# Construcción de funciones con calculadoras graficadoras

*Marcela Ferrari Escolá*
Cinvestav-IPN, México
mferrari@mail.cinvestav.mx

*Gustavo Martínez Sierra*
CICATA-IPN, México
gmartinezs@ipn.mx

## Resumen

Este taller surge con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. Nuestra perspectiva se basa en que, en términos de la construcción social del conocimiento, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como fórmula y con ello la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La puesta en funcionamiento, en situación escolar, de esta hipótesis epistemológica plantea retos didácticos, y por tanto metodológicos, que no son triviales. En particular el presente trabajo es el resultado de considerar a las calculadoras graficadoras como una *variable didáctica* para el diseño y puesta en escena de *ingenierías didácticas* para la construcción de funciones. Específicamente trataremos en esta ocasión la construcción de polinomios de variable real a través de operaciones gráficas.

## Introducción

Este taller surge con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. Según Cantoral & Farfán (1998), el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como fórmula y con ello la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. Su desarrollo se ha producido prácticamente a la par del humano ya que se encuentra presente en las correspondencias entre cantidades trabajadas en la antigüedad hasta los debates actuales, tanto en el ámbito de la comunidad de matemáticos como en su incorporación y presencia en la currícula actual.

Para Farfán (1992), entre las causas que hacen de la función uno de los conceptos matemáticos más difíciles de dominar y enseñar en la escuela, se encuentran las diversas concepciones y múltiples representaciones de ésta, potenciadas por el hecho que la enseñanza tiende a sobrevalorar la algoritmización y los métodos analíticos por encima del desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático. Por ello, consideramos interesante incorporar al discurso matemático escolar algunos de los elementos que permitieron la génesis del concepto de función, a saber, la visualización, la predicción, el reconocimiento de patrones, la analogía entre otros, para lo cual proponemos apoyarnos en herramientas tecnológicas como las calculadoras graficadoras para trascenderlas, es decir, mediante el diseño de situaciones matemáticas que permitan "independizarse" de su uso, generando un universo gráfico rico en significados.

Algunas investigaciones (Mirón, 2000; Penglase & Arnold, 1996) dan evidencia de que la utilización de calculadoras graficadoras ayudan a desarrollar una comprensión más global del concepto de función pues permiten visualizar sus gráficas y establecer relaciones entre éstas y expresiones algebraicas de las funciones correspondientes A su vez, los registros gráfico y numérico adquieren un nuevo estatus, pues permite a los alumnos comprende que los problemas algebraicos se pueden resolver gráfica o numéricamente tan bien como con la manipulación algebraica. En este sentido está dirigido nuestro taller, en donde resolveremos algunas situaciones matemáticas para la construcción de funciones utilizando las calculadoras graficadoras.

## Encuadre teórico y justificación

Dentro de la perspectiva de investigación en que está inmerso este trabajo nos interesan dos asuntos íntimamente relacionados: en primer lugar la hipótesis epistemológica que ha surgido de diversas investigaciones (Farfán, 1997), que han mostrado que para tener acceso a las ideas de Cálculo y al pensamiento variacional es necesario poseer un universo gráfico rico en significados que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de la enseñanza tradicional, el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. En segundo lugar nos ocupa el problema didáctico que surge como consecuencia de lo anterior y que estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto gráfico ya que, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, razón entre otras por lo que en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad.

Uno de lo primeros pasos que se han dado para tratar el problema didáctico mencionado con anterioridad es el de las *operaciones gráficas básicas* (más adelante presentamos los detalles) cuyo objetivo es el establecimiento de un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas (Farfán, 2000). Trabajos posteriores han puesto el acento en la *visualización de funciones* (Cantoral & Montiel, 2001) donde los elementos que entran en juego son predecir, bosquejar, imaginar, analizar y describir una gráfica, mismos que, en conjunto, pertenecen al proceso de visualización.

De acuerdo a lo anterior nuestro interés para este taller es, entonces, retomar y ampliar algunas de las ideas de los trabajos mencionados con anterioridad en lo que respecta a la construcción de gráficas de funciones.

### Primera parte: polinomios elementales y operaciones gráficas básicas

Consideramos conveniente en este momento realizar algunas actividades tendientes a estudiar los efectos gráficos que sufre la función $f(x) = x^n$ al variar el parámetro $n$ (= 1, 2, 3, 4...) utilizando el menú dinámico de la calculadora y su explicación desde las expresiones algebraicas. Luego investigar, de la misma manera, las funciones $f(x) = \mathrm{A}x^n$ y $f(x) = x^n + \mathrm{C}$, $y = (x + \mathrm{B})^n$ todos ellos para ($n$ = 1, 2, 3, 4...)

*Construcción de la gráfica de polinomios de primero y segundo grado a través de operaciones gráficas básicas*

De las conclusiones de las actividades anteriores se desprenden algunos principios de las *operaciones gráficas básicas* con funciones que presentan la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables al dar sentido gráfico a operaciones fundamentales tales como:

gráfico y numérico adquieren un nuevo estatus, pues permite a los alumnos comprender que los problemas algebraicos se pueden resolver gráfica o numéricamente tan bien como con la manipulación algebraica. En este sentido está dirigido nuestro taller, en donde resolveremos algunas situaciones matemáticas para la construcción de funciones utilizando las calculadoras graficadoras.

## Encuadre teórico y justificación

Dentro de la perspectiva de investigación en que está inmerso este trabajo nos interesan dos asuntos íntimamente relacionados: en primer lugar la hipótesis epistemológica que ha surgido de diversas investigaciones (Farfán, 1997), que han mostrado que para tener acceso a las ideas de Cálculo y al pensamiento variacional es necesario poseer un universo gráfico rico en significados que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de la enseñanza tradicional, el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. En segundo lugar nos ocupa el problema didáctico que surge como consecuencia de lo anterior y que estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto gráfico ya que, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, razón entre otras por lo que en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad.

Uno de lo primeros pasos que se han dado para tratar el problema didáctico mencionado con anterioridad es el de las *operaciones gráficas básicas* (más adelante presentamos los detalles) cuyo objetivo es el establecimiento de un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas (Farfán, 2000). Trabajos posteriores han puesto el acento en la *visualización de funciones* (Cantoral & Montiel, 2001) donde los elementos que entran en juego son predecir, bosquejar, imaginar, analizar y describir una gráfica, mismos que, en conjunto, pertenecen al proceso de visualización.

De acuerdo a lo anterior nuestro interés para este taller es, entonces, retomar y ampliar algunas de las ideas de los trabajos mencionados con anterioridad en lo que respecta a la construcción de gráficas de funciones.

### Primera parte: polinomios elementales y operaciones gráficas básicas

Consideramos conveniente en este momento realizar algunas actividades tendientes a estudiar los efectos gráficos que sufre la función $f(x) = x^n$ al variar el parámetro $n$ (= 1, 2, 3, 4...) utilizando el menú dinámico de la calculadora y su explicación desde las expresiones algebraicas. Luego investigar, de la misma manera, las funciones $f(x) = \mathrm{A}x^n$ y $f(x) = x^n + \mathrm{C}$, $y = (x + \mathrm{B})^n$ todos ellos para ($n$ = 1, 2, 3, 4...)

*Construcción de la gráfica de polinomios de primero y segundo grado a través de operaciones gráficas básicas*

De las conclusiones de las actividades anteriores se desprenden algunos principios de las *operaciones gráficas básicas* con funciones que presentan la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables al dar sentido gráfico a operaciones fundamentales tales como:

- $-f(x)$ y $f(-x)$: Reflexión respecto al eje $x$ y al eje $y$ respectivamente.
- $f(x+a)$ y $f(x-a)$, con $a > 0$: Traslación en la dirección del eje $x$, a la "izquierda" y a la "derecha" $a$ unidades respectivamente.
- $f(x)+a$ y $f(x)-a$, con $a > 0$: Traslación en la dirección del eje $y$, hacia "arriba" y hacia "abajo" $a$ unidades respectivamente.
- $a\,f(x)$, con $a > 0$: Contracción ($a<1$) o dilatación ($a>1$) respecto al eje $y$.

En términos de la construcción de funciones las operaciones anteriores nos abren la posibilidad de construir una amplia gama de funciones a partir de una, considerada como prototipo.

De esta manera es posible construir las funciones lineales de la forma $f1(x) = Bx + A$ $(B0)$ a partir del prototipo $g_1(x) = x$ al considerar las siguientes operaciones gráficas básicas:

a) dilatar o contraer la gráfica $g1$ por el factor $|B|$ respecto al eje $x$.

b) si $B<0$ reflejar respecto al eje $x$ .

c) Trasladar la gráfica anterior en la dirección del eje $y$ con lo que finalmente tenemos la gráfica de $f1$:"subir" (si $A>0$) o "bajar" (si $A<0$) $A$ unidades la gráfica anterior con lo que finalmente tenemos a $f1$.

**Ejemplo 1.**

La construcción de la gráfica de $y = -3x - 1$ puede ser hecha a través de la siguiente secuencia de operaciones gráficas básicas (ver figura 1):

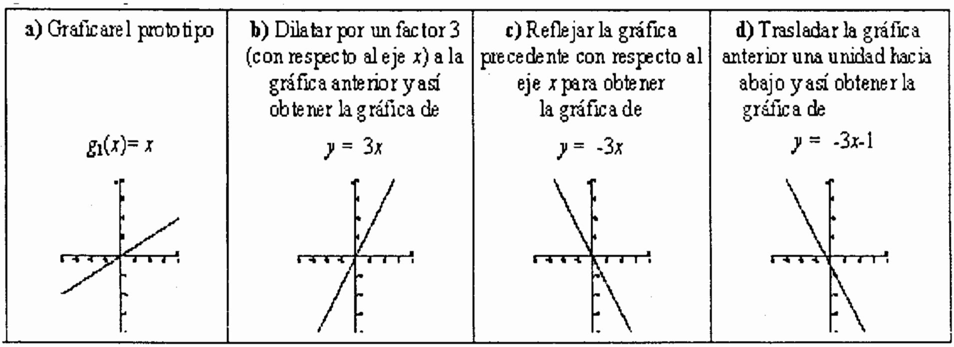



**Figura 1**

De manera análoga es posible construir las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f2(x) = Cx^2 + Bx + A$. El método se basa en la tradicional técnica de "completar el cuadrado" de la siguiente manera:

$$f_2(x) = Cx^2 + Bx + A = C(x^2 + \frac{B}{C}x + \frac{A}{C}) = C(x + \frac{B}{2C})^2 + \frac{A}{C} - \frac{B^2}{4C}$$

que puede ser escrita de la forma

$$f_2(x) = a(x-h)^2 + k$$

con

$$a = C, \quad h = -\frac{B}{2C} \quad \text{y} \quad k = \frac{A}{C} - \frac{B^2}{4C}$$

Por lo tanto es posible construir la gráfica de la función $f$ a partir del prototipo $g^2(x)=x^2$ al considerar las siguientes operaciones gráficas básicas:

a) Trasladar la gráfica $g_2$ en la dirección del eje $x$: $|h|$ unidades a la derecha si $h > 0$ o $|h|$ unidades a la izquierda si $h < 0$.

b) dilatar o contraer la gráfica resultante por el factor $|a|$ respecto al eje $x$.

c) si $a<0$ reflejar respecto al eje $x$ .

d) Trasladar la gráfica anterior en la dirección del eje $y$ con lo que finalmente tenemos la gráfica de $f_2$: "subir" (si $k>0$) o "bajar" (si $k<0$) $|k|$ unidades.

**Ejemplo 2.**

La construcción de la gráfica de $y = -2(x - 3)^2 +1$ puede ser hecha a través de la siguiente secuencia de operaciones gráficas básicas (Ver figura 2):

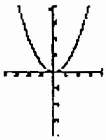
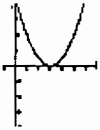
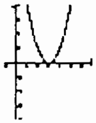
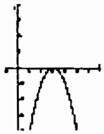
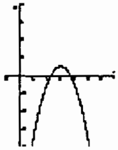
| **a)** Graficar el prototipo | **b)** Trasladar tres lugares a la derecha a $g_2(x)=x^2$ para obtener la gráfica de | **c)** Dilatar por un factor 2 (con respecto al eje $x$) a la gráfica anterior y así obtener la gráfica de | **d)** Reflejar la gráfica precedente con respecto al eje $x$ para obtener la gráfica de | **e)** Trasladar la gráfica anterior una unidad hacia arriba y así obtener la gráfica de |
|---|---|---|---|---|
| $g_2(x)=x^2$ | $y = (x-3)^2$ | $y = 2(x-3)^2$ | $y = -2(x-3)^2$ | $y = 2(x-3)^2 +1$ |
|  |  |  |  |  |

**Figura 2**

## Segunda parte: los polinomios como suma de funciones

### *Construcción de la gráfica de polinomios de segundo grado*

Si bien ya hemos estudiado la manera de construir las gráficas de los polinomios de segundo grado a través de operaciones gráficas básicas, la perspectiva que de aquí en adelante adoptaremos nos motiva a proponer actividades tendientes a estudiar los efectos gráficos de variar el parámetro A en la gráfica de la función $f(x) = x^2 + Ax$ utilizando el menú dinámico de la calculadora y argumentar sobre los efectos que se perciben. Estas actividades culminan solicitando que, sin utilizar la calculadora y sin evaluar, se "bosqueje" la gráfica de las siguientes funciones: $y = x^2 + 3x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 3$.

### *Construcción de la gráfica de polinomios de tercer grado*

En cuanto a las funciones cúbicas tenemos que es posible construir, mediante las operaciones gráficas básicas, a aquellas que tienen la forma . En este caso la secuencia de operaciones gráficas básicas es la misma que en el caso general anterior sólo que aplicada al prototipo $g_3(x)=x^3$.

El problema general que consiste en la construcción de la gráfica de una función cúbica cualquiera de la forma $f_3(x) = Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$ no puede ser resuelto sólo utilizando las operaciones gráficas básicas al prototipo $g_3(x)=x^3$. Tal situación es el resultado, en el plano algebraico, de que no siempre es posible "completar el cubo" para transformar la expresión $Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$ a la forma . Por ejemplo la expresión $x^3 + 3x^2 + 2x$ sólo puede ser escrita como $(x+1)^3 - x - 1$.

En el plano gráfico tal problema se presenta por la existencia de gráficas de funciones cúbicas que no son el resultado de aplicar una secuencia de operaciones gráficas básicas al prototipo $g_3(x)=x^3$ como por ejemplo la gráfica de $y = x^3 - x$ (Figura 3).

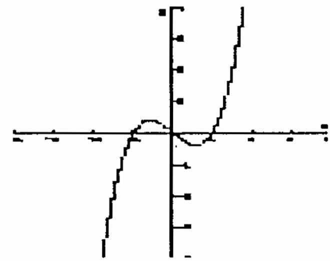


**Figura 3**

En vista de lo anterior resulta necesario explorar las diversas *posibilidades gráficas* de las funciones cúbicas las cuales exploraremos con la ayuda de la calculadora con capacidad de graficación.

Para ello primero hagamos algunas simplificaciones en cuanto a los parámetros en la expresión $f_3(x) = Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$:

- Ya que $f_3(x) = Dx^3 + Cx^2 + Bx + A = D(x^3 + \frac{C}{D}x^2 + \frac{B}{D}x + \frac{A}{D})$, la gráfica de $f_3$ es una contracción o dilatación de una gráfica de una función de la forma $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$. Entonces basta estudiar las formas gráficas de estas últimas.

- Como la gráfica de $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ es una traslación en la dirección del eje $y$ de la gráfica de $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x$, entonces basta con estudiar aquellas que tienen esta última forma.

- Ya que $y = x^3 + C_1x^2 + C_2x =$

$$\left(x+\frac{C_1}{3}\right)^3 + \left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right)x - \left(\frac{C_1}{3}\right)^3 = \left(x+\frac{C_1}{3}\right)^3 + \left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right)\left(x + \frac{C_1}{3} - \frac{C_1}{3}\right) - \left(\frac{C_1}{3}\right)^3 =$$

$$\left(x+\frac{C_1}{3}\right)^3 + \left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right)\left(x + \frac{C_1}{3}\right) - \left(\frac{C_1}{3}\right)\left(C_2 - 3\left(\frac{C_1}{3}\right)^2\right) - \left(\frac{C_1}{3}\right)^3$$

entonces su gráfica es una traslación en la dirección del eje $x$ de una de la forma $y = x^3 + D_1x + D_2$ cuya gráfica es la traslación en la dirección del eje $y$ de la gráfica de la forma $y = x^3 + D_1x$.

De acuerdo a todo lo anterior entonces el estudio para determinar todas las formas gráficas de las funciones cúbicas puede ser reducido al estudio de aquellas de la forma $y = x^3 + D_1x$. (Que bien podemos llamar del tipo $x^3$ + "recta"). Ahora procedamos a una exploración con la calculadora con capacidad de graficación. Para ello, se solicita estudiar y argumentar sobre los efectos gráficos que sufre la gráfica de la función $y = x^3 + Ax$ al variar el parámetro $A$ (utilizando el menú dinámico de la calculadora). Se hace pertinente investigar ¿Qué pasa cuando $|A|$ es pequeño? Y, sin utilizar la calculadora y sin evaluar, "bosquejar" la gráfica de funciones como las siguientes: $y = x^3 + 3x^2 + x + 2$, $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

*Construcción de la gráfica de polinomios de cuarto grado*

La propuesta de este apartado es explorar la construcción de todas las *posibilidades gráficas* de los polinomios de cuarto grado de la forma $f_4(x) = Ex^4 + Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$, ya que es posible reducir su estudio, mediante consideraciones parecidas a las hechas con las funciones cúbicas, a aquellas que son de la forma $y = x^4 + Ax^2 + Bx$ y discutir sobre el ¿por qué? de esta consideración y sobre la potencialidad de la misma para generar nuevos significados.(Que bien podemos llamar del tipo $x^4$ + "parábola").

Las actividades propuestas para este apartado siguen los lineamientos planteados en los parágrafos anteriores por lo que no serán desarrollados en extenso.

**Tercera parte: los polinomios como producto de funciones**

En este apartado se problematizará sobre la construcción de polinomios de segundo y tercer grado mediante el uso de la operación gráfica "producto". Así, se propone reflexionar sobre las formas de una parábola (polinomio de segundo grado) como el producto de dos rectas (polinomio de primer grado) así como también, estudiar las funciones cúbicas como producto de parábola y recta.

Para este estudio se hace relevante analizar el significado gráfico de las raíces o ceros de las funciones ya que éstos en un producto permanecen constantes. ¿Qué significa una raíz simple, una doble o una de multiplicidad 3? Son cuestiones que se propone investigar mediante el recurso de la calculadora graficadora. ¿Cómo obtener las distintas gráficas de las parábolas y de las cúbicas mediante el producto de funciones más simples?

## Conclusiones

Este taller fue diseñado con el propósito de profundizar y construir nuevos significados en torno a uno de los conceptos centrales del Cálculo, la noción de función. En el mismo, consideramos a las calculadoras graficadoras como una *variable didáctica* para el diseño y puesta en escena de *ingenierías didácticas* para la construcción de funciones. Este acercamiento se basa en que, en términos de la construcción social del conocimiento, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como fórmula y con ello la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La puesta en funcionamiento, en situación escolar, de esta hipótesis epistemológica plantea retos didácticos, y por tanto metodológicos, que no son triviales.

Específicamente tratamos la construcción de polinomios de variable real a través de operaciones gráficas con el fin de dejar en los asistentes la inquietud de seguir investigando, analizando y profundizando en la construcción de gráficas de polinomios desde esta perspectiva.

## Referencias bibliográficas


Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Épsilon. Revista de la S.A.E.M. "Thales" 42, pp.353-369.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall

Farfán, R. & Albert, A. & Arrieta, J. (2001). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*. Cuadernos Didácticos, Casio. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1992). *¿Matemática Educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe*. En R. Cantoral, R. M. Farfán & C. Imaz (Eds.), Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa . México. Vol 2, Sección de Plenarias. pp.236-253.

Mirón, H. & Cantoral, R. (2000). *Sobre el estatus de la noción de derivada.: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica*. Relime 3(3), pp.265- 292

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). *The graphics calculator in Mathematics Education: A critical review of recent research*. Mathematics Education Research Journal 8(1), pp.58-90.