

Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal

Julia Xochilt Peralta García

Instituto Tecnológico de Sonora, México

jperalta@itson.mx

José Luis Soto Munguía

Universidad de Sonora, México

jlsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se reportan en este artículo los primeros resultados de una investigación en curso sobre algunas dificultades de aprendizaje relacionadas con el concepto de función lineal. La investigación está basada en los aportes teóricos de R. Duval sobre registros de representación semiótica y tiene dos propósitos: se trata de detectar las dificultades enfrentadas por los estudiantes para transformar una representación en otra (de una función lineal) y además diseñar una serie de actividades didácticas que les ayuden a superar las dificultades detectadas. Los resultados reportados aquí provienen de la aplicación de un cuestionario a nueve estudiantes de segundo semestre de licenciatura del área económico administrativa. Se expone el cuestionario aplicado, las respuestas de los estudiantes y se analizan estas respuestas a la luz de la teoría de Duval.

1 Introducción.

Los modelos lineales son importantes en matemáticas porque permiten resolver aquellos problemas de la ciencia que se comportan linealmente y aproximar otros cuya modelación es no lineal. Las funciones reales de variable real, que tienen la forma $f(x) = ax + b$, son uno de los modelos lineales más simples y representan para muchos estudiantes el primer contacto formal con el concepto de función. De aquí el interés mostrado por algunos investigadores, en explicar las dificultades de aprendizaje enfrentadas por los estudiantes para entender aquellas nociones relacionadas con las funciones lineales, véase por ejemplo Duval (1993), Schoenfeld (1993) y Hitt (1996).

En el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), en México, los estudiantes abordan el tema de funciones lineales en el marco de sus aplicaciones a la economía, durante el segundo semestre de su licenciatura. Sus dificultades para resolver problemas de *oferta y demanda* que se modelan linealmente son considerables y los errores que cometen al resolverlos indican que su concepto de función lineal es muy pobre.

En este artículo se reportan los primeros resultados de una investigación en curso que se llevará a cabo en dos fases:

- a) En la primera se pretende establecer cuáles son las dificultades enfrentadas por los estudiantes cuando intentan pasar de una representación a otra de una función lineal, mientras realizan actividades que involucran representaciones gráficas, algebraicas y tabulares de estas funciones.
- b) En la segunda, se trata de diseñar una secuencia didáctica que ayude a los estudiantes a superar las dificultades detectadas. Este diseño contempla la utilización de representaciones dinámicas construidas con el software de geometría dinámica *Cabri Géomètre II* (Laborde & Belleiman, 1994)

El marco teórico en el que se basa la investigación es la teoría de *registros de representación semiótica* desarrollada por R. Duval (1998). Este marco nos ha parecido el apropiado, no solamente porque permite explicar el nivel de conceptualización en base a los cambios entre

representaciones, sino porque además los problemas de oferta y demanda exigen al estudiante la familiaridad con diversas representaciones de una función lineal.

2. Marco teórico

La teoría de Duval plantea en lo general que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en matemáticas, no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación. Duval (1998, pp. 177-178) caracteriza un *registro de representación semiótica* en los términos siguientes:

“Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis:

- 1) La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- 2) El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro...
- 3) La *conversión* de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial ...”

Nuestra investigación está relacionada principalmente con la tercera de estas actividades en tanto que constituye un paso indispensable para la coordinación de registros de representación y a la vez esta coordinación es “fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos [matemáticos]” (ibid, p. 176).

La actividad de conversión está íntimamente ligada al problema de distinguir un objeto matemático y su representación. Esta distinción es menos trivial en la medida en que la enseñanza se basa de manera exclusiva en un sólo registro de representación. La confusión entre el objeto y su representación conduce a una especie de aprisionamiento del objeto por el registro donde su representación se ha producido y difícilmente podrá aplicarse fuera del contexto donde ha sido generada. Las consecuencias de esta confusión son graves en una ciencia como la matemática, cuya fuerza reside precisamente en la amplia aplicabilidad de sus conocimientos. Por ello, Duval concluye que “en una fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización”. (ibid, p. 181)

Se tiene así que las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse, en el marco de esta teoría, como resultado de una conceptualización deficiente del objeto bajo estudio.

3. El Cuestionario

Las primeras dificultades se detectaron con la aplicación de un cuestionario, cuyas preguntas están relacionadas con el concepto de función lineal. Para contestar estas preguntas el estudiante tenía que poner en juego el cambio entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica. En esta sección describimos el contenido de este cuestionario y un resumen de las intenciones con las que fueron elaboradas las preguntas que contiene.

La primera pregunta tiene que ver con la noción de pendiente, en ella se pretende identificar

las herramientas utilizadas por el estudiante para relacionar el signo algebraico de la pendiente con la gráfica de la recta obtenida. En la segunda se trata de poner a prueba la habilidad del estudiante para identificar la linealidad en una tabla en la que aparecen los valores de la variable x contra los valores de y ; esta pregunta no requiere de un cambio de registro y está relacionada más bien con la actividad cognitiva de formación en el registro tabular. La tercera está ligada a la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico de una función lineal, en ella se proporciona la gráfica de una función lineal con los datos suficientes para que la expresión algebraica pueda ser determinada. En la cuarta pregunta se presentan la función y un conjunto de cuatro gráficas que corresponden a funciones lineales, y se le pide al estudiante identificar cuál de las gráficas se corresponde con la expresión algebraica dada; en esta última pregunta se trata de verificar si el estudiante puede identificar directamente las variables visuales con los parámetros de la expresión algebraica, y si no es así, de qué herramientas se vale para convertir la expresión algebraica en la gráfica. Las preguntas del cuestionario son las siguientes:

Cuestionario

I.

- Dibuja la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(4,5)$.
- ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta? _____
- ¿Por qué? _____
- ¿Qué entiendes por pendiente de una recta? _____

II. Analice la siguiente tabla de valores y determine cómo se relacionan las variables x e y .

x	y
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

Tabla 1

x	y
-4	16
-2	4
0	0
2	16
7	49
13	169

Tabla 2

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3

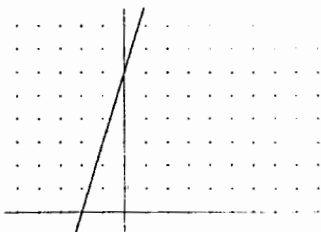
Tabla 3

Tabla 1. ¿Representa una función lineal? _____ ¿Por qué? _____

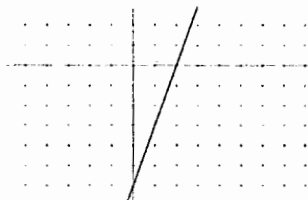
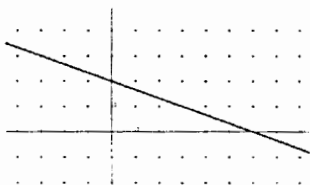
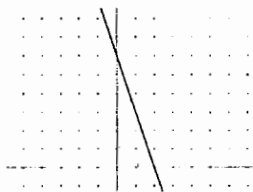
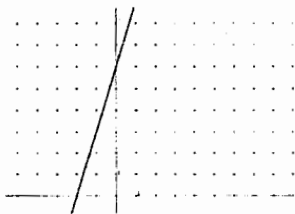
Tabla 2. ¿Representa una función lineal? _____ ¿Por qué? _____

Tabla 3. ¿Representa una función lineal? _____ ¿Por qué? _____

III. Determine la expresión algebraica cuya gráfica es la siguiente:



IV. Señale cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $y = -3x + 6$



Si considera que ninguna de las gráficas anteriores corresponde a $y = -3x + 6$, trace la gráfica correcta.

Este cuestionario fue aplicado a nueve estudiantes que cursaban el segundo semestre de su carrera en el ITSON. Los nueve habían mostrado, en mayor o menor grado, un bajo rendimiento al resolver problemas de oferta y demanda de mercado, en los que se requiere usar la función lineal como modelo.

4. Resultados.

Se presenta en esta sección un resumen de los resultados arrojados por el cuestionario pregunta por pregunta:

Pregunta I: Noción de pendiente.

Todos los estudiantes trazaron la recta que pasa por los puntos señalados y le asignaron a la pendiente signo positivo, las justificaciones ofrecidas son del tipo: “porque la recta se encuentra en el primer cuadrante”, “porque al hacer el cálculo de la pendiente me da positivo” o bien “porque corta al eje Y en un positivo”. Ninguno de los estudiantes asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta. El siguiente cuadro muestra las respuestas a esta pregunta.

Pregunta I

Inciso	correctas	incorrectas	abstenciones
a)	9	0	0
b)	9	0	0
c)	0	9	0
d)	0	1	8

A pesar de que todos los estudiantes han podido calcular la pendiente solicitada, es evidente que ninguno de ellos ha intentado conectar la inclinación de la recta con el parámetro a de la expresión $y=ax+b$ y en general ninguno muestra tener un significado claro de la noción de pendiente de una recta. En estas condiciones es difícil que puedan convertir la representación gráfica de una función lineal en algebraica o viceversa.

Pregunta II. La linealidad en una representación tabular.

En esta pregunta se observó que los estudiantes recurren a graficar una por una las parejas de números mostradas en cada tabla y a partir del dibujo obtenido determinan si la relación entre las variables es lineal o no. Cuando el trazo obtenido es una recta concluyen que la relación es lineal y en caso contrario que no lo es. Esta estrategia de traducir la tabla punto por punto al registro gráfico conduce a errores, sobre todo en los casos en los que la tabla no representa una función lineal. Uno de los estudiantes, por ejemplo, después de graficar la Tabla 3 llega a la conclusión de que la gráfica corresponde a una parábola. Este caso es interesante porque ilustra muy bien el hecho de que la atención del estudiante durante la tarea, se ha centrado en la “forma” que van adquiriendo los puntos en el plano y no en la naturaleza de la relación entre las columnas. A pesar de que en las Tablas 2 y 3 las relaciones entre las columnas guardan patrones esencialmente distintos, el estudiante mencionado concluye que ambas pueden representarse gráficamente mediante una parábola. La ausencia del registro algebraico, que hubiera podido evidenciar esta inconsistencia, es notoria.

La utilización de una representación algebraica se observó apenas en un estudiante, que la estableció correctamente para la Tabla 2, una vez que percibió que los puntos no parecían configurar una recta.

Pregunta III. Determinación de la ecuación de la recta cuando se tiene su gráfica.

Al respecto de este problema, las respuestas ofrecidas por los nueve estudiantes pueden clasificarse como sigue:

- Cinco de ellos han partido de que la gráfica corresponde a una expresión algebraica de la forma $y=mx+b$ y pudieron identificar correctamente el parámetro b con la ordenada al origen, llegando a la conclusión de que $b = 6$, pero cuando trataron de extraer de la gráfica el valor de la pendiente, dos de ellos identificaron la pendiente con la abscisa al origen, llegando a la conclusión de que $m = -2$ y deduciendo por lo

tanto que la ecuación de la recta es $y=-2x+6$. Los tres restantes recurrieron a los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados para calcular la pendiente y dos de ellos lo hicieron correctamente, pero el tercero obtuvo como puntos de intersección $(-2, 0)$ y $(6, 0)$ y sus cálculos obviamente resultaron incorrectos.

- Cuatro estudiantes intentaron utilizar la fórmula para determinar la ecuación de la recta, pero solo uno de ellos logró establecer la ecuación correctamente. Los tres restantes tuvieron problemas para obtener de la gráfica las coordenadas de los puntos que se requerían o bien se extraviaron en la manipulación algebraica.

En el siguiente cuadro se muestran las herramientas algebraicas que utilizaron en esta tarea y la precisión con que lo hicieron:

Herramientas empleadas	Resultado correcto	Resultado incorrecto	No usó esta herramienta
Identificación de dos puntos de la recta.	5	4	0
Cálculo de $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	5	4	0
Cálculo de m y b y sustitución en la expresión: $y = mx + b$	2	3	4
Fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$	1	3	5

Pregunta IV. Conversión del registro algebraico al gráfico

Solamente uno de los nueve estudiantes identificó las variables visuales con los parámetros de la expresión $y=-3x+6$ para llegar a la respuesta correcta. Los ocho restantes, aunque también obtuvieron una respuesta correcta, graficaron punto por punto la expresión $y=-3x+6$ y localizaron la respuesta correcta comparando la gráfica obtenida con las opciones propuestas.

5. Conclusiones.

Nuestro estudio revela que cuando se trata de la función lineal, la noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Esta dificultad se revela con mayor fuerza en cierto tipo de conversiones, por ejemplo cuando el registro de partida es el gráfico.

Los errores registrados no solo ponen en evidencia un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.

Las respuestas ofrecidas en la Pregunta IV son interesantes porque revelan que los estudiantes han encontrado en la graficación punto por punto de la función lineal, una manera de llegar a la respuesta correcta eludiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica.

A pesar del éxito aparente logrado por los estudiantes, el registro tabular utilizado como registro de partida ha resultado desconcertante. Las causas de este desconcierto parecieran

asociadas con la utilización de la tabulación, solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.

Puede decirse en lo general que los estudiantes, no han mostrado una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio; en el sentido de que no han mostrado una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones. En estas condiciones es muy difícil que puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de *oferta y demanda*.

Referencias.

- Duval, R., (1992), *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros*. En E. Sanchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hitt, F., (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*. (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Laborde, J. & Bellemain, F. (1994). *Cabri-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.
- Schoenfeld, A. (1993). The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. En R. Glaser (Ed.) *Advances in instructional psychology*, vol. IV. (pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.