Reconstrucción de significados que realizan los estudiantes entre f y f´, cuando interactúan en ambientes gráficos

María Antonieta Aguilar Víquez
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA- IPN; México
auva5404@prodigy.net.mx

Resumen

La problemática que hemos venido atendiendo en los último años, de nuestra labor docente y como investigadores, es el que los estudiantes de nivel superior no son reflexivos, es decir no conceptualizan los teoremas, leyes, axiomas o principios de los conocimientos matemáticos particularmente en situaciones de Cálculo, ellos toman una actitud radicalmente pragmática y aprenden los procedimientos del Cálculo en un nivel puramente algorítmico que es construido sobre imágenes y gráficas escasas (Dreyfus, 1990). Esto les impide realizar abstracciones que les permitan resolver problemas cuando se enfrenten a nuevas situaciones. Por lo anteriormente planteado, es preciso, establecer el tipo de acercamientos teóricos y metodológicos con los cuales contamos para lograr abordar la solución de la problemática planteada de manera exitosa y que tanto maestros como estudiantes crezcamos en y con la adquisición de los conocimientos matemáticos tan relevantes e importantes en nuestro presente histórico para el desarrollo social y cultural de las naciones.

Introducción

Para iniciar con nuestro estudio y poder diseñar las situaciones hicimos una revisión de los diferentes marcos de referencia con los cuales los estudiantes interactúan en el medio escolar en donde se presentan de alguna manera relaciones entre F y F´, encontrando los siguientes:

a) Newton representaba a la integral como el "hallar la cantidad fluente (antiderivada) de una fluxión dada (derivada) (Cordero, 1994). Del enunciado anterior se desprende que la relación dada es **fluente y fluxión** o integral y derivada.
b) Leibnitz consideraba la integral como una suma "la integral es la **suma** de las **diferencias** entre dos estados de una cantidad" (Cordero, 1994, ibid).
c) Los Bernoulli interpretaban a la **integral** como la operación inversa de la **diferenciación** (Cordero, 1994, ibid).

Estas interpretaciones se han sintetizado en el **Teorema Tundamental del Cálculo,** pero en el medio escolar se ha favorecido alguna en particular de las tres señaladas. Nos intereso investigar las relaciones que los estudiantes establecen cuando se considera a estos tres marcos epistemológicos planteados de tal forma que se llegue a un entendimiento del teorema fundamental del cálculo a través del manejo de las gráficas de F y F´ articulándolos con los registros algebraicos que ellos realizan, pero esto se logra mediante la "reconstrucción" de lo que significa para ellos **antiderivada, derivada, suma de diferencias y diferencial.**

En los textos de Cálculo diferencial e integral que circulan en los medios escolares las relaciones que se establecen entre F y F´ son de tipo algorítmico y puntuales por ejemplo:

En la década de los 20s del siglo pasado circula una obra titulada "Le Calcul Différentiel" (Moreux, 1924) como lo sugiere el título solamente se aborda el cálculo diferencial, aparece la relación entre la derivada y su primitiva al hacer la tabulación correspondiente. Solo existe una descripción del comportamiento de la gráfica de la función primitiva e incluso la gráfica de F más no la de la derivada, esto impide que el estudiante establezca relaciones entre ambas funciones de manera global solamente lo haría a través de los puntos críticos, llegaríamos hasta F F′, es decir, hasta una expresión algorítmica. Así por el estilo abordan los diferentes autores de textos de todo el siglo XX las relaciones entre F y F′ . Nuestra propuesta es colocar a los estudiantes ante diferentes situaciones de Cálculo en donde se les cuestiona mediante entrevistas clínicas cuales son las gráficas de F y F′ , vemos las construcciones que realizan y mediante el análisis de las entrevistas verificamos los significados que los conducen a establecer relaciones entre la integral y la derivada, para diferentes funciones particularmente las funciones elementales (Guerrero, R., 1998).

Un ejemplo de este tipo de situaciones lo encontramos en (Aguilar, M. A., 2001). En donde a los estudiantes se les pide que dada la gráfica de F′ dibujen la de F, la representación algorítmica que realizan es la siguiente:

a) $F \longrightarrow F'$ b) $F' \longrightarrow F$ y c) $F'(x) \sim a$

En a) Los estudiantes verifican, gráficamente, un cambio de estructura.

En b) existe una nueva transformación, o cambio de estructura.

El significado de c), se refiere, a la asociación que hacen de la derivada con la constante que multiplica a la función primitiva.

Ellos, establecen también un enlace entre los contextos algebraico y grafico de F y F′ ya que realizan el proceso de "calcular la antiderivada" para después trazar la grafica de la función primitiva.

Los elementos didácticos de una nueva perspectiva consisten en poner en juego relaciones entre diferentes contextos, por ejemplo el algebraico y el gráfico, es lo que ocurre en la situación del ejemplo anterior. En estas transformaciones es en donde identificamos a la categoría **comportamiento tendencial de las funciones**, la cual genera argumentos cualitativos que determinarán nuevas acciones que consisten en un intercambio permanente entre contextos algebraicos y gráficos (Cordero, 1998; Cordero & Solís, 1997a, 1997b).

Marco teórico

El marco teórico en el que nos movemos, esta compuesto fundamentalmente por la teoría constructivista de Piaget y la teoría APOE de Dubinsky (Asiala, et al. , 1996), insertadas en la aproximación socioepistemológica, que ha sido madurada y profundizada por el grupo de investigación del área de educación superior del departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del Instituto Politécnico Nacional. La aproximación socioepistemológica, ha sido planteada por Cordero (2001) como una nueva hipótesis la cual consiste, entonces en que la **actividad humana es la fuente de la reorganización que implicará el "rediseño del discurso matemático escolar".**

Dicha línea de investigación contempla cuatro dimensiones; **Epistemológica, Cognitiva, Didáctica y Sociocultural**. A estos componentes en conjunto y en una aproximación sistémica se les llama aproximación socioepistemológica (Cantoral & Farfán, 1998), y una de sus tareas principales de investigación consiste en proporcionar evidencias para la nueva hipótesis, puesto que estas cuatro dimensiones guardan una aproximación sistémica significa que estarán estrechamente vinculadas una con las otras por tanto podríamos abordar al mismo tiempo una dimensión y las otras cuando realicemos el análisis de un aspecto del conocimiento del cálculo particularmente en las relaciones entre F y F′. En nuestro caso particular en cuanto al marco de referencia en el que estaremos trabajando es el de **la transformación** de las funciones derivada y primitiva cuyos **procedimientos** inciden en la variación de los coeficientes de la transformación de las funciones, en cuanto a **procesos y objetos** se refiere tenemos a las instrucciones que organizan comportamientos y en lo referente a los **argumentos** tenemos como eje central al comportamiento tendencial de las funciones. Sin embargo manejamos el concepto de derivada con varios significados: el límite de una función, la variación continua de cierta cantidad que fluye y la variación de parámetros de una función para organizar comportamientos, esto debido a que estos diversos significados en un contexto interactivo son componentes de la epistemología del cálculo, como resultado de la actividad humana, que en forma sencilla podríamos decir, se refiere a las formas de construcción en la escuela y consisten en la reconstrucción de significados. El humano se somete a usar la herramientas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y con ello reconstruye significados (Cordero, 1999).

Metodología

Se trata propiamente de un método y consiste en el desarrollo de seis etapas:

Etapa uno: parte de una experiencia epistemológica, estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, ahí se organiza dicho contenido matemático con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende (Cordero, 1998).

Etapa dos: se trabajan ejemplos de diseño e implementación de situaciones, haciendo uso de la tecnología, en la realización de actividades con estudiantes (que en nuestro caso serán entrevistados en grupos de tres), haciéndose las observaciones a través de dos vías; aprendizaje cooperativo y entrevista clínica.

Etapa tres: en ella se realizan análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsidera la experiencia que fue punto de partida. Las interpretaciones de las respuestas dadas por los estudiantes ante las situaciones, estarán basadas en el marco de las construcciones mentales; y en el desarrollo de estas ante las situaciones. Aquí se estudian las bases para transformar los datos o hechos en fenómenos didácticos.

Etapa cuatro: consiste en la iteración con el resultado de la etapa tres. Es una revisión de la experiencia epistemológica de la cual se partió en la etapa uno. El resultado provee los fundamentos de la siguiente aplicación de situaciones. Se establece una reformulación de las descomposiciones genéticas y se rediseñan las situaciones o implementaciones en una base *socioepistemológica*.

Etapa cinco: en ella se aplican o implementan los rediseños y se coleccionan los datos. Se trabaja (en la investigación presente) con estudiantes en grupos de tres, ya que en los trabajos de investigación previos a este llegamos a la conclusión de que en forma grupal, los estudiantes, realizan mayor número de construcciones y con mayor rapidez (Aguilar, M y Martínez, M, 1998; Aguilar, 1999).

Etapa seis: se podría denominar "etapa del análisis de datos y actualización de las descomposiciones genéticas". En ella se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento del cual se partió. Las interpretaciones continúan dentro del marco de las construcciones mentales.

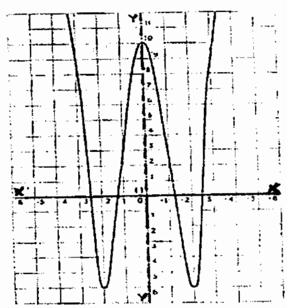
Análisis de la reconstrucción de significados

Presentamos dos ejemplos de situaciones al primero le denominamos Sa (situación antigua) y a la otra Ss (situación con significados).

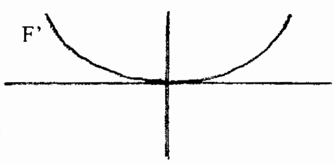
Sa dada la función $Y = x^4 + 8x^2 + 10$ construyen la tabla y la gráfica

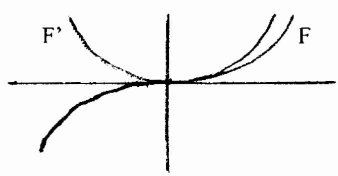
x	$-\infty$	...	-2	...	0	...	+2	...	$+\infty$
y′	...	$-$	0	+	0	-	0	+	...
y	$+\infty$	decrece	- 6 Min	crece	+10 max.	deccrece	-6 Min	crece	$+\infty$

En esta situación Sa, la gráfica proporciona datos puntuales de la función primitiva, como son: existe un máximo, dos mínimos, es decreciente en (- , 2)y (0, 2) creciente en (-2, 0) y (2,). En este ejemplo que presenta el texto de Moreaux (1924) es difícil el establecimiento de la reconstrucción de significados entre la derivada y la integral porque, pensamos, no hay congruencia entre contextos, es decir, aparece la gráfica de la primitiva pero no la de la función derivada que esta implícita en la tabla (en un contexto analítico). Es lo que ocurre actualmente en las aulas a pesar de que el ejemplo que vimos es extraído de un texto que data de principios del siglo XX. Ejemplos muy similares aparecen en los textos de las décadas, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980, 1990 (podríamos decir que es la década del esplendor de las calculadoras científicas y graficadoras).



Ejemplo 2 Situación Ss a los estudiantes se les pide que dada la gráfica de F′ tracen la de la función primitiva





Para esta situación la representación algorítmica sería:

a) $F \longrightarrow F'$

b) $F' \longrightarrow F$

c) $F'(x) \sim a$

En a) Los estudiantes verifican, gráficamente, un cambio de estructura.

En b) existe una nueva transformación, o cambio de estructura. Lo importante en estos dos cambios, es que los estudiantes, pudieron establecer que la relación entre la derivada y la primitiva es justamente el Teorema Fundamental del Cálculo, ya que parten de sus conocimientos previos para relacionar a esos con las gráficas de la primitiva y derivada, es decir dan significado a la parte algorítmica auxiliándose de las gráficas respectivas.

El significado de c), se refiere, a la asociación que hacen de la derivada con la constante que multiplica a la función primitiva, es decir en este caso, ellos, establecen "la gráfica de la función derivada es a la constante de la primitiva.

Resultados

Los estudiantes establecen un enlace entre los contextos analítico y gráfico de F y F′ cuando reconstruyen significados. Les es difícil reconstruir si existe incongruencia en los contextos.

Conclusiones

Cuando a los estudiantes se les coloca en una situación que les permita interactuar con las graficas de las funciones, ellos aprenden a:

- Identificar los efectos de los coeficientes tanto de F como de F′
- Establecer relaciones entre funciones
- Buscar **tendencias** en los comportamientos
- Reconocer patrones de comportamientos gráficos y analíticos

La noción de **transformación** se convierte en categoría del conocimiento matemático (Cordero, 1998) porque se trata de una noción medular de la reconstrucción de significados del Cálculo en la actividad humana o práctica social.

Referencias bibliográficas

Aguilar; M. (1999). *Relaciones entre la derivada y su primitiva; el papel del registro gráfico en algunas de las construcciones de los estudiantes.* . Tesis de Maestría, Dirección de estudios de posgrado, Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autonóma del Estado de Hidalgo. México.

Aguilar; M. & Martínez M. (1998). *Relaciones entre la derivada y su primitiva a la luz del comportamiento tendencial de las funciones; un estudio preliminar.* Trabajo de investigación presentado en el 2°. Seminario Nacional de Investigación de Didáctica de las Matemáticas. Monterrey, N.L. México.

Aguilar, M. (2001). *Relaciones entre la derivada y la primitiva; el papel del registro gráfico.* Actas XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. En prensa.

Asiala, M. & Brown, A. & Devries, D. & Dubinsky, E. & Matheeews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education.* CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education 2(6), 1-32.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguage variacional en la introducción del análisis,* Épsilon 42, 353-369.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construccion de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar.* Tesis Doctoral, CINVESTAV- IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Cordero, O. & Solís, M. (1997a). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo.* Segunda Edición, Serie Cuadernos de Didáctica Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Cordero, F. & Solis, M. (1997b). *Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales.* En R. Farfán (Ed.), Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (pp 69-73). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, O. (1998). *El comportamiento tendencial de las funciones como una categoria del conocimiento del Cálculo.* Rumec, México.

Cordero, F. (1998). *Notas sobre algunos conceptos de la Matemática y Cognición a la luz de una experiencia de investigación,* Cinvestav – IPN, México.

Cordero, F. (1998). *El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: El caso del comportamiento tendencial de las funciones.* Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 1(1), 56-74.

Cordero, F. (1999). *La matemática educativa en una aproximación sociocultural de la mente..* VII Simposio Internacional en Educación Matemática ElfriedeWenzelburger UNAM-UPN (pp. 106-112). México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana,* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 4, núm. 2, pp 103-128.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking In P. Nesher and J. Kilpatrick* (Ed.) Mathematics and cognition: A researchs synthesis by the International Group for the Psycology of Matemathics Education (pp. 113-134). Cambridge University Press.

Guerrero, R. (1998). *Propuesta Didáctica para apoyar la transferencia del registro gráfico al algebraico de funciones elementales,* Tesis de Maestría en Ciencias, Cinvestav – IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Moreux; A. (1924). *Le Calcul Différentiel,* Bibliotheque d´Education Scientifique, Paris.