Algunas reflexiones sobre la aproximación racional y su inclusión en los programas de estudio

Abel Fernández Infante
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría". Ciudad de la Habana-CUBA
afdezi@yahoo.com

Resumen
El desarrollo acelerado de la ciencia y la técnica en los últimos cincuenta años, la incorporación de la computadora a la enseñanza de la Matemática y su uso creciente en esta dirección, nos exige revisar los programas de las diferentes asignaturas que comprende la Matemática con el objetivo de perfeccionarlos y actualizarlos, pues muchos de los contenidos que aparecen en dichos programas se convierten en obsoletos. El propósito de este trabajo es mostrar las bondades de la aproximación racional o más precisamente la aproximación según Padé, que con ayuda de algún asistente matemático nos sugiere su tratamiento en los cursos de pregrado y así complementar la aproximación según Taylor.

Introducción.
Este trabajo esta relacionado con la teoría de aproximación o interpolación para algunas clases de funciones analíticas y meromorfas usando como aproximante fracciones racionales de interpolación con polos libres que en cierta medida generalizan los polinomios de Taylor. Estos aproximantes se denominan también aproximantes de Padé en honor al matemático francés Henri Padé (1863-1953) que fue uno de los fundadores de esta teoría (Padé, 1892). Estos aproximantes hace alrededor de 120 años se abrieron paso en la teoría de aproximación, estando en sus inicios relacionados con la teoría general de las fracciones continuas cuya historia data de varios siglos. Pero, no fue hasta varios años mas tarde que los aproximantes de Padé atrajeron la atención de los investigadores, puesto que tales aproximantes encontraron múltiples aplicaciones en la solución numérica de problemas de la Física Teórica y la Física-Matemática. Esto además, hizo que aumentara el interés por el estudio de la teoría de estos aproximantes, lo cual se refleja en los resultados alcanzados en los últimos años por varios investigadores, por ejemplo, en los:

- Aproximantes simultáneos de Padé o aproximantes de Hermite-Padé (Gonchar & Rakhmanov, 1981; Mahler, 1968; Piñeiro, 1985)
- Aproximantes de tipo Padé (Ambroladze & Wallin, 1994; Brezinski, 1980; Gonchar, 1975; Kalberg & Wallin, 1991)
- Aproximantes parciales de Padé (Brezinski, 1988; Cala, 1991)

En nuestro criterio uno de los temas candidatos a incluir en los actuales programas de ingeniería es el relativo a los denominados aproximantes de Padé. Pues, estos constituyen en la actualidad una de las líneas fundamentales de trabajo en la teoría de aproximación y como señalamos antes no solo han encontrado un espacio en esta teoría, sino que han ayudado a la solución de problemas de la Mecánica y la Física-Matemática sobre todo con el desarrollo de los métodos computacionales.
Para determinar los "aproximantes de Padé" (funciones racionales de aproximación) se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales partiendo del conocimiento de los

coeficientes de una serie de potencias que representa a cierta función dada o de una serie formal de potencias. Como sabemos los temas de sistemas de ecuaciones lineales, polinomios y series de Taylor, están incluidos en los programas de ingeniería. Además, algunos asistentes matemáticos disponen de instrucciones para calcular el aproximante de Padé de una función dada. Por citar un ejemplo, la función PADE(y,x,xo,n,d) del DERIVE nos proporciona dichos aproximantes, esto, nos sugiere su tratamiento en los cursos de pregrado y así complementar la aproximación según Taylor. Pero se puede agregar que ya algunos libros de Cálculo comienzan a utilizar el lenguaje de los aproximantes de Padé, por ejemplo, se puede consultar el ejercicio 45 de la página 226 de los autores Smith & Minton, 2000. Por otra parte, este tema ya se utiliza en la especialidad de Control Automático (consultar a Smith & Corripio), y también aparece en la asignatura de Control e Instrumentación de Procesos Químicos para la titulación de Ingeniero Químico (curso 2000-2001), Dpto. de Ing. de Sistemas y Automática de la Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid: http://www.isa.cie.uva.es/~prada/control.html

El propósito de este trabajo es mostrar las bondades de la aproximación racional o más precisamente, la aproximación según Padé, la cual se ilustra mediante un ejemplo con ayuda del asistente matemático DERIVE.

Aproximación según Padé.

Cuando se estudia la aproximación según Taylor se insiste en la facilidad con que se calculan los polinomios aproximantes y se resalta la dificultad que se presenta cuando se intenta evaluar en un punto dado, una función trascendente. El alumno comprende así la conveniencia de expresar, la función trascendente como polinomios, aunque sea en forma aproximada. También el estudiante logra comprender que la aproximación según Taylor, es una aproximación local y con ella resuelve una variedad de problemas. Sin embargo, podemos hacernos algunas preguntas: ¿Las funciones racionales serán descartadas como funciones aproximantes, porque en principio entrañan una dificultad el cálculo de los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador? ¿Se obtendrá alguna ventaja si bajo ciertas condiciones aproximamos una función por una función racional? Por supuesto, las respuestas son, negativa a la primera pregunta y positiva a la segunda. A continuación veremos, a través de un ejemplo la aproximación según Padé y su comparación con la aproximación de Taylor.

Suponemos que al abordar el tema que nos ocupa, el estudiante se ha enfrentado a diferentes situaciones en relación a los polinomios y series de Taylor. Para la aproximación según Padé se puede consultar las páginas 278-279 del libro de Ralston, 1965. Otras bibliografías especializadas en el tema son: Baker & Graves-Morris, 1981; Montessus, 1902; Padé, 1892; Walsh, 1965.

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \ (z \in D_0 = \{z \in C: |z| < R_0\}) \tag{1}$$

una serie de potencias (formal o convergente), donde $R_0 > 0$ es el radio de convergencia de la serie (1).

Dados n y m enteros no negativos, se desean encontrar polinomios $P_{n,m}$ y $Q_{n,m}$ tales que

- $\operatorname{grad} P_{n,m} \leq n$, $\operatorname{grad} Q_{n,m} \leq n$, $Q_{n,m} \equiv 0$
- $(Q_{n,m}\, f - P_{n,m})(z) = r_{n,m}\, z^{n+m+1} + \cdots$

A la función racional

$$F_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$$

se le denomina aproximante de Padé de f de tipo n, m.
Se debe destacar lo siguiente:

1. Cuando el polinomio del denominador $Q_{n,m}$ es de grado 0, entonces el polinomio del numerador $P_{n,m}$ de la función aproximante coincide con el polinomio de Taylor de la función dada f en un entorno del punto $z_0 = 0$.

2. Los coeficientes del polinomio $Q_{n,m}(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0$ se obtienen de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (S. E. L. H.) que tiene infinitas soluciones (m ecuaciones con m + 1 incógnitas), de donde se elige una solución no trivial:

$$f_{n-m+2} b_m + f_{n-m+3} b_{m-1} + \cdots f_{n+1} b_0 = 0$$
$$f_{n-m+1} b_m + f_{n-m+2} b_{m-1} + \cdots f_{n+2} b_0 = 0$$

3. Los coeficientes del polinomio $P_{n,m}(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, se obtienen de los primeros n+1 términos del desarrollo de la función $Q_{n,m} f$ en un entorno del punto $z_0 = 0$.

4. A pesar de que el polinomio se obtiene $Q_{n,m}$ de un S. E. L. H. con infinitas soluciones, el aproximante de Padé de f de tipo n, m expresado por

$$F_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$$

es único.

Consideremos la función siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} \ln(1 - \frac{z}{2}), |z| < 1$$

Entonces, como

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n , |z| < 1$$

y

$$-\ln(1 - \frac{z}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n}, |z| < 2.$$

La función se puede escribir así,

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n2^n})z^n, |z| < 1.$$

Ahora se pueden considerar varios polinomios de Taylor y varias aproximaciones según Padé y realizar la comparación correspondiente. Por ejemplo: Aproximar la función f:

a) Mediante los polinomios P_3 y $F_{1,1}(z) = \dfrac{P_{1,1}(z)}{Q_{1,1}(z)}$

b) Mediante los aproximantes de Padé P_5 y $F_{2,2}(z) = \dfrac{P_{2,2}(z)}{Q_{2,2}(z)}$

c) Represente gráficamente la función y las funciones aproximantes.

d) Qué conclusión obtiene?

Con ayuda del Derive sobre Windows se pueden obtener las funciones aproximantes, así como sus gráficas. De esta forma usando las funciones.

TAYLOR(y,x,x0,n) y PADE(y,x,x0,n,d).

Obtenemos:

- $P_3\ (z) = \frac{25}{24} x^3 + \frac{9}{8} x^2 + \frac{3}{2} x + 1$

- $F_{1,1}(x) = \dfrac{3x+4}{4-3x}$

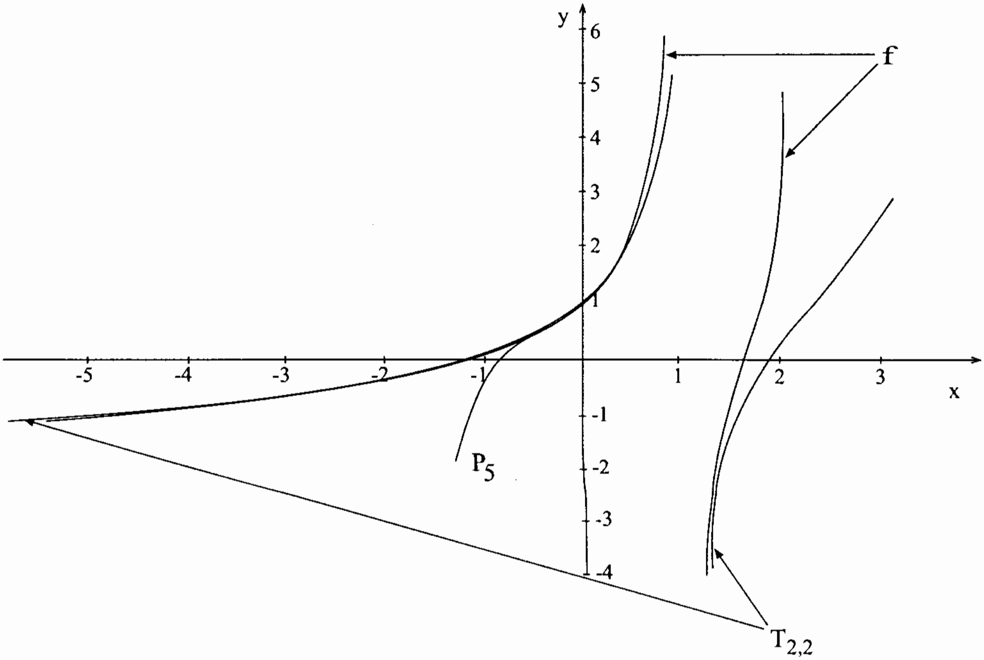
- $P_5(x) = \dfrac{161}{160}x^5 + \dfrac{65}{64}x^4 + \dfrac{25}{24}x^3 + \dfrac{9}{8}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

- $F_{2,2}(x) = \dfrac{2(313x^2 - 216x - 684)}{265x^2 - 1620x + 1368}$

y las gráficas de f, P_3 y $F_{1,1}$ así como las gráficas de f, P_5 y $F_{2,2}$ nos permiten obtener algunas conclusiones sobre la aproximación de la función respecto de las aproximaciones según Taylor y según Padé.

En la figura 1 se aprecia cómo en el intervalo]-1,1[, la aproximación de f mediante P5 es buena, pero mejor es mediante F2,2 donde prácticamente la gráfica de esta se superpone a la de f. Obsérvese que fuera del intervalo de convergencia según Taylor (dentro de cierto rango) tanto a la izquierda como a la derecha de dicho intervalo, la función aproximante F2,2 continúa siendo una "buena" aproximación de f.

O sea, la aproximación de Padé Amplía la "región de aproximación" de Taylor. A continuación se muestran las gráficas de las funciones f, P5 y F2,2, las cuales aparecen indicadas con flechas.



Conclusiones.

Como se observa las razones de la sugerencia están dadas por:

- La aproximación según Padé que nos ocupa en este trabajo, incluye a la de Taylor (caso m=0).
- Las "dificultades del cálculo" de los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador de la función racional aproximante, no constituyen un obstáculo con el uso de la computadora y los asistentes matemáticos.
- Otra razón no menos importante es que la aproximación que proponemos tiene la ventaja en comparación con la Taylor de que la "región de aproximación" es más amplia.
- En general de los aproximantes de Padé convergen con mayor rapidez que los polinomios de Taylor.
- Uso de la aproximación de Padé en la resolución de problemas (por ejemplo, consultar Smith & Corripio, página 263-304.

Desde nuestro punto de vista, con el desarrollo vertiginoso de la computación y los resultados alcanzados por los investigadores en la teoría de los aproximantes de Padé, se impone una adecuación de los programas de Matemática, pues en los inicios del nuevo siglo muchos de los temas que se abordan en clases necesitan una revisión.

Referencias bibliográficas

Ambroladze A. and Wallin H. (1994), *Padé type approximants of Markov and meromorphic functions, Dept. of Math.*, Univ. of Umeå, No. 14, 1994.

A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1965.

Baker G. A. and Graves- Morris P. R., *Padé Approximants Part I*: Basic Theory Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 13, Addison Wesley, 1981.

Brezinski C. (1980), *Padé-Type approximation and General Orthogonal Polynomials*, ISNM50, Birkhäser Verlag, Basel.

Brezinski C. (1988), *Partial Padé approximation*, J. Approx. Th. 54 (1988), 210-233.

Cala Rodríguez F. (1991), *An Introduction to the Convergence Theory of Partial Padé Approximants*, Dept. of Math., Univ. of Umeå, No. 6, 1991.

Gonchar A. A. (1975), *On the Convergence of Generalized Padé Approximants of Meromorphic Functions*, Math. Sb. 98, English transl. Math., 19 (1968), 95-166.

Gonchar A. A. and Rakhmanov E. A., (1981), *On the Convergence of Simultaneous Padé Approximants for Systems of Functions of Markov type*, Trudy Math., Inst. Steklov 157 (1981), 31-48, English transl. In Proc. Steklov Inst. Math. 1983, No. 3 (157).

Montessus de Ballore, *Sur les Fractions Continues Algebrique Bull.* Soc. Math. Francais 30 (1902), 28-36.

Mahler K. (1968), *Perfect Systems*, Compositio Math.., 19 (1968), 95-166.

Padé H., *Sur la representation approcheé d'une fonction par des fractions rationaelles*, Ann. Ec. Norm. Sup. 9, 1892.

Piñeiro L. R., (1985), *Simultaneous Padé approximants for a class of Markov functions*, Author´s Abstract, Candidate´s Dissertation, Moscow State University, 1985 (en ruso).

Smith C. A. y Corripio A. B., *Control Automático de Procesos, Teoría y Práctica*, Editorial Limusa Noriega.
Smith R. T. and Minton R. B., *Cálculo, Tomo I*, Mc Graw Hill, Impreso en Colombia, Julio/2000.
Kalberg L. and Wallin H. (1991), *Padé type approximants of functions of Markov-Stieltjes type*, Rooley Mountain J. Of Math. 21, 437-449.
Walsh J. L. (1965), *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 4th Ed. Colloq. Publ. 20 Math. Soc., Providence.