos de conocimiento, puesto que la Matemática Educativa es una disciplina con ubicación en las prácticas sociales y conceptuales de enseñar y aprender matemática y de la matemática escolar. La vieja visión de que la didáctica de la matemática era sólo una colección de trucos para el "bien enseñar", se ha visto modificada por aquel espacio en el cual los estudios de investigación en el campo, están siendo usados para construir unidades de conocimiento organizado que puede ayudar las prácticas sociales de referencia.
Para ejemplificar, la matemática educativa, consideremos el siguiente caso; ¿es posible representar cualquier función real de variable real mediante una serie de potencias? Lagrange argumentó que sí se podía representar toda función como una serie de potencias, mientras que Cauchy mostró que no, en el primer tercio del siglo XIX. Matemáticamente el problema quedó resuelto por Cauchy. Sobre la base de este ejemplo, se localiza la diferencia entre matemática escolar y matemática, es decir, el resultado y los métodos que se usaron, pasaron de la disputa académica a los textos escolares, y posteriormente fueron llevados a la enseñanza, de aquí surge lo que llamamos matemática escolar.

Esta transposición de resultados de la matemática a los textos escolares del conocimiento matemático puede sufrir cambios por factores que obligan a su transformación, estos procesos han sido estudiados por epistemólogos con preocupaciones didácticas y le han llamado transposición didáctica. La matemática escolar está íntimamente relacionada con la teoría de transposición didáctica de Chevallard.

Para el caso que nos ocupa se distingue una relación entre el pensamiento físico y el pensamiento matemático de tal manera que nos proporciona elementos no presentes en la matemática escolar contemporánea. En este caso por qué creyó Lagrange que toda función se podría desarrollar en serie de Taylor y por qué, aun cuando Cauchy demostró su imposibilidad, los textos y las prácticas de los científicos se siguieron usando con los acercamientos Lagrangianos. Esto nos permite abordar las prácticas sociales de enseñanza vigente en nuestra época, tomando como materia prima los hallazgos de una cierta epistemología que nos permite asumir que las razones de Lagrange para creer que toda función podría expresarse como serie de Taylor fueran más profundas que aquellas que descansan en el señalamiento de su "obsesiva" visión algebraica, como se aprecia por ejemplo en la opinión de Grattan y Guinness (Citado en Cantoral, 1996). Después de la propuesta de Lagrange y la impugnación de Cauchy sobre el acercamiento Lagrangiano puede resolverse muy bien como lo hace Grattan y Guinness, pero para la Matemática Educativa queda un problema abierto: ¿Un cambio en la epistemología del cálculo, basado en la visión Lagrangiana, puede ser beneficioso para la didáctica? ¿Podrían acaso las consideraciones de Lagrange poseer mecanismos funcionales semejantes a aquellos que sustentan, consciente o inconscientemente, nuestros estudiantes? En este caso la Matemática Educativa puede abordar estas preguntas y otras más, considerando acercamientos que consideren las dimensiones epistemológicas, cognitivas y didácticas.

En la obra de Lagrange se explica la forma en que se obtiene el desarrollo en serie de potencias de una función, tomando a la función $f(x)$ e incrementando x en $x+i$, donde i es una cantidad cualquiera indeterminada, la función devendrá en $f(x+i)$ por la teoría de series se tendría: $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + etc.$, donde $f(x)$ es la función primitiva y p, q, r, etc., las funciones derivadas de la primitiva, en la serie se proporciona el valor exacto del residuo y sólo el número de sumandos que se quieren; en su escrito original menciona el papel que desempeña el residuo, esta observación podría arrojar información distinta sobre la evolución de las concepciones asociadas a las series de potencias. Estas argumentaciones se dieron en los textos de la época, aunque fueron impugnadas por científicos, por ejemplo el acercamiento que hace Cauchy de la serie de Taylor y de su convergencia, es decir, Cauchy se centró en el estudio de la convergencia de las series infinitas, de tal manera que la serie de Taylor pasó a ser un ejemplo mas del estudio de las series. Este acercamiento de Cauchy marcó el rumbo que habría de seguir el discurso matemático escolar.

Puesto que el cálculo construido en dos siglos anteriores se transformó en análisis matemático, sustentado sobre el concepto de límite, (es decir en el cálculo diferencial de Cauchy), las series de Taylor aparecen en los textos como un teorema, por lo que hoy en día el currículo de cálculo aparece con este discurso matemático escolar. Estos antecedentes proporcionan elementos para pensar en un cambio epistemológico del cálculo escolar a través de una visión: newtoniana, tayloriana y lagrangiana, es decir, buscar los mecanismos funcionales desde el origen del binomio de Newton y la serie de Taylor en su dimensión social desde su época, con la intención de reorganizar el cálculo escolar, siguiendo una epistemología desde la matematización del movimiento hasta el origen de la serie de Taylor.

¿Cómo se matematizó el movimiento?

Desde el punto de vista de marcos epistémicos.

Antes del siglo XVII, cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos, el marco epistémico fue: ¿Cuáles son las causas reales del movimiento? (Piaget & García, 1994; citado en Muñoz, 2000). Este marco epistémico originó descripciones cualitativas del movimiento (fenómenos de variación), es decir no generó procedimientos para cuantificar el movimiento simplemente porque no era parte de su marco epistémico, puesto que Aristóteles y sus seguidores medievales únicamente se preguntaban acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y la forma en que se modifican sus atributos durante la caída. En el Siglo XVII, Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída libre de los cuerpos? (Piaget

& García, 1994; citado en Muñoz, 2000), Galileo no considera las causas reales (atributos) y establece relaciones entre distancias y tiempos, estas relaciones identifican parámetros y por lo tanto su cuantificación, además Galileo también establece la relación funcional entre las variables que caracterizan el estado del movimiento de un cuerpo en momentos (tiempos) diferentes de su trayectoria. Este marco epistémico proporciona la base para cambiar un movimiento con velocidad variable por un movimiento con velocidad constante bajo ciertas condiciones, y propiciaron el resultado: $s = - at^2 / 2$.

Newton, estudiaba el movimiento de los cuerpos bajo el marco epistémico: ¿Cómo calcular la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en un lugar dado (condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994; citado en Muñoz, 2000), sin plantearse preguntas sobre las causas reales del movimiento, sino que la evolución del sistema de movimiento está basada sobre un sistema de transformaciones que permiten pasar de un valor inicial de la variable a otro en cualquier instante, esta transición de causas últimas a sistemas de transformación, generó un paso decisivo en la historia de la mecánica y en la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos. En el marco epistémico de Aristóteles se deja entrever que está inmersa la noción de variación, en las descripciones cualitativas que en esa época cuestionaban las causas reales del movimiento. Galileo en su marco epistémico establece su primera relación funcional en la cual aparece la noción de variación, predicción y cuantificación puesto que al pasar de un estado de movimiento a otro, existe una variación de la variable independiente y de la variable dependiente (tanto discretas como continuas), de la misma manera al establecer una relación de distancia y tiempo, en esta transición entre la variable independiente y dependiente emerge la noción de variación cuando el movimiento es con velocidad constante, pero también proporciona la base de la noción de *variación de la variación* al pasar de un estado de movimiento a otro con velocidad variable, en esta parte aparece el germen de la serie de Taylor pero no de forma muy clara, posteriormente con el marco epistémico de Newton se vislumbran mucho más las nociones de: variación, predicción y cuantificación del movimiento, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (estado inicial).

¿Cuál es el origen del Binomio de Newton?

Según Boyer (1986), a finales de 1664 y principios de 1665, Newton aportó sus propias contribuciones originales, por ejemplo de la habilidad de expresar funciones en términos de series infinitas, Gregory en las mismas fechas también lo estaba desarrollando. Newton pensó en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de forma continua o fluentes tales como longitudes, volúmenes, distancias, temperaturas, etc. Desde esta época Newton asoció de manera conjunta estos dos problemas, el de las series infinitas y el de las velocidades de cambio, bajo el nombre común de "mi método". El primer descubrimiento en ese año es el teorema del binomio que hoy en día lleva su nombre, el binomio de Newton, este teorema parece tan natural que resulta difícil ver por qué se retrasó tanto su descubrimiento. Fue a partir de Wallis cuando se hizo uso común de los exponentes fraccionarios, aunque se enfrentó con el problema de establecer un desarrollo para la raíz cuadrada de:. Newton da a conocer su desarrollo como parte de su método de series infinitas. Newton descubrió que las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema: $(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-n}{3n} CQ + \frac{m-n}{4n} DQ + etc \qquad (1)$

Donde $P + PQ$ representa una cantidad cuya raíz o potencia o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes dividido por el primero y m/n el índice numérico de las potencias de $P + PQ$. Por último, en lugar de los términos que van apareciendo en el cociente a lo largo del proceso Newton encontró en la obra de Wallis el cálculo de áreas encerradas por curvas cuyas ordenadas eran de la forma $(1-x^2)^n$. Examinando las áreas que se obtenían para exponentes n iguales a 0, 1, 2, 3, etc., descubrió que el primer término siempre era x , el segundo término era $-0x^3/3$ ó $-1x^3/3$ ó $-2x^3/3$ ó $-3x^3/3$, según, que el exponente n fuera 0, 1, 2 ó 3, y así sucesivamente. Por lo tanto, aceptando el principio de interpolación de Wallis, supuso Newton que todos los primeros términos que aparezcan en el área para n = 1/2 debería ser $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1-x^2/2-x^4/8-x^6/16-5x^8/128-\ldots$ por medio de interpolación análoga a la anterior, y después hallando el área por integración de la serie término a término. En otras palabras, Newton no procedió directamente a partir del triángulo de Pascal para obtener el teorema binomial, sino de una manera indirecta a partir de un problema de cuadraturas. Esto lo confirmó cuando obtuvo la misma serie infinita extrayendo la raíz cuadrada de $(1-x^2)$por medio del proceso usual, Newton descubrió que el resultado obtenido para $(1-x^2)^{-1}$ por interpolación, es decir el uso del teorema binomial para $n = -1$, coincidía exactamente con el obtenido con el resultado de la división larga.

Según, un estudio epistemológico de Cantoral (2001) en el contexto de la Matemática Educativa, todo parece indicar que desde el año 1665, Newton reflexionó sobre la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que fluyen continuamente, o fluentes, como él las llamó. Entre tales magnitudes se tienen a las longitudes, áreas, volúmenes, temperaturas, velocidad y fuerzas. El proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables y precisa el reconocimiento del praediciere en los procesos de predicción de corto alcance en el ámbito de la variación tanto discreta como continua. El vínculo entre los procesos de predicción de corto y largo alcance en ámbitos discretos y continuos, se sustenta en otro mecanismo de funcionamiento en la construcción del conocimiento: el movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen herencia, con esto queremos decir que el estado ulterior del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto, la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de “el praediciere” asociada con la variación y cambio en la naturaleza. En el modelo Newtoniano del movimiento de los cuerpos en la naturaleza se tiene la siguiente pregunta ¿Es posible conocer el futuro del movimiento contando sólo con la información que provee el estado actual del fenómeno? En el caso del movimiento de un fluído, P es el estado inicial del fluente continuo y queremos predecir el estado PQ del fenómeno, entonces: $P \to P + PQ$, donde PQ es variación de la variable independiente. Si $f(P) = P^{m/n}$ es una variable dependiente, entonces el estado inicial es $P^{m/n}$ y el estado final de un fluente continuo $(P + PQ)^{m/n}$ y su diferencia $(P + PQ)^{m/n} - P^{m/n}$ es la variación. El binomio escrito como en la ecuación (1) y el binomio dado como $(a+b)^n$ son equivalentes pero conceptualmente son distintos, puesto que la epistemología que Newton usó es diferente a la que hoy enseñamos, en esa época obedeció a un programa emergente, como alternativo al campo de la ciencia, en ello buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con la matematizacón, en la métafora del flujo del agua (Cantoral, *et al*, 2000).

¿Cuál es el origen de la serie de Taylor?

Según, Edward (1980) en su texto de historia de desarrollo del cálculo, Taylor en su Methodus incrementarum publica su serie y la obtiene a partir del argumento basado en la fórmula de interpolación de Gregory-Newton. Propone entonces la interpolación:

$$y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0.$$

En esencia, Taylor quiso tomar el límite como $\Delta x \rightarrow 0$ *cuando,* $n \rightarrow \infty$ y x es fija. Sí sustituimos

$n = (x - x_0) / \Delta x, n - 1 = (x - x_1)/(\Delta x)^2, n - 2 = (x - x_2)/(\Delta x)^3, etc.$ Entonces llega a:

$y = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 / \Delta x_0 + (x - x_0)\Delta^2 y_0 / 2(\Delta x_0)^2 + (x - x_0)\Delta^3 y_0 / 6(\Delta x_0)^3 + \ldots$ Donde

$x(0) = x_0, x(h) = x_1, x(2h) = x_2, etc.\ \Delta x \approx x_0 h, \Delta y_i \approx y_0 h, Dy_0 / Dx_0 \rangle\rangle\ y_0 / x_0 .\ etc.$ Cuando

$\Delta x \rightarrow 0, y = y_0 + (x - x_0)\, y_0 / x_0 + (x - x_0)^2\, y_0 / 2(x)^2 + (x - x_0)^3\, y_0 / 6(x)^2 + \ldots,$ Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada.

Según Cantoral *et al* (2000), el binomio de Newton se presenta como un resultado que emerge del sistema de prácticas sociales compartidas, ligada a una situación que precisa de la predicción, de modo que si P evoluciona de cierta manera, la cuestión central consiste en saber cómo será B(P) si conocemos el inicio de P, el cambio que sufre P, el cambio del cambio de P, etc. El binomio de Newon fue entonces una respuesta a la cuestión y una organización de las prácticas sociales. Por ejemplo, supongamos que B ha sido dada respecto de P por la relación $B(P) = p^2$ entonces imaginemos que P evoluciona y pasa de P, hasta llegar a ser ella incrementada por una pequeña parte de PQ (la unidad Q es menor que la unidad), de modo que P deviene, y la cuestión es saber quien es B después del flujo de P. Entonces con el binomio de Newton la respuesta será:

$$(P + PQ)^2 = p^2 + 2P^2Q + P^2Q^2 = P^2(1+2Q+Q^2),$$

en forma general en nuestra época estaría escrito como:

$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h3,$ expresión según las derivadas sucesivas de la función f en el punto x es: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2 / 2 + f'''(x)h^3 / 6$.
El problema se presenta con mayor interés si no se dispone en forma explícita de la relación entre B y P, para este caso habrá que emerger progresivamente una nueva noción, una noción que permita de algún modo la generación de la solución óptima a una clase de situaciones propias de la predicción.

Consideraciones finales

El discurso matemático vigente en que se presentan los programas y textos de Ecuaciones Diferenciales y de Métodos Numéricos está anclada a una epistemología basada en Cauchy, es decir, el cálculo a través del concepto de límite, así como los textos de Física e ingeniería aparecen eventualmente ideas vinculadas a las nociones precauchiana de la serie de Taylor como un instrumento de predicción y no como un objeto de convergencia. En esta investigación aportamos algunos elementos en su dimensión social, propio de la Matemática Educativa con el fin de caracterizar algunos aspectos para la reorganización del discurso matemático escolar, por ejemplo, exploramos la cuestión de ¿Un cambio en la epistemología del cálculo escolar, basado en la visión de Newton – Taylor puede ser beneficioso para la didáctica y poseer mecanismos funcionales semejantes a aquellas que sustentan consciente o inconscientemente nuestros estudiantes? Los aspectos que presentamos nos muestran algunas evidencias de que los mecanismos que subyacen en la epistemología de Newton – Taylor se pueden usar para construir acercamientos didácticos.

Referencias bibliográficas

Burden, R. & Faires, D. (1998). Análisis Numéricos. Editorial Thomson, 6a edición, México.

Boyer, C. (1986). Historia de la matemática. Alianza Editorial. España.

Cantora, R. (1989). Acerca de las contribuciones actuales de una Didáctica de Antaños. Cinvestav del I.P.N., México.

Cantoral, R. (1996). Una visión de la matemática educativa. Investigación en matemática educativa. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cantoral, R. (2001). Un estudio de la formación social de la analiticidad. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. & Farfán, R. & Cordero, F. & Alanís, J. & Rodríguez, R. & Garza, A. (2000). Desarrollo del pensamiento matemático, Editorial Trillas, ITEMS.

Chevallard, Y., (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Editorial Aique.

Edward, H. (1980). The Historical Development of the Calculus. Springer–Verlag. U.S.A.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 3, Núm. 2. pp. 131-170.

Piaget, J. & García, R.(1996). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. 7a edición, editorial siglo XXI.

Solís, M. (1999). Estudio de la noción de la variación en contextos físicos: el fenómeno de la propagación del calor. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Zill, D. (1993). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica. Tercera edición. México.