

El concepto de dimensión: errores y dificultades

Jorge Edgar Páez Ortegón

jopaez@uni.pedagogica.edu.co

Claudia Patricia Orjuela Osorio

cporjuela@uni.pedagogica.edu.co

Profesores Universidad Pedagógica Nacional

Clara Emilse Rojas Morales

clara.rojas@uptc.edu.co

Profesora Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Resumen

El documento describe algunos errores y dificultades en relación con el objeto matemático dimensión resultado de una experiencia investigativa del grupo fractales DMA-UPN. Se pretende mostrar la complejidad del concepto de dimensión debido, entre otras razones, a que se le ha atribuido poca importancia, dejando su conocimiento como una idea intuitiva, con poco significado, en donde prevalecen imágenes conceptuales previas, relacionadas con la percepción del mundo físico o a la representación gráfica de objetos.

Introducción

El siguiente documento presenta una breve descripción y análisis de una experiencia de aula inscrita en un curso electivo de Geometría Fractal, en el marco de las acciones investigativas del grupo Fractales-DMA-UPN, la experiencia muestra algunas de las dificultades y errores que se presentan en el estudio alrededor del concepto de dimensión. Se parte de la idea que el estudiante no reconoce la transversalidad del concepto de dimensión en forma articulada dentro de su formación en matemáticas, obteniendo como resultado que evoque de manera memorística un enunciado verbal producto de su escolaridad, sin que ello conlleve a la comprensión de éste. Se resalta que para los estudiantes romper con sus esquemas mentales previos sobre *dimensión* no es un proceso fácil, pues implica en muchos casos reemplazar y acomodar las imágenes conceptuales o conservar las que ya se tienen.

El concepto de dimensión puede ser considerado de gran importancia en la Matemática, porque es una fuente de comprensión para otros conceptos de la disciplina misma, pero a la vez de difícil conceptualización, debido a su complejidad para poderse definir, además el hecho de considerar que al interior de las matemáticas se utiliza de diversas maneras dependiendo del área en la cual se esté trabajando.

De manera informal, se dice que la dimensión es la forma como se pueden ver las cosas, o el punto de vista como se presenta un determinado fenómeno en un contexto determinado; Si se toma de referencia las enciclopedias, se encuentra el concepto como una de las propiedades del espacio, se usa para definir un volumen necesitando tres medidas (dimensiones): longitud, ancho y alto; En matemáticas y en física se usa un concepto de dimensión más abstracto, a menudo se utilizan espacios con cuatro o incluso con un número infinito de dimensiones. Se habla también, que la *dimensión se refiere al grado de libertad de movimiento de un objeto en un espacio determinado*. Se entiende esta



libertad como el número de direcciones ortogonales diferentes que se puede tomar. De hecho, en la geometría euclidiana las únicas dimensiones posibles son las que corresponden a los números enteros: 0, 1, 2 y 3. Otra forma de definir la dimensión, es con *la cantidad de coordenadas necesarias para determinar un objeto en el espacio*, así mismo, se define como el número de direcciones ortogonales diferentes que se puedan tomar. En álgebra lineal, se usa un concepto de dimensión más abstracto como es *el número de vectores de la base*; a menudo se utilizan espacios con cuatro o incluso con un número infinito de dimensiones

Para el diseño de la experiencia se tienen en cuenta varias hipótesis, apoyadas en un trabajo previo de clase que se llevaba a cabo con el grupo. En primer lugar, se asume que los estudiantes, ya poseen un bagaje matemático que les permite poner en juego en situaciones didácticas, sus imágenes mentales sobre el concepto de dimensión. Se descarta que su conocimiento sea netamente intuitivo, lo que garantiza un ambiente favorable para el desarrollo de la experiencia de aula. Segundo, los fractales son en sí mismo objeto de interés para los estudiantes: a partir de su análisis y manipulación surgen nuevas relaciones o modelos con muchos ejemplos en la naturaleza o en la realidad cotidiana que tienen carácter de fractal, y en su descripción tienen que recurrir a los elementos que definen los fractales. Tercero, el reconocimiento del concepto de dimensión desde la educación escolar evidencia que se ha restringido al establecimiento de representaciones visuales asociadas con la intuición, para clasificar objetos geométricos y del mundo real en dimensiones enteras, sin detenerse a definir a que se refiere el concepto.

Desde otro aspecto, la experiencia investigativa se apoyó de la didáctica como una disciplina autónoma, lo que impone al grupo investigador la tarea de configurar un dominio de estudio teórico específico sobre la temática de la dimensión con su correspondiente incidencia en la práctica, debido a que los procesos de enseñanza y aprendizaje y la determinación del sentido del conocimiento adquirido por los estudiantes y su control, dependen del propio saber matemático y de las situaciones propuestas a los estudiantes haciendo énfasis en los registros de representación. Para la propuesta se tuvo en cuenta, distintas corrientes en la investigación en Educación Matemática, respecto a la cognición en matemáticas "*Las matemáticas y la cognición*" (Dreyfus, 1991), "*Abstracción matemática y generalización*" (Dubinsky, 1992), "*Formas de representación de objetos matemáticos*" (Sfard, 1991; Tall, 1994, 1995), "*Definición de conceptos matemáticos, esquema conceptual*" (Tall y Vinner, 1981, Tall 1991).

Metodología

La investigación es un estudio de tipo cualitativo bajo la metodología de Estudio de Caso. La confiabilidad de la investigación se sustenta en la planeación cuidadosa de las actividades y los métodos de recolección, análisis y presentación de la información. El trabajo investigativo se aborda inicialmente de manera intuitiva evocando algunos de los significados que adopta el término desde las ideas previas que poseen los estudiantes, para luego ser abordado desde el dominio de las matemáticas, para ello se retoman definiciones desde la geometría euclidiana, la geometría analítica, el cálculo, el álgebra lineal y la topología, siendo éstos los espacios académicos en la Licenciatura que tratan el concepto. Por otro lado, se retoman algunas aproximaciones desde el marco histórico que permiten ilustrar como evoluciona el concepto de dimensión lo que revelará la complejidad del concepto a la hora de orientar el proceso de enseñanza aprendizaje. Luego, se ejemplifica el concepto de dimensión mediante la relación que se puede establecer entre la razón y las partes semejantes de un objeto euclidiano y fractal, seguido de esto se busca determinar la dimensión de una hoja de papel, cuestionando la existencia de objetos de la naturaleza con dimensiones enteras. Se presenta también los métodos para hallar la dimensión de objetos tanto autosemejantes como de curvas irregulares.

A continuación se mencionarán algunas de las situaciones de clase que a través de protocolos se describe algunos de los errores y dificultades que se presentan en torno al concepto de dimensión.

En primera instancia, se diseñó la prueba de entrada, la cual tenía como finalidad buscar e identificar las nociones e ideas previas de los estudiantes acerca del concepto de dimensión y lograr un acercamiento a la caracterización de las imágenes conceptuales que poseen los estudiantes después de su escolaridad. En relación con los resultados obtenidos se pudo analizar desde dos puntos de vista, por un lado el concepto de dimensión esta asociado a una idea intuitiva en la percepción del mundo físico; por otro lado, se intenta definir el concepto a partir de la asociación de características a partir de la experiencia para la formación del conocimiento. Esto se evidencia en la pregunta ¿qué entiendes por dimensión? A la cual, los estudiantes respondieron:

Protocolo 1:

Est 1: Mi idea intuitiva de dimensión es aquel espacio donde las figuras toman una forma mucho más abstracta

Est 2: Mi idea de dimensión es un espacio limitado por su forma

Est 3: Yo creo que la dimensión es lo que se percibe una cosa. Dimensión se podría explicar como algo que ocupa no solo un plano sino que involucra también el espacio

Est 4: No lo tengo bien establecido, ya que tengo ciertas nociones, pero no tengo la definición bien clara y precisa

De las respuestas se deduce que prevalece el reconocimiento del concepto de dimensión asociado a una idea intuitiva, a partir de la percepción de los objetos del mundo físico relacionada con una representación gráfica o visual, o con experiencias vividas, pero aún sin lograr precisar una definición, así mismo que a pesar de haber cursado algunos de los espacios académicos de la licenciatura donde se aborda el concepto de dimensión; si posee una idea pero no sabe como expresarla, o definitivamente no reconoce a la dimensión como un concepto.

Las respuestas al segundo interrogante, en relación a la representación gráfica de objetos que posean dimensión entera $(0,1,2)$, permitían evidenciar y determinar la imagen conceptual que asocian los estudiantes al significado de objetos de dimensión entera; que hace referencia a la estructura cognitiva de asociada al concepto; así mismo prevalece la definición personal a la definición formal.

Al analizar las respuestas dadas a los dos interrogantes anteriores se puede hacer un análisis comparativo y obtener las siguientes conclusiones:

- Se identifica que los estudiantes no poseen una imagen conceptual de la dimensión y, por tanto, no tienen un acercamiento al concepto, ésto se debe a que generalmente dependiendo de la representación gráfica de un objeto se le asocia algunas veces su conocimiento (ya que al recordarla y/o plasmarla en un papel se identifica sus características) al no obtener un apoyo visual, no se puede construir un prototipo del concepto.
- El hecho que todos los estudiantes representen gráficamente un punto para un objeto con dimensión 0, una recta con dimensión 1, un plano con dimensión 2 y un cubo para la dimensión 3; muestra que su razonamiento (conceptualización) se centra en la representación proporcionadas por el estudio en la geometría Euclidiana.
- Doce estudiantes no recuerdan el concepto de dimensión pero lo asocian a una imagen no estándar, por ejemplo, para objetos que posean dimensión dos, se representa además un plano, objetos como rectángulos, cuadrados, triángulos, rombos, entre otras. así mismo, para representar objetos que habiten en la tercera dimensión, paralelepípedos, esferas, entre otras. Se evidencia que su razonamiento se centra en la propiedad que la dimensión depende de la forma que toma y/o puede tener un objeto en el espacio



A S O C O L M E

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Lo referente a la tercera pregunta: *¿Existen objetos cuya dimensión esta entre 0 y 1, 1 y 2, 2 y 3? Explica*

La mayoría de los estudiantes manifiestan su desconocimiento sobre la posible existencia de objetos que posean dimensión no entera, a continuación se presentan algunas respuestas.

Protocolo 2:

Est : Yo, pienso que la dimensión es solamente 1, 2 o 3, porque si aceptamos dimensiones entre 1 y 2, encontraríamos infinitas dimensiones entre dos enteros y la pregunta será ¿Qué características tiene cada uno de esas dimensiones?

Las respuestas de los estudiantes proporcionaron al grupo de investigadores evidenciar la dificultad al intentar definir el concepto de dimensión (no es fácil de precisar o se desconoce tal definición); así mismo, no es usual preguntarse por determinadas dimensiones diferentes a la Euclídea, es decir, alejarse un poco del pensamiento geométrico tradicional, la relación entre la dimensión y el espacio que ocupan las figuras, el conflicto en aceptar la existencia de objetos con dimensión no entera y por último cuestionarse sobre las posibles características que debían tener esos objetos para ser enmarcados en dimensiones no enteras. En los estudiantes se presenta incertidumbre, asombro y conflicto en relación con la existencia de objetos que no posean dimensión entera; sin embargo, algunos (dos estudiantes) al parecer sí se han preguntado y se cuestionan esta existencia, pero se les dificulta explicar de qué posibles objetos se tratarían.

A manera de conclusión

El concepto de dimensión tiene un significado matemático muy amplio, y por lo tanto consta de una pluralidad de definiciones. La medición de formas fractales ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido.

Por otro lado, se evidencia en los protocolos, que los estudiantes poseen una imagen conceptual asociada a procesos, propiedades, representaciones visuales o experiencias vividas, sin precisar una definición, además caracterizan el concepto de dimensión relacionado con la percepción del mundo físico, en este caso, el determinar la dimensión de la hoja de papel, un objeto de la vida real que convive a diario con el estudiante, y del cual pocas veces, se detiene a analizar y en particular determinar la dimensión.

Bibliografía

ORJUELA, C y ROJAS, C. 2006. "El concepto de dimensión más que una idea intuitiva". Tesis de Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

PEITGEN, O y SAUPE, D. et al. (1991). "Fractals for the class room, strategic activities". Vol. 1. New York: Springer Verlag.

TALL, D. O., VINNER, S. (1981). "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity". Educational Studies in Mathematics, 12(2).pp.151-169.