

Resumen

Se describe la manera en que se planeó y desarrolló un curso de Cálculo Diferencial e Integral a lo largo de un año de actividades con un grupo de alumnos de tercer año del Colegio de Ciencias y Humanidades (nivel medio superior). Se realizaron 10 prácticas, una por semana, con calculadoras graficadoras TI-92. En el artículo se informa acerca del avance y las dificultades que los estudiantes tuvieron durante el desarrollo del curso; de las actitudes observadas y de los procesos de pensamiento detectados. Se presentan, además, las prácticas que se realizaron, su concepción, adecuación y diseño.

Presentación

El significado de una función es uno de los conceptos fundamentales en la comprensión de las Matemáticas. Dado que aparece frecuentemente en cualquier tópico que se estudie, es necesario que el estudiante tenga una idea clara y precisa, en el nivel medio superior, de lo que significa. Aunque el estudiante ya ha investigado funciones lineales y cuadráticas (y algunas funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales), en cursos anteriores al curso de Cálculo, el concepto de función no alcanza todavía la profundidad e importancia que debe tener. Entre las posibles razones por las que esto ocurre, se debe a que la mayor parte de las gráficas de funciones que el estudiante ha construido, por tabulación, sólo las hace en regiones bien delimitadas del plano cartesiano y a que casi todas ellas presentan características “familiares” (no problemáticas) en el plano (como es el caso de la parábola y de la recta) (Thom, 1978). En lo que se refiere a las funciones trascendentes, no es muy común que, antes de que el alumno inicie el estudio del Cálculo, examine con detenimiento las gráficas de estas funciones, aunque sí lo haga con respecto a sus propiedades algebraicas, lo cual no implica que el estudiante las identifique como funciones. (Mueller, 1999.)

Con el propósito de reforzar la idea de función en el estudiante, se decidió elaborar, por un grupo de profesores en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), una serie de prácticas que apoyaran la enseñanza del Cálculo (Schneider, 2000), centrada en el concepto de función. Describiremos a continuación, el diseño y aplicación de cada una de las prácticas; los conceptos e ideas que se desean desarrollar en el alumno en cada una de ellas y los resultados que se dieron.

Desarrollo

Las prácticas se aplicaron a un grupo de 28 alumnos que cursaban por vez primera Cálculo. Este número de alumnos no fue seleccionado previamente, sino que, debido al Plan de Estudios del CCH (CCH, 1996), los estudiantes se inscriben optativamente a Cálculo, según la carrera profesional que desean estudiar en el nivel superior, y es muy común que seleccionen Estadística y Probabilidad, que también es optativa, en lugar de Cálculo, dado que pocos ingresan a carreras de Ingeniería o de Matemáticas. Es frecuente que los grupos de Cálculo son reducidos, porque el estudiante evita en lo posible afrontar las Matemáticas por distintas razones. Cabe anotar que en el artículo sólo se presentan las prácticas de Cálculo Diferencial.

En el CCH los semestres son de 16 semanas. En Cálculo cada semana se imparten dos clases de dos horas cada una. Esto nos llevó a programar una práctica por semana con duración de 2 horas. La otra clase semanal se empleaba para discutir conceptos o introducir temas nuevos mediante problemas, que también se incluyeron durante el curso, y que servirían para apoyar las prácticas. Las 10 prácticas que se aplicaron durante el curso son las siguientes (se describe con los incisos a) su contenido y b) su propósito):

- Práctica 1: Uso de la calculadora graficadora.
 - a) Se mostró el uso de cada pantalla de la calculadora graficadora TI-92, la barra de herramientas y el área de funciones.
 - b) Se inició el estudio de algunas gráficas de polinomios que se obtuvieron al resolver problemas. Se familiarizó al alumno con el manejo de la TI-92 mediante la realización de gráficas.
- Práctica 2: Gráficas de problemas.
 - a) Se graficaron funciones resultantes de problemas cuya solución es una función exponencial.
 - b) Los principales objetivos de esta práctica consisten en la crítica del método de tabulación para determinar la gráfica de una función y que se considere la posible no linealidad de los problemas. Si el estudiante realiza la gráfica en una región pequeña del plano, es muy probable que concluya que se trata de una recta.
- Práctica 3: Investigar gráficas de funciones. Asíntotas verticales.
 - a) Se inicia el estudio de funciones racionales y también del dominio y rango de una función. Se examina el problema de la división por cero. Construcción de tablas.
 - b) Se hacen aproximaciones graduales a un punto con el cursor de la TI-92 para que se estudien límites laterales y límites en un punto. Se discute la existencia y no existencia de un límite en un punto.

Práctica 4: Investigar límites.

- a) Se calculan límites de polinomios y de funciones racionales con la calculadora graficadora y se examina y discute la razón por la que la máquina entregó tal o cual resultado.
- b) Se espera una argumentación gráfica del resultado de parte del estudiante. No sólo es importante el cálculo del límite sino también su interpretación.

Práctica 5: Área como límite de sumas.

- a) Se calculan mediante sumatorias de áreas de figuras inscritas o circunscritas, las áreas de figuras geométricas. Por ejemplo, se calcula el área de triángulos inscribiendo cuadrados; o inscribiendo círculos, etcétera.
- b) El propósito consiste en que el alumno determinará que los límites no sólo aparecen al determinar el comportamiento de una función en un punto (o al infinito), sino que también se aplican en procesos de exhaustión, lo que será de importancia en el Cálculo Integral.

Práctica 6: Asíntotas horizontales.

- a) Se estudian límites al infinito, tanto en polinomios como en funciones racionales. Se

examinan los casos en los que una función racional tiene asíntotas horizontales y cuando no las tiene.

- b) Esta práctica consiste en que el estudiante calcule los límites al infinito por inspección, y los utilizará como apoyo de la gráfica de una función.
- Práctica 7: Rectas tangentes en un punto de una función. Límite de Fermat.
 - a) Se inicia el estudio de las pendientes de las rectas tangentes a una función en un punto. Es decir, se buscarán métodos que faciliten el cálculo de puntos cuyo conocimiento facilitarían la gráfica de una función. Puntos críticos.
 - b) Principalmente se propiciará que el estudiante deduzca los conceptos de función creciente y decreciente. Que deduzca el valor que tiene la pendiente de la recta tangente a la función en los puntos críticos y, en general, que intuya un procedimiento para determinar los puntos críticos de una función. El límite de Fermat es muy útil para discutir la necesidad de la derivada.
- Práctica 8: La derivada y reglas de derivación.
 - a) Uso de la TI-92 para calcular derivadas de funciones racionales, polinomios y funciones algebraicas. Contrastación del resultado con el trazo de rectas tangentes en la pantalla de graficación de la calculadora.
 - b) Aplicación de las reglas de derivación. Análisis de la derivada como una función y gráfica de la misma. Discusión de dicha gráfica.
- Práctica 9: Criterio de la primera derivada.
 - a) Uso y justificación del criterio de la primera derivada para realizar gráficas.
 - b) Realización de gráficas de funciones racionales, algebraicas y polinomios.
- Práctica 10: Criterio de la segunda derivada.
 - a) Uso y justificación del criterio de la segunda derivada para realizar gráficas.
 - b) Realización de gráficas de funciones racionales, algebraicas y polinomios.

Adicionalmente se realizaron dos prácticas de apoyo, en una se trató la obtención de raíces de funciones racionales y polinomios; en la otra se construyeron polinomios y funciones racionales dadas sus raíces y puntos de discontinuidad al infinito. Estas prácticas se realizaron únicamente por razones de manejo de comandos de la calculadora.

Entre las principales conjeturas que los estudiantes establecían, corroboraban o falsaban, y que no formaban parte de las prácticas sino que eran sugeridas e investigadas por ellos con el uso de la calculadora graficadora, están las siguientes:

- En la investigación de los límites al infinito, lograron la explicación de su significado geométrico, apoyándolo con el cambio de valores en la ventana de la TI-92, sin ninguna indicación previa.
- Se discutió el concepto de existencia de límites y se dio una definición informal de continuidad de una función en un punto.
- Construían funciones diseñadas por ellos mismos, para las cuales conjeturaban, antes de graficar, la posición de los puntos críticos.
- Establecieron que la derivada ayuda a calcular todos los puntos críticos de una función en el plano. En particular, para los polinomios, establecieron que el grado de la derivada da el número máximo de los puntos críticos.
- Dedujeron el criterio de la primera derivada como procedimiento para decidir el tipo de puntos críticos de una función.

- En casos en los que una función no tuviese puntos críticos, se apoyaron en límites y búsqueda de raíces para conjeturar la forma de la gráfica.
- La gráfica se pensaba en términos no locales, es decir, modificaban la ventana de la calculadora, para verificar si sus conjeturas en todo el plano eran válidas. Esto permitió que los conceptos de dominio y rango se adujeran como argumento a favor de la gráfica de la función.
- En los problemas de aplicación se discutía el significado de la gráfica, el dominio y rango de la función y los valores que tenían sentido como posibles soluciones del problema.

Cabe anotar que a los estudiantes se les evaluó la graficación de funciones con calculadora y sin ella. Aunque no era nuestro propósito contrastar la influencia de la calculadora en la enseñanza del Cálculo, creemos que el uso continuo de ella en el salón de clases, permite el contraste inmediato de conjeturas y la discusión de conceptos, al grado de que el estudiante puede anticipar, como ocurrió durante el curso, métodos o procedimientos de manera natural. (Lund, 1996)

Conclusión

Las prácticas descritas contemplan el Cálculo Diferencial, pero ya se tienen preparadas las relativas al Cálculo Integral. Estas se aplicarán y revisarán para su mejora en el semestre que está por iniciar. Sin embargo, creemos que el uso de la calculadora como herramienta de apoyo en el curso es de utilidad extraordinaria para corregir errores algebraicos y conjeturas falsas que distorsionan los conceptos matemáticos (Steen, 1990). No creemos que un estudiante maneje el concepto de función si no sabe que necesita especificar el dominio y el rango de ella, además de interpretar su gráfica. Nuestro propósito es que el alumno resuelva más problemas prácticos, se estudien los parámetros de una función, las sucesiones y los teoremas del valor medio y de Rolle. Esto ya ha sido investigado en un grupo de alumnos en años anteriores y esto se usará para conformar una serie de prácticas adicionales junto con las que ahora se presentan.

Referencias bibliográficas

- CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades). (1996) *Programa de estudios de Cálculo Diferencial e Integral I y II*. CCH-UNAM.
- Lund, C. & Andersen, E. (1996). *Introduction to the TI-92: 37 experiments in Precalculus and Calculus*. Mathware.
- Mueller, U. & Forster, P. (1999). *Graphics calculator use in the public examination of Calculus: Experience of the first year*, en W. Yang et all (eds.) *Proceedings of the Fourth Asian Technology Conference in Mathematics*. ATCM. 86-95.
- Thom, R. (1978) *Matemáticas modernas y matemáticas de siempre*, en J. Hernández. J. Piaget. G. Choquet, J. Dieudonné. *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Alianza.
- Schneider, M. & Gilligan, L. G. (2000). *Exploring Calculus and Differential Equations with the TI-89 and TI-92 plus*. Gilmar Publishing.
- Steen, L. (1990). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. National Research Council.