La matriz normal de Jordan y los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en forma norma

Raúl de la Cruz Cordovés
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", Cuba
rcruzc@ind.ispjae.edu.cu,rccordoves@yahoo.com

Resumen

El objetivo esencial del trabajo es emitir una propuesta metodológica, como vía alternativa, para abordar la resolución de ciertos Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales (SEDL) expresables en forma normal, usando métodos matriciales, a partir del empleo de la diagonalización y normalización de matrices a través de la MATRIZ NORMAL DE JORDAN y usando para ello un procedimiento único, basado en el método analítico que es empleado para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden dada en su forma característica, sin soslayar, la obligada extensión a este contexto.

Desde el punto de vista didáctico, la metodología general que se propone, para la resolución de estos SEDL es una de sus mayores ventajas metodológicas, ya que, precisamente, proporciona una vía operacional única y fija, con las obligadas transferencias contextuales que fueron señaladas, esperándose lograr una estructuración sistémica de los contenidos asociados al tema, en aras de alcanzar mayores niveles de asequibilidad dentro del proceso de asimilación.

Introducción

A manera de introducción valga mencionar que entre los métodos que tradicionalmente se estudian en Matemática, para resolver SEDL pueden citarse entre otros : los métodos operacionales con operadores D (Colectivo de Autores ISPJAE, 1979), el método ventajoso y eficiente haciendo uso de la Transformada de Laplace (Céspedes,1989), el método de variación de parámetros en analogía al estudiado para resolver una EDL (Kaplan, 1968), el método de eliminación consiste en transformar el SEDL en una EDL de orden superior (Piskunov, 1969), y con énfasis especial aquellos métodos que tiene un basamento operacional tipo matricial (Noriega, 19) y que precisamente pretendemos analizar en este trabajo.

La impartición del tema **SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES** en cualquiera de sus posibles y bien conocidas formas de solución ha sido motivo de constante preocupación por los docentes de los diferentes niveles de la enseñanza superior en que este tema es tratado, debido a las complejidades que en el orden operacional, están sometidos los mismos, todo lo cual trae aparejado un creciente número de dificultades dentro del proceso de asimilación, algunas de ellas inherentes a la naturaleza propia del material objeto de estudio y otras, que obedecen más bien, al tratamiento metodológico que tradicionalmente se da a tales contenidos.

Por tal razón, el objetivo fundamental de la propuesta es brindar una vía alternativa para resolver ciertos SEDL con el propósito expreso de lograr un aprendizaje más eficiente y de mayor solidez, es decir, un aprendizaje que goce de mayor perdurabilidad en la memoria de los estudiantes.

Tras la impartición de tales contenidos durante varios años y después de numerosos análisis y reflexiones, encaminados hacia la búsqueda de un procedimiento unificador para resolver estos sistemas matricialmente, llegamos a concluir que la vía de solución a proponer podría estar basada en el procedimiento seguido para resolver una EDL de primer orden expresada en su forma característica :

$$\dot{y} + p(x)\, y = q(x)$$

aunque lógicamente es imperativa la adecuación correspondiente y requerida por la transferencia hacia el contexto matricial.

Es menester señalar que el objetivo de este trabajo es arribar a una metodología general para resolver matricialmente SEDL en forma normal, basada en los procesos de DIAGONALIZACION y NORMALIZACION de matrices, a través de un procedimiento único, al que hicimos alusión anteriormente, y que es empleado en la literatura especializada al tratar el tema de las ECUACIONES EN EL ESPACIO DE ESTADO, los que surgen en la modelación de muchísimos problemas del perfil ingenieril eléctrico. (Timothy, 1968).

Desarrollo

Como quiera que en la actividad científica suelen presentarse problemas cuya modelación matemática conduce al planteamiento de un SEDL de orden ¨n¨ sujeto a ¨n¨ condiciones iniciales (problema de Cauchy), o conducente al planteo de una EDL de orden “n” sujeta a “n” condiciones iniciales, a fin de cuentas, transformable en un SEDL en forma normal, la vía matricial para resolverlos, es la frecuentemente utilizada, debido a su eficacia desde el punto de vista operacional, por tanto, no es un equívoco señalar que en tales condiciones esta vía de resolución, revista de una importancia especial meritoria de un análisis minucioso. Partiremos de considerar el caso más general, un SEDL NO HOMOGENEO, con representación matricial denotada por:

donde :

$$X = AX + BU \quad (\mathrm{I})$$

X : es la matriz de orden n x 1, relativa a las derivadas de primer orden de todas las incógnitas.

A : es la matriz cuadrada del sistema de orden n , que contiene todos los coeficientes de las incógnitas.

X : es la matriz columna de las incógnitas del sistema, de orden n x 1.

BU : es la matriz de orden n x 1, que contiene todas las combinaciones lineales de funciones de la variable independiente.

Para una mejor comprensión de la metodología que proponemos, es necesario llevar a cabo un adecuado aseguramiento del nivel de partida de los alumnos, siendo prerrequisitos indispensables, entre otros, los siguientes :

- Procedimiento de solución de la EDL de primer orden en forma característica.
- La determinación de una matriz diagonal, D, o matriz normal de Jordán, J, semejante a la matriz A del sistema.
- Concepto de matriz semejante a una matriz dada.

- Producto de matrices.
- Inversión de matrices.
- Determinación de la matriz exponencial, derivada e integral de una matriz.

En la explicación del procedimiento matricial que expondremos distinguiremos varios casos:

Casos particulares :

a) Cuando A es una matriz diagonal.

Un caso muy particular dentro de este procedimiento tiene lugar cuando A es una matriz diagonal, el cual introduce una notable simplificación, en el procedimiento.

Si $A = D$ entonces en (I) $\dot{X} = AX + BU$ tendremos que :

$\dot{X} - AX = BU$ de donde se tiene que : $\dot{X} - DX = BU$ (II)

y esta última ecuación matricial tiene factor integrante la matriz exponencial , de simple determinación.

Tras realizar el proceso de integración correspondiente se obtiene : e^{-Dt} ,de simple determinación.

Tras realizar el proceso de integración correspondiente se obtiene :

$$X = e^{Dt}\int e^{-Dt}\boldsymbol{BU}dt + e^{Dt}\boldsymbol{C}$$

que es la solución general del sistema planteado.

b) <u>Cuando A no es una matriz diagonal, pero es diagonalizable.</u>

Para la determinación de una matriz semejante con A emplearemos el cambio de variable siguiente :

$$\mathbf{X = PZ} \qquad \mathbf{(III)}$$

donde P es cierta matriz inversible, a determinar, que relaciona la matriz de las incógnitas del sistema, X, con la nueva variable introducida, representada por la matriz Z.

Por tanto, es fácil ver que si $X = PZ$ según (III entonces $\dot{X} = P\dot{Z}$ y luego de sustituir en (I) queda :

$P\dot{Z} = APZ + BU$ de donde se tiene que : $P\dot{Z} - APZ = BU$

Premultiplicando por la inversa de P, P-1 , ambos miembros de la última ecuación obtenida tenemos :

$$P^{-1}P\dot{Z} - P^{-1}APZ = P^{-1}BU$$

la cual después de simplificar queda reducida a :

$$\dot{Z} - P^{-1}APZ = P^{-1}BU$$

La matriz $P^{-1}AP$ se reemplazará por D ya que A es una matriz diagonalizable. Por tanto, tendremos:

$$\mathbf{Z} - \mathbf{DZ} = \mathbf{P^{-1}BU} \qquad (IV)$$

De la cuidadosa observancia de esta última ecuación matricial, se concluye que tiene forma de una EDL de primer orden en forma característica, similar a la expresión (II), que resuelta por el método clásico , al que anteriormente hicimos alusión tenemos : si el factor integrante es la matriz e^{-Dt}, después de integrar la ecuación queda :

$$\mathbf{Z} = e^{Dt}\int e^{-Dt}P^{-1}BUdt + e^{Dt}C \qquad (V)$$

donde C es una matriz columna de constantes arbitrarias esenciales.

Para restituir la variable X original, basta con premultiplicar (V) por P, según (III), y obtener así la expresión que da la solución general del sistema :

$$X = Pe^{Dt}\int e^{-Dt}P^{-1}BUdt + Pe^{Dt}C$$

Si se tratara de un **PROBLEMA DE CAUCHY**, bastará ajustar las condiciones iniciales para determinar el valor particular de las constantes arbitrarias de la matriz C, obteniéndose la solución particular del problema de Cauchy.

Caso general: Si A no es diagonalizable, pero es normalizable

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito en b) a partir de III hasta llegar a IV, bastará con sustituir D por J, matriz en la forma normal de Jordán, en las expresiones (V) y posteriormente en (VI). A saber:

$$Z = e^{Jt}\int e^{-Jt}P^{-1}BUdt + e^{Jt}C \qquad (V')$$

$$X = Pe^{Jt}\int e^{-Jt}P^{-1}BUdt + Pe^{Jt}C \qquad (VI')$$

Didácticamente hablando, consideramos no es conveniente, que el alumno haga una memorización mecánica de estas expresiones finales que representan la solución general del SEDL a revolver, sino que, es meritorio que ante cada nuevo sistema, se repitan de manera desplegada todos los pasos que exige la metodología de trabajo, con el fin de lograr una mejor interiorización del procedimiento, a menos que se tratara una tarea docente consistente en resolver varios sistemas similares, en cuyo caso, creemos que las fórmulas finales podrían usarse directamente.

Análisis cualitativo de la estrategia metodológica

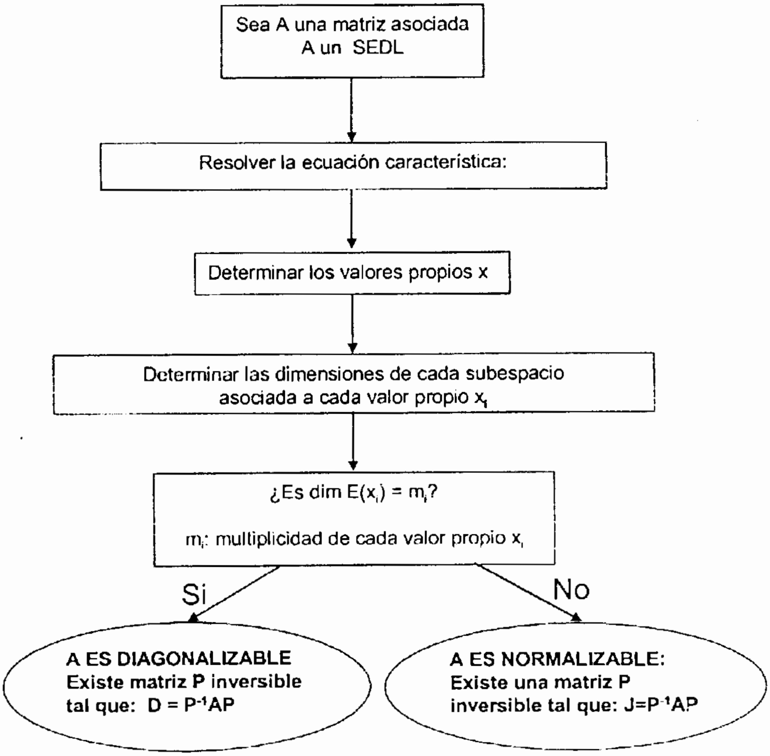
- El principal valor metodológico de este procedimiento reside en que constituye una extensión, al contexto matricial, del procedimiento antes estudiado para resolver EDL de primer orden en forma característica, teniendo en cuenta desde luego, las especificidades propias del contexto de trabajo.
- De acuerdo a lo anterior, el procedimiento **UNICO** de solución, permite evidenciar que esta forma de proceder no constituye un conocimiento completamente nuevo

para el alumno, sino que es una nueva modalidad en la que éste procedimiento puede presentarse, o lo que es lo mismo, una transferencia de un conocimiento ya adquirido contextualizado a un nuevo campo operacional de trabajo, manifestándose así una generalización procedual y un tratamiento sistémico dentro del estudio de los métodos matriciales para resolver ciertos SED en forma normal.

- La diagonalización de matrices es empleada como un caso particular de la normalización, con empleo de la MATRIZ NORMAL DE JORDAN, para el caso en que la dimensión de los subespacios asociados a los valores propios coincida con el orden de multiplicidad del mismo.
- Por otra parte, el procedimiento descrito tiene carácter generalizador, puesto que hemos discutido el caso más general, el de un **SEDL NO HOMOGENEO**, siendo el **HOMOGENEO**, un caso particular, beneficiado con la introducción de su representación matricial.

La **METODOLOGIA GENERAL** que a continuación exponemos puede ser usado como material de apoyo en las primeras etapas del aprendizaje (etapa materializada), debiendo obviarse en futuras etapas.

Metodología general



Conclusiones

La forma tradicional no matricial de resolución de SEDL muchas veces empleada para resolverlos, evidencia en alguna medida:

- El carácter NO SISTEMICO de esta organización temática de contenidos, porque se presenta el tema como un nuevo conocimiento sin analizar las interrelaciones con otros ya adquiridos.
- No aborda el problema desde el punto de vista general, sino que, se van tratando separadamente los diferentes casos. Los sistemas **NO HOMOGENEOS** se estudian separadamente de los **HOMOGENEOS**.
- No se le brinda una metodología general de trabajo al estudiante para resolverlos, sólo en algunos casos se dan algunas secuencias de pasos.

En contraposición, la **PROPUESTA** descrita tiene entre sus méritos metodológicos, los siguientes :

- Su carácter **SISTEMATICO**, evidenciada por la aplicación de una METODOLOGIA GENERAL.
- Su carácter **SISTEMICO** dentro del tema SED por cuanto el procedimiento de resolución matricial expuesto es aplicable a cualquiera sea el tipo de matriz A de dicho sistema.
- Su carácter **GENERALIZADOR**, porque se aborda el caso más general desde sus inicios.
- Su **ASEQUIBILIDAD** para los estudiantes, a partir de la introducción de los asistentes matemáticos.

Todo lo anteriormente señalado tiene como dividendo positivo la optimización real del tiempo docente, pues permite prestarle una mayor atención a la modelación de problemas que conducen a SEDL en forma normal.
La PROPUESTA METODOLOGICA fue objeto de experimentación por parte del autor, durante varios cursos académicos, a partir del año lectivo : 95-96 en grupos de 2do. Año de la Carrera de Automática del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, (ISPJAE), tanto en Curso Regular Diurno como en Curso para Trabajadores por Encuentros, evidenciándose los aspectos arriba señalados como méritos metodológicos de la misma.

Referencias bibliográficas

Colectivo de autores del ISPJAE, (1979). *Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales*.
Céspedes, MA., (1989). *Transformada de Laplace con aplicaciones.*
Kaplan, W. (1968). *Ordinary Differential Equations*. Edición Revolucionaria. La Habana.
Piskunov, N. (1969). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Mir. Moscú.
Timothy, L.K (1968). *State Space* Analysis : An Introduction. Editorial USA.
Noriega, T. (19). *Álgebra Lineal*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
De la Cruz, R. (1995). *Proceeding I Encuentro Internacional sobre Enseñanza de la Matemática*. Universidad de la Habana. La Habana.