

# La generalización de conceptos matemáticos en la educación superior

*Antonio Martínez Fonseca y Otilio B. Mederos Anoceto*

Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Cuba.

amfonseca@uclv.edu.cu

## Resumen

En este trabajo se exponen de forma abreviada los resultados de una investigación desarrollada por los autores que parte de la determinación de las insuficiencias que se presentan en el estudio de algunos temas de la Matemática Superior como son los Dominios Numéricos y las Series Numéricas, se precisa que una de las causas que inciden en esta situación es que las operaciones conceptuales generalización – restricción que ofrece la Lógica no siempre se adecuan totalmente a lo que en Matemática se denomina como tal y a la no existencia de un procedimiento metodológico que oriente al profesor el trabajo con estas operaciones. Para resolver estas deficiencias se definen las operaciones generalización y restricción de conceptos de una forma más general y aplicable al estudio de la Matemática y se propone un procedimiento para su aplicación, se ejemplifica con el estudio de los Dominios Numéricos y las Series Numéricas y se someten los resultados a un grupo de expertos que ofrecen una valoración positiva de la investigación.

## Introducción

Para la realización de este trabajo partimos de las deficiencias observadas en las clases que visitamos, como dirigente de diferentes facultades y departamentos de Matemática de la Universidad Pedagógica “Félix Varela” de Cuba durante seis cursos, en el trabajo de asesoría a la Dirección Municipal de Educación en Santa Clara, Cuba durante varios años y en las inspecciones nacionales del Ministerio de Educación a diferentes universidades pedagógicas del país en que participamos. Tuvimos en cuenta los criterios de nuestro seminario de investigación que desde el año 1996 se reúne periódicamente para debatir diferentes temas de Didáctica de la Matemática, las opiniones de un grupo de profesores de Matemática en el nivel superior que entrevistamos, la participación en más de veinte eventos científico metodológicos nacionales e internacionales y una profunda revisión de diversos materiales y normativas del trabajo de enseñanza de la Matemática en los distintos niveles de educación de nuestro país.

Como fundamento psicopedagógico se han utilizado las ideas de Vigotsky sobre los procesos de formación y desarrollo de conceptos (Vigotsky, L.S. (1999)) y las experiencias de Davidov sobre la generalización en la enseñanza (Davidov, V.V. (1988)) y otros seguidores de Vigotsky, nos guiamos por la teoría marxista leninista del conocimiento y aplicamos esas ideas a enseñanza de la Matemática en el nivel universitario donde a diferencia del nivel primario y medio (ver Ballester, S. y otros (1992)) hay vacíos didácticos importantes.

Teniendo en cuenta los resultados de las entrevistas, seminarios del grupo de investigación, el ejercicio de la profesión durante 15 años y la situación general de la Enseñanza de la Matemática, podemos afirmar la existencia del siguiente problema:

Problema: “¿Qué procedimiento metodológico utilizar para la generalización de conceptos matemáticos que permita a los profesores resolver las insuficiencias que existen en las diferentes etapas de la elaboración de los conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series en la Educación Superior?”.

Consideramos que el problema se puede resolver proporcionando herramientas adecuadas a los profesores en la dirección de la realización de la operación generalización y determinando procedimientos correctos que preparen el camino para la generalización y para el estudio de los conceptos después que se ha realizado esta operación, por lo que nuestro campo de acción es: “El uso de la operación generalización de conceptos en el estudio de los Dominios Numéricos y las Series en la Educación Superior”.

Su objetivo es: “Elaborar un procedimiento metodológico de trabajo con la operación generalización de conceptos que incluye una definición más rigurosa y con un dominio de aplicación más amplio, y la aplicación al estudio de los temas Dominios Numéricos y Series”.

Partiendo de estos elementos nos planteamos las tareas científicas siguientes:

- Definir las operaciones generalización y restricción de conceptos y determinar un procedimiento general para su realización.
- Aplicar las definiciones y procedimientos propuestos al estudio de los dominios numéricos y la operación adición.
- Valorar mediante técnicas de trabajo con expertos la utilidad del procedimiento metodológico propuesto en el estudio de los temas Dominios Numéricos y Series.

Como idea fundamental planteamos que:

“El procedimiento metodológico que proponemos sirve de base a la elaboración de los conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series en la Educación Superior”.

Como aporte teórico ofrecemos una estrategia de trabajo con los conceptos que incluye nuevas definiciones de las operaciones generalización y restricción de conceptos que complementan a las que tradicionalmente utiliza la lógica y se ajustan mejor al estudio de los conceptos de la Matemática y un procedimiento para su aplicación que, a diferencia de los trabajos de Davidov con los niños, tiene en cuenta el trabajo con las abstracciones matemáticas en la Educación Superior. En el orden práctico obtuvimos una estructuración lógica y metodológica de los temas dominios numéricos y series utilizando las técnicas propuestas del trabajo con conceptos, que puede ser parte de libros, folletos y otros materiales de estudio dada su novedad y que en general constituyen un aporte a la Didáctica de la Matemática y una monografía sobre este tema.

Para el cumplimiento de las tareas planteadas el método fundamental empleado es el teórico y dentro de éste el análisis y la síntesis del diagnóstico realizado, los métodos sistémico-estructural y dialéctico en la elaboración de la concepción general del procedimiento, hasta su aplicación práctica en el estudio de los temas Dominios Numéricos y Series. En la realización de este trabajo se ha aplicado la investigación empírica para la toma de opiniones y el análisis de la documentación para elaborar nuestras propuestas, así como el método matemático para procesamiento estadístico de los resultados de los instrumentos aplicados a los expertos.

Este trabajo está dirigido a los profesores de Matemática de los Centros de Educación

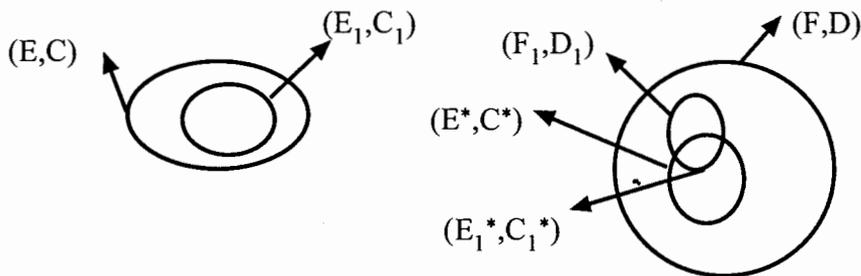
Superior y sus concepciones teóricas pueden ser desarrolladas fundamentalmente en el nivel de postgrado, no obstante consideramos que las ideas que se exponen sirven de guía y ayuda metodológica a todos los maestros y profesores que se dedican a la enseñanza de la Matemática.

### Desarrollo

#### La operación generalización de conceptos:

Definido un concepto  $(E_1, C_1)$  a partir del concepto  $(E, C)$ , si es posible encontrar un concepto  $(F, D)$  y un conjunto de propiedades  $D_1$ , tales que :

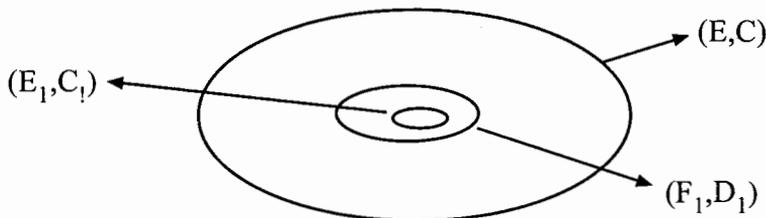
- 1- Existe un isomorfismo de conjuntos  $f$  entre  $E$  y un subconjunto propio  $E^*$  de  $F$ .
- 2- El traslado  $C^*$  de las propiedades  $C$  por  $f$  implican  $D$ ; pero  $D$  no implica  $C^*$ .
- 3-  $D_1$  implica a  $D$ ,  $D$  no implica a  $D_1$  y  $D_1$  determina un subconjunto propio  $F_1$  de  $F$  que tiene una intersección no vacía  $E$  con  $E^*$ .
- 4- La restricción  $C_1$  de las propiedades  $D_1$  a  $E^*$  coincide con el traslado de  $C_1$  por  $f$ ,  $C$  implica  $C^*$  y éste no implica a  $C$
- 5-  $C_1$  determina el subconjunto propio  $E_1$  de  $E^*$  y  $E_1$  isomorfo por  $f$  a  $E_1$ ;



Entonces se dice que el concepto  $(F_1, D_1)$  es una generalización del concepto  $(E_1, C_1)$  este último se denomina concepto de partida de la generalización o concepto que se generaliza y el concepto  $(F_1, D_1)$  recibe el nombre de concepto generalizado.

Muy ligada a la operación generalización se encuentra su operación inversa, la restricción que definimos en la investigación de forma similar.

En no pocas situaciones es suficiente aplicar estas definiciones cuando  $(F, D) = (E, C)$ ; y consecuentemente,  $(E^*, C^*) = (E, C)$ ,  $(E_1, C_1) = (E_1, C_1)$  y  $f$  es la función identidad. En este caso, el diagrama anterior toma la forma:



y se dice que  $(F_1 ; D_1)$  es una generalización que no excede los límites del concepto  $(E, C)$  que sirvió para definir  $(E_1, C_1)$ . Este caso particular es el que se aplica por todos los profesores de Matemática y responde a la definición que se da en los textos de Lógica, (ver Guetmanova, A (1989))

### **Procedimiento para la aplicación correcta de las operaciones generalización y restricción de conceptos.**

En el desarrollo de la Matemática para lograr una buena generalización de un concepto, en muchas ocasiones, es necesario realizar varias generalizaciones y restricciones para lograr el objetivo deseado. El procedimiento siguiente muestra un conjunto de pasos para realizar un proceso de generalizaciones y restricciones, y, lograr una generalización con determinadas características.

- a) Realizar un correcto estudio del concepto que se generaliza. Para dar cumplimiento a este paso hay que definir científicamente el concepto de partida de la generalización, conocer la mayor cantidad posible de propiedades de dicho concepto y prepararlo para su generalización.

Este paso incluye el diagnóstico de la situación del alumno para conocer el estado real que presentan los conocimientos que sobre el concepto que se va a generalizar posee, consecuentemente es primordial comprobar si se conoce tanto su extensión como su contenido y en el caso de existir deficiencias promover acciones colectivas que favorezcan la actualización de esos contenidos. En otras palabras, se trata de la detección y creación de las zonas de desarrollo próximo para luego pasar a desarrollar la generalización.

- b) Encontrar un concepto  $(F,D)$  y un conjunto de propiedades  $D_1$  que satisfagan las condiciones 1), 2), 3), 4) y 5).

Aquí es necesario promover una discusión de diferentes propuestas del concepto  $(F,D)$  y con ella elevar el desarrollo intelectual del alumno mediante el trabajo colectivo, con el profesor promoviendo el debate y llegar a la conclusión de cuál de las propuestas es la más adecuada acorde al contenido que se esté tratando.

- c) Realizar un conjunto de generalizaciones y restricciones del concepto de partida. Cuando se quiere generalizar un concepto se persigue, desde el punto de vista lógico y metodológico, al menos uno de los objetivos siguientes:

- i) Lograr que el concepto generalizado mantenga un conjunto de propiedades del concepto de partida.

- ii) Ampliar lo más posible la extensión del concepto que se generaliza.

Para el cumplimiento de estos dos objetivos se requiere de un conjunto de generalizaciones y restricciones. Cuando se hace una primera generalización es posible que el concepto generalizado no cumpla una determinada propiedad del concepto de partida. Si se quiere lograr otra generalización en la que se cumpla dicha propiedad se debe determinar la restricción más amplia de la primera generalización en la que se cumpla la mencionada propiedad y esto se logra imponiendo condiciones más fuertes a la primera generalización. Luego es necesario restringir la extensión de la primera generalización a partir de un fortalecimiento del conjunto de propiedades que la caracterizan. La determinación de una generalización con tal característica muchas veces requiere de un proceso. más o menos largo, de restricción – generalización. Para dar cumplimiento al segundo objetivo.

por lo general se requiere de un conjunto de generalizaciones.

Muchos conceptos matemáticos sirven de modelos conceptuales de conceptos de áreas no matemáticas. La generalización de un concepto matemático puede estar motivada por la necesidad de generalizar conceptos de otras áreas de las cuales él constituye un modelo. En este caso la cadena de generalizaciones – restricciones del concepto matemático está sujeta a las necesidades de áreas no matemáticas. Luego desde el punto de vista práctico, al generalizar un concepto matemático se persigue el objetivo siguiente:

iii) Obtener una generalización que sirva de modelo a una generalización de un concepto de un área no matemática.

El cumplimiento de este paso c) puede consumir mucho tiempo y puede estar permanentemente inconcluso, pues siempre cabe la posibilidad de mejorar uno de los objetivos anteriores.

Los pasos b) y c) constituyen el desarrollo de la generalización y por lo tanto el profesor debe pedir que se den varias opciones de conceptos a partir de los cuales se puede obtener una generalización del concepto con que se está trabajando, los alumnos deben proponer sus variantes y argumentar el porqué de su elección, deben debatir las propuestas y llegar a las conclusiones de cual tomar, teniendo presente el objetivo de la generalización y el contexto donde se imparta.

d) Utilizar un criterio de bondad para determinar la calidad de las generalizaciones hechas. Los criterios usuales, que se corresponden con los objetivos del paso c), son:

i) El cumplimiento por parte del concepto generalizado de un conjunto de propiedades del concepto de partida.

ii) La amplitud de la extensión del concepto generalizado. Para determinar cuál de las extensiones de dos generalizaciones de un concepto es la más amplia, es posible compararlas utilizando isomorfismos y la inclusión como orden, o utilizando la cardinalidad de las mismas.

iii) Su utilidad práctica en áreas no matemáticas.

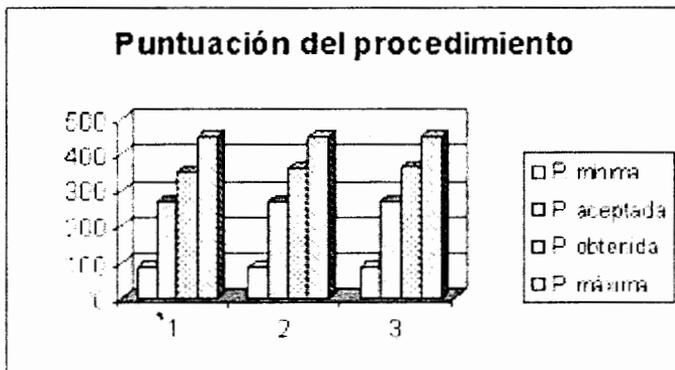
Este último paso d) constituye la evaluación del proceso realizado, aquí el profesor debe promover el debate de los resultados para que los alumnos valoren la calidad de las generalizaciones realizadas y en el caso de haberse hecho más de una resaltar la efectividad de cada una de ellas, en este paso tiene que lograrse además que los alumnos se cuestionen la conveniencia de nuevas generalizaciones o restricciones, o sea, hacer un análisis retrospectivo y prospectivo de las deducciones y valoraciones hechas, y además evaluar los resultados en el contexto de su trabajo.

### **Aplicación al estudio de los dominios numéricos y las series**

En la investigación se expone la preparación matemática que hay que lograr en los profesores para que partiendo del estudio de los dominios numéricos puedan acometer los procesos de generalización – restricción que conducen al estudio de las series, se expone la forma de obtener las series numéricas como una generalización de las sumas finitas, así como otras generalizaciones y restricciones de estos conceptos y de los operadores suma e integración. Para ello se plantea que es necesario estudiar adecuadamente las sumas finitas, y preparar sus propiedades para su generalización.

## Valoración del trabajo y conclusiones

Para la valoración del trabajo se utilizaron las ideas de Campistrous y Rizo (ver Campistrous, L. y Rizo, C. (1998)), sobre la utilización de escalas e indicadores. El análisis de los resultados demuestra que el procedimiento propuesto es superior a todo lo que los expertos conocían sobre el tema pues un simple cálculo de por ciento en cada uno de los indicadores nos ofrece que las opiniones favorables superan el 87,2%. No obstante con los resultados de los instrumentos aplicados se hizo un análisis estadístico que prueba la efectividad de nuestra propuesta como muestra el gráfico siguiente:



La realización de esta investigación nos ha permitido arribar a las siguientes conclusiones:

- 1) Las definiciones de las operaciones generalización y restricción de conceptos dadas, superan a las que tradicionalmente se han utilizado en la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior, según los resultados de las entrevistas a un grupo de profesores que recibieron estos contenidos y del método de expertos aplicado, e inciden favorablemente en la elaboración de los diferentes conceptos de los temas Dominios Numéricos y Series.
- 2) El estudio de los temas Dominios Numéricos y Series utilizando las definiciones y procedimientos propuestos supera a las formas tradicionales porque exige un profundo análisis de la preparación de las condiciones iniciales y un serio trabajo con las extensiones de los conceptos que se introducen, sin olvidar su contenido, para finalmente valorar los resultados del proceso desarrollado y sus implicaciones retrospectivas y perspectivas.
- 3) El procedimiento que se propone es un instrumento flexible que se puede adecuar al tema y condiciones específicas de la carrera y grupo con que se trabaje y representa una sucesión de indicaciones metodológicas que responden al modelo pedagógico histórico cultural.

## Referencias bibliográficas

- Ballester, S. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática I*. Ministerio de Educación. C. Habana.
- Campistruos, L & Rizo, C. (1998) *Indicadores e Investigación Educativa*. (Material en elaboración). Cuba.
- Davidov, V. (1981) *Tipos de generalización en la enseñanza*. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.
- Guetmanova, A. (1989) *Lógica*. Editorial Progreso. Moscú.
- Vigotsky, S. (1999) *Pensamiento y Lenguaje*. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba.