Los primeros errores en la formación docente

Patricia Lestón y Daniela Cecilia Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina
patricialeston@uolsinectis.com.ar veigadaniela@yahoo.com.ar

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo un análisis de los conocimientos matemáticos con los que los alumnos ingresan en la carrera del Profesorado en Matemática y Astronomía del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires (Argentina). Las conclusiones se apoyan en la experiencia de las autoras como Profesoras a cargo del Curso de Apoyo al Curso de Nivelación de la carrera antes mencionada. Esta investigación que se llevó a cabo a través de la observación y el dictado de las clases, lo que permitió analizar los errores más frecuentes y sus orígenes, los conceptos bien adquiridos, la concepción que los alumnos tienen de la Matemática y el perfil de los mismos. El análisis ha sido realizado sobre la base del aspecto constructivo del error. A partir del análisis realizado a lo largo de la investigación, se puede concluir que detrás de todo error hay un aprendizaje incompleto o erróneo.

Introducción

En el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires (Argentina), el curso de ingreso para el Profesorado de Matemática y Astronomía, no es obligatorio y es dictado durante diez semanas con una carga horaria semanal de siete horas, y al finalizar el curso se toma a los ingresantes un examen obligatorio no eliminatorio.

La realidad de nuestro país es que el nivel de la educación es muy heterogéneo, ante lo cual se hace difícil lograr un nivel uniforme en los ingresantes al Instituto. Esta es una de las razones que hacen que la deserción durante el primer año de la carrera sea muy importante.

Las autoras de este trabajo, egresadas del Instituto y habiendo hecho el curso de ingreso en su momento, presentaron en el año 2001, con la colaboración y dirección de una docente del Instituto; un proyecto para dictar un curso de apoyo a este curso de ingreso, agregando cuatro horas –no obligatorias- por semana. Durante esas clases se intentó acercar a los ingresantes una nueva perspectiva de la Matemática; seguramente distinta a la adquirida a lo largo de sus estudios anteriores y subsanar deficiencias que estos les hubieran dejado.

Perfil de los alumnos

Si bien no era obligatoria la participación en dichos cursos, se produjo la asistencia de gran cantidad de alumnos. Es notable que se trató de grupos muy heterogéneos pero con un patrón en común: *muy buena predisposición e interés por aprender*. Quizás fue esta reacción la que llevó a pensar en el replanteo, desde la experiencia adquirida, de ciertos aspectos de la enseñanza media que se detallan más adelante.

Se utilizaron para la presente investigación dos cursos; uno dictado en el turno matutino y otro vespertino con todas las diferencias que esto conlleva. La cantidad de alumnos y edades no puede determinarse de manera exacta debido al carácter optativo del curso. El curso de la mañana estaba formado por alrededor de 30 alumnos de entre 18 y 30 años. El nivel de conocimiento era muy bueno, comparado con las expectativas, no apareciendo prácticamente ningún tema desconocido y con una labor constante por parte de los ingresantes. El trabajo en clase se reducía a la resolución de los ejercicios que generaban mayores conflictos, por ser desconocidos o complejos en su resolución, en general ejercicios algebraicos. El interés por parte de los alumnos era muy grande y su predisposición a enfrentar ejercicios desafiantes era óptima. El grupo de la noche constaba de alrededor de 20 alumnos de entre 25 y 35 años. La mayor parte había terminado el secundario regular tiempo atrás o provenía de Bachilleratos Acelerados para Adultos. La mayoría trabajaba durante el día o eran padres de con familia lo que les restaba tiempo de estudio; no obstante, aprovechaban al máximo las clases para realizar consultas. Principalmente, asistían a las clases de apoyo para repasar temas que habían olvidado; y en muchos casos, manifestaron que les hubiera gustado *"que la escuela les enseñe a pensar matemáticamente y no mecánicamente"*. El nivel del curso era acorde a lo que se esperaba (entre medio y bajo), teniendo en cuenta las características de los estudios cursados.

Marco teórico

El análisis de lo observado en el curso ha sido realizado sobre la base del aspecto constructivo del error (Panizza, 1997) que es lo que en realidad nos interesa del concepto. Panizza opina *"(los errores) ofrecen recursos para formular hipótesis acerca de las concepciones que podrían explicar las producciones erróneas y para hacer avanzar dichas concepciones hacia los conceptos correctos. Según la perspectiva tradicional, el error es interpretado sólo en términos de lo que el alumno no ha logrado en relación a un saber determinado. Según la perspectiva constructivista, el error constituye un instrumento de diagnóstico de lo que el alumno ha logrado construir en relación a ese saber"*.

En particular fue uno de los temas más observados el surgimiento de los obstáculos frente a la resolución de problemas, considerando que este tipo de actividad, cada vez más presente en las clases de matemática de todos los niveles, es primordial para el conocimiento de esta ciencia. Dice Miguel de Guzmán (1984): *"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra la vida propia de las matemáticas"* (Corbalán, 1998).

Respecto a la resolución de problemas, Santaló (1986) opina: *"Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema... Naturalmente que se trata de problemas en el sentido amplio, no solamente de problemas reducibles a cálculos numéricos, sino de cuestiones muy diversas, como pueden ser la ordenación de datos, la demostración de propiedades de las figuras geométricas, la justificación de ciertas relaciones matemáticas o la demostración de propiedades de los conjuntos, de las funciones o de las estructuras* *algebraicas. Lo importante es que haya algo que buscar, o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado. Solamente hay que enseñar, como requisito previo, el lenguaje o la nomenclatura usual en matemáticas, para poder plantear los problemas correctamente y para entender la bibliografía corriente".*

Con respecto a la labor del docente frente a la enseñanza de resolución de problemas, Schoenfeld postula: *"El profesor también debe ser un entrenador en el sentido de que, al menos al principio, es la persona que hace que las habilidades y técnicas que tiene el alumno se utilicen de forma estratégica en la solución de problemas... Una de las diferencias entre los expertos matemáticos y los alumnos en la resolución de problemas estriba en que estos últimos carecen de metaconocimiento o control de sus propios recursos de solución. En ese sentido, el profesor debe ayudar mediante diversas técnicas a hacer explícitas las estrategias de las que dispone el alumno y su utilidad en la solución del problema".* (Echeverría, M. 1997).

Para concluir destacando la importancia de los problemas, Polya afirma: *"Está bien justificado que todos los textos de matemáticas empezando por el Papyrus Rhind, del siglo XVIII antes de nuestra era, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática"* (Santaló, 1986).

Errores frecuentes y dificultades

El objetivo principal de esta investigación fue no sólo detectar los errores, sino determinar con qué concepto sin adquirir o mal adquirido se relacionaban.

La realidad de la escuela es que los alumnos no tienen interés en el origen de los conceptos matemáticos, sino que sólo quieren la fórmula o receta que resuelva las situaciones que se les presentan. En muchos casos, esta dificultad se debe a que los alumnos están habituados a un tipo de trabajo esencialmente algebraico, es decir, muchos docentes no incluyen en sus clases, ejercicios o problemas que obliguen al alumno a "explorar" la situación planteada y discutir las posibles vía de solución, que es lo que permite que el aprendizaje del nuevo concepto sea verdaderamente significativo, de esta manera, los alumnos pasan toda su educación secundaria sin enfrentarse a verdaderos desafíos que los obliguen a analizar los conceptos que conocen, sus conexiones con otros y a plantearse seriamente la necesidad de buscar en sus mentes diversas maneras de resolver la situación. Ese tipo de aprendizaje hace que algunos conceptos vistos y reconocidos por todos los alumnos no hayan sido incorporados de una manera significativa.

Para trabajar como ejemplo, seleccionamos los siguientes errores puntuales, que se presentaron en gran cantidad de los casos y realizamos a partir de ellos el análisis pertinente.

- ✓ <u>Traducción de lenguaje coloquial a lenguaje algebraico</u>: Durante el proceso de traducción, los alumnos no identificaban a las incógnitas como variables, lo que representaba una dificultad a la hora de traducir situaciones problemáticas concretas. Es decir, veían a las incógnitas como los objetos a los que se refiere el problema y no como una cantidad o número.
- ✓ <u>Interpretación de las soluciones de ecuaciones</u>: Con respecto a este tema nos encontramos con varias dificultades puntuales:

  Existe una concepción errónea al reducir a las ecuaciones al mero hecho de resolverlas. sin tener en cuenta si esas soluciones son válidas o no en el contexto del problema.

Posiblemente esto se deba a que en la educación media, la mayor parte de los problemas planteados tienen solución y la solución es la correcta para el problema, por lo que no se hace necesaria la verificación, dando a los alumnos un significado parcial de la resolución de problemas..

1-En el caso de la resolución de ecuaciones de segundo grado o grado mayor, se detectó que las soluciones complejas no son reconocidas por parte de los alumnos como soluciones. Esto ocurre porque no son reconocidos como números debido a su forma de expresión y por la aparición de una *letra*. Quizás esto se pueda relacionar con otro error muy frecuente que surge al trabajar con números irracionales; la mayor parte de los alumnos no considera a $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ como un número, sino como una expresión a resolver, de la cual buscarán una forma simplificada, que en realidad no existe (Guasco, 2001). Posiblemente esto se deba también a que el conjunto de los números complejos tanto como el conjunto de los números irracionales se tratan en forma independiente al resto de los contenidos.

✓ Interpretación de enunciados: Ante ejercicios típicos presentados con distintos enunciados, los alumnos tienen mayor dificultad para resolver aquellos que no aparecen de la manera habitual. No les resulta igual resolver un ejercicio que tiene como enunciado "resolver las siguientes ecuaciones" que otro que diga "hallar los valores que verifiquen las siguientes expresiones". Seguramente esta dificultad surja de la rutina en los enunciados típicos de la enseñanza media. En particular, frente al ejercicio:

¿Cuáles son los números reales que cumplen que el cuadrado del anterior de su triple sea menor o igual que 9?

Se encontró que un grupo de alumnos había planteado y resuelto la inecuación, pero ignoraba qué debía responder a la pregunta planteada. Posiblemente, si el enunciado hubiese sido *Plantea y resuelve*, no se les hubiera presentado ningún inconveniente.

✓ Teoría de números: Esta rama de la ciencia es la que más se presta para realizar demostraciones por el conocimiento general que tienen los alumnos de las propiedades aritméticas. No obstante, es un tema apartado del programa curricular de la escuela media, situación que se contradice con la propuesta que hace Fausto I. Toranzos (1963): *"Son trabajos de mucha importancia, pues permiten aplicar la enseñanza heurística en forma muy provechosa para el objetivo formativo; merecen por lo tanto una atención especial por parte de los profesores"*. Esta ausencia genera como consecuencia que los alumnos sean incapaces de esbozar una demostración y a lo único que recurren es al tanteo, sin reconocer la necesidad de la generalización.

✓ Conceptos mal adquiridos: Se presentaron ciertos conceptos, que aunque básicos, tenían errores graves en su manejo. Particularmente, los conceptos de raíz cuadrada y de división en el caso de divisor igual a cero generaron acaloradas discusiones ya que, por el exceso de familiaridad que tienen los alumnos con dichos temas les es difícil comprender que lo que piensan es erróneo. Por ejemplo: $\sqrt{16}=\pm 4$ y $\frac{0}{0}=0$. En el primer caso el hecho de que se utilice para definir a la radicación como la operación inversa de la potenciación lleva a que se hallen los dos valores que elevados al cuadrado dan por resultado 16 y se los considere a ambos como soluciones de la operación. En el otro caso, concluimos que al ser la división una operación tan habitual, el concepto pierde su significado y se olvide la definición de la operación.

- ✓ Funciones: En el curso del trabajo con funciones se detectaron distintos tipos de dificultades, las que se detallan a continuación:
  1- Dada una función gráficamente o a través de una tabla de valores, se les solicita a los alumnos que determinen valores intermedios aproximados; la reacción inmediata de los mismos fue intentar –sin éxito en la mayoría de los casos- encontrar la fórmula correspondiente a la función. Probablemente, esto se deba a que en sus contactos anteriores con el tema *funciones* no trabajaron suficientemente con sus distintas representaciones; con los pasajes de una a otra forma y en muchos casos sólo se les presentaron algunos tipos de representación.

     Se sabe que una función puede venir dada en cualquiera de sus representaciones: *modelo físico o simulación, descripción verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula o ecuación* (Azcárate y Deulofeu, 1996); las dos últimas de gran predominio durante la educación media, dejan de lado los otros lenguajes. Esta visión tan reducida de los procesos de traducción de una representación a otra trae como consecuencia, en muchos casos, la dependencia a una de sus representaciones; y la reducción del concepto de función al de *fórmula* o *gráfico*.

  2- Se observó una tendencia generalizada a desarrollar tediosos cálculos algebraicos, cuando en realidad, en muchos casos es más sencillo realizar una lectura sobre el gráfico de la función; sobre todo cuando se trata de análisis de funciones. Posiblemente esto ocurre, debido a que la mayoría de los estudiantes no pueden establecer relación alguna entre la conclusión a la que llegan algebraicamente y el gráfico de la función.

  3- Por otro lado se encontraron errores relacionados al concepto de par ordenado. El error apareció a partir de un ejercicio en el que se debía determinar el conjunto dominio de la función $f(x) = \frac{2x-2}{x-1}$. Un alumno llegó a la conclusión de que éste era $D = \Re - \{(1;2)\}$; la ausencia de un punto en el gráfico de la función le hace pensar que dicho punto debe ser extraído del dominio. El error surge al determinar el dominio de la función a través del análisis de su gráfica y establecer una conexión errónea entre número real y par ordenado.

- ✓ <u>Polinomios:</u> El manejo algebraico de polinomios, en general, fue satisfactorio. Sin embargo, aparecen errores conceptuales en la resolución de ejercicios en los que se les solicita que busquen las raíces de un polinomio factorizado, ante lo cual lo escribirán de forma polinómica $ax^n + bx^{n-1} + ... + m$ para luego factorizarlo y buscar sus raíces. Este obstáculo puede estar relacionado con la idea que los alumnos adquieren durante su paso por la escuela secundaria, en la cual la factorización de polinomios es el eje del tema, sin llegar a establecer relación entre el manejo algebraico de polinomios y el objetivo para lo cual esto se realiza. Por otro lado, esta deficiencia puede deberse a que no es reforzada la idea de equivalencia de un polinomio expresado en cualquiera de sus formas.

- ✓ <u>Búsqueda permanente de fórmulas y "recetas":</u> Aparece continuamente en los alumnos una necesidad imperiosa de reducir cualquier problema a una fórmula o "receta" que permita resolverlo y a todos aquellos que a él se parezcan; aunque nunca más se proponga un problema de esas características. Esta necesidad surge a partir del acostumbramiento que les genera el haber resuelto únicamente problemas de esta índole descuidando aquellos en los que se requiere un razonamiento lógico propio de la matemática. *"Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello"* (Polya, (1965) en Santaló, (1986)).

Conclusiones

El análisis del error tiene sentido cuando el sentido lo encuentra el alumno. A partir del análisis realizado a lo largo de la investigación, se puede concluir que detrás de todo error hay un aprendizaje incompleto o erróneo. Lo que se quiere remarcar es la importancia no sólo de poner de manifiesto estos errores, sino indagar las causas de su origen para poder subsanarlas. El análisis realizado con posterioridad a este curso y que se está presentando en este artículo, fue elevado a las autoridades de la institución que se encuentran a cargo de la coordinación de ingreso, con la finalidad de que se realice un trabajo constructivo en el futuro, orientado a centrar la atención en las dificultades que presentan los alumnos egresados de la escuela media, en los cursos de los años siguientes y elaborar actividades tendientes a solucionar estas dificultades.

Basado en todo lo observado y analizado durante las clases en este curso de apoyo al Curso de Ingreso, consideramos que todo error debe ser tomado como el inicio de un análisis. Es decir, el error no debe ser visto como una ausencia absoluta de conocimiento, sino como una herramienta que pone de manifiesto que existe un conocimiento, pero mal adquirido. Por lo tanto, el error constituye un instrumento que le permite al alumno la construcción de nuevos conceptos. De esta manera, consideramos que las clases deben dar un espacio a los errores para que surjan, sean discutidos y remediados. El curso de ingreso al profesorado tiene por objetivo hacer un análisis de las condiciones y conocimientos de los ingresantes y notificar a los profesores de primer año el nivel con el que los alumnos ingresan. Pero esa finalidad le sirve a los docentes, no tanto a los alumnos. No debemos olvidar que en nuestro país la realidad educativa es, lamentablemente, preocupante, y los alumnos tienen muchas veces un desconocimiento absoluto de lo que es la matemática. Pasan por la escuela secundaria realizando cálculos y repitiendo algoritmos muchas veces inútiles y siempre vacíos de significados, convirtiéndose en "sabios ignorantes" (Ball, 1997). Cabe preguntarnos si no es la tarea del Curso de Ingreso mostrarles la otra cara de la matemática, despertar en ellos el interés por el razonamiento y la deducción lógica, acercarlos a ese nuevo campo, que les es totalmente desconocido, y que será el que deban recorrer durante sus carreras.

Por otra parte, la voluntad y buena disposición al trabajo y al descubrimiento de terrenos desconocidos permiten vislumbrar en un futuro un cambio interesante en las clases de matemática. Tal vez en el caso particular de este curso sea más que importante el tratamiento con el alumno de los errores, ya que en un futuro serán ellos quienes deban realizar este análisis con sus alumnos y en sus cursos.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C., Deloufe, J. (1996). *Funciones y gráficas.* España: Editorial Síntesis.

Ball, R. (1997). "Calculadores prodigio". En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 4, pp 56-77. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.

Corbalán, F. (1998). *Juegos Matemáticos para secundario y bachillerato*. España: Ed. Síntesis.

Echeverría, M. (1997). *La solución de problemas en matemática.* En Pozo, J., Echeverría, M. y otros. La solución de problemas. En *54-83.*Argentina: Editorial Santillana.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra.* España: Ed. Síntesis.

Guasco, M. (2001). La enseñanza de los números reales. Los contenidos interesantes, las dificultades y el error de ocultarlas. *Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática* 8 (3), 17-22.

Panizza, M. (1997). *Aproximación al análisis del error desde una concepción constructivista del aprendizaje, 151-161.* Buenos Aires, Argentina: Editorial A-Z.

Santaló, L. (1986). *La enseñanza de la matemática en la escuela media.* Argentina: Ed. Docencia.

Schoenfeld, A. (1996). "La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas". En Resnik, L., Klopfer, L., *Currículum y cognición. 141-169.* Argentina: Ed. Aique.

Toranzos, F., (1963). *Enseñanza de la matemática.* Argentina: Editorial Kapelusz.