

# EXPLORACIÓN, VISUALIZACIÓN Y DEMOSTRACIÓN: LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS CON *EL GEÓMETRA*

Homero Flores, Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, México

[ahfs@servidor.unam.mx](mailto:ahfs@servidor.unam.mx)

Scott Steketee, Señor Software Developer, KCP Technologies, Emeryville, CA, USA

[stek@keypress.com](mailto:stek@keypress.com)

## RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas apoyada en el uso de software de Geometría Dinámica como *El Geómetra* (The Geometer's Sketchpad) puede hacerse mucho más significativa y fomentar de manera mucho más eficiente un pensamiento reflexivo y un razonamiento deductivo en nuestros alumnos, no importa el grado en que se encuentren. Ahora bien, con la versión 4.0 de Sketchpad es posible enseñar de una manera más amable no sólo la geometría, sino cualquier rama de las matemáticas, desde la aritmética hasta el cálculo, pasando por el álgebra y la geometría analítica. En este artículo se verán algunas actividades con Sketchpad cuya intención es ilustrar el uso de la exploración, visualización y la demostración para desarrollar el entendimiento matemático y el razonamiento reflexivo en nuestros alumnos.

## INTRODUCCIÓN

En los años recientes la enseñanza de las matemáticas se ha visto beneficiada con el advenimiento del software educativo. En este ámbito se han diseñado muchas aplicaciones encaminadas principalmente a facilitar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, el cálculo y la geometría. Ahora bien, existen pocos programas que se puedan aplicar a cualquier rama de la matemática con la misma facilidad, aunque la tendencia en los nuevos softwares y en las actualizaciones de los ya desarrollados apunta en esa dirección. Tal es el caso del software de Geometría Dinámica *The Geometer's Sketchpad* en su versión 4.0 (Jackiw, 2000), más conocido en español como *El Geómetra*.

En el presente trabajo veremos algunos ejemplos que pondrán en relieve las nuevas características del software y porque afirmamos que es de gran utilidad en actividades de exploración, visualización y demostración en la enseñanza de las matemáticas y no sólo en la enseñanza de la geometría. Éstas y otras actividades pueden revisarse en [www.keymath.com](http://www.keymath.com).

### Centroide

Iniciamos con una pantalla en blanco y las herramientas propias de la geometría euclidiana: la regla y el compás (que en Sketchpad corresponden a las herramientas de Rectas y Círculo). Usamos primero la regla para construir un triángulo. Al arrastrar un vértice o uno de los lados, nos damos cuenta de que el resultado no es un solo triángulo, sino la representación de cualquier triángulo posible, agudo, obtuso, recto, etcétera.

A continuación construimos el punto medio de los lados. En caso de que estemos en un aula, conviene que el alumno construya el primer punto medio usando exclusivamente las herramientas de rectas y círculo, esto con el fin de que vaya recreando la geometría euclidiana, los demás puntos medios los puede construir con el comando Punto medio. Volvemos a usar la herramienta de Rectas para construir las tres medianas del triángulo.

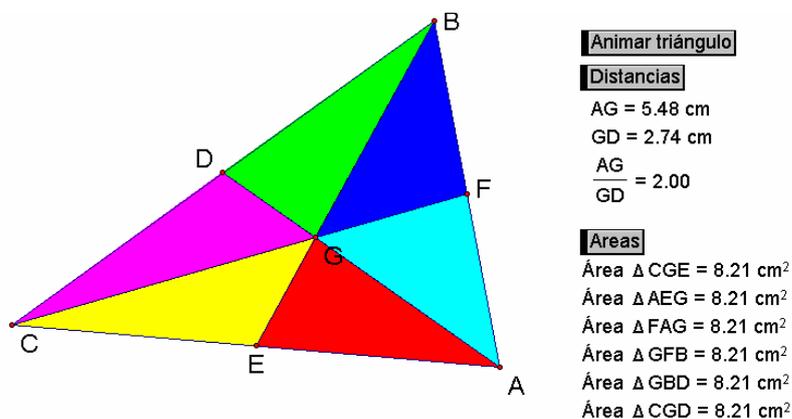
Los estudiantes se darán cuenta de que la tercera mediana pasa por la intersección de las otras dos (intersección conocida como centroide). En un dibujo en papel, la observación sería válida para un solo caso, siempre y cuando el alumno haya hecho la construcción

con el suficiente cuidado. Pero con Sketchpad, el estudiante puede arrastrar el triángulo y observar que la observación es válida para cualquier triángulo.

El estudiante puede ahora medir la distancia del centroide a uno de los vértices y al punto medio del lado opuesto y descubrir que a pesar de que las distancias cambian, hay algo constante en la relación. En una configuración particular, encontramos que una distancia parece ser el doble de la otra. Con Sketchpad, podemos descubrir que esta relación se cumple sin importar el tamaño o la forma del triángulo.

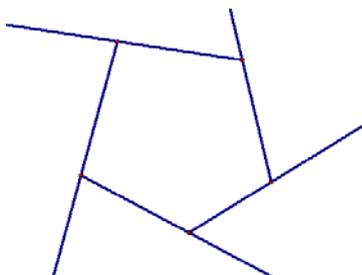
Para continuar con nuestra investigación, podemos medir el área de dos de los triángulos interiores (para ello es necesario construir el interior de los triángulos y después medir el área). Al arrastrar el triángulo, nos damos cuenta de que las áreas son iguales, a pesar de que los dos triángulos interiores tengan formas muy diferentes.

Por último, si deseamos que otros vean el resultado de nuestro trabajo en Internet, podemos guardar nuestro archivo como página web y ponerlo en nuestro sitio de Internet. Podemos cambiar el tamaño del dibujo para que aparezca en la página del tamaño adecuado. Después cambiar el dibujo con extensión html. Después de guardado, podemos abrirlo con un navegador de web para ver el resultado.

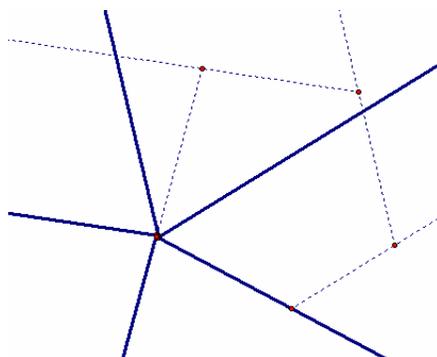


### Ángulos exteriores

El siguiente es un ejemplo de lo valioso que puede ser la combinación de Sketchpad y la geometría de las transformaciones. En el aula podemos pedirle a los estudiantes que intenten imaginarse cuál será la suma de los ángulos externos de un pentágono. Para ver con facilidad los ángulos exteriores, usamos la herramienta de rayo para construir el pentágono. Ahora tenemos cinco ángulos exteriores y podemos medirlos y sumarlos con los menús de Sketchpad. Pero haremos las cosas un poco diferentes.



Primero marcamos un vértice como centro de rotación o de dilatación. Para rotar objetos, podemos utilizar la herramienta de Flechas del programa. Si giramos los otros vértices alrededor del centro, nos damos cuenta de que los ángulos no cambian. Del mismo modo, si usamos la lecha de dilatación para dilatar los demás vértices, notamos que los ángulos siguen sin cambiar. Pensemos ahora una vez más en la pregunta original: ¿cuál es la suma de los ángulos exteriores del polígono? Si lo encogemos hasta que se colapse en un punto obtenemos la figura siguiente.



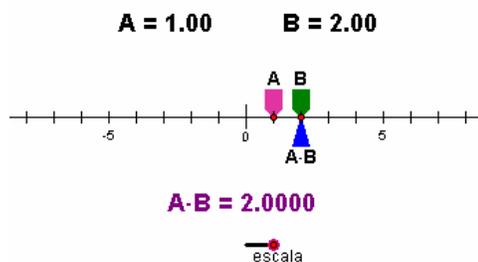
Este es un ejemplo en el cual el estudiante no sólo da una respuesta correcta, sino que inmediatamente se da cuenta de que ésta es válida para cualquier polígono convexo. Además, la naturaleza de la demostración visual es tal que el estudiante la recordará durante mucho tiempo: siempre recordará cómo se verá el pentágono si se le encoge hasta un punto.

### Multiplicación en la recta numérica

En este ejemplo presentamos una máquina mágica que toma dos números como entrada y produce otra cosa. Los estudiantes no necesitan saber exactamente cómo funciona la máquina, pero pueden primero ver que produce exactamente los resultados que normalmente obtienen cuando multiplican dos números positivos.

Después observamos cómo se comporta cuando multiplicamos un número positivo por uno negativo, y vemos el comportamiento de la máquina es consistente. El movimiento del resultado es continuo a medida que uno de los números cruza el cero y se vuelve negativo.

Finalmente, preguntamos al alumno que diga qué espera cuando ambos números son negativos. Si la máquina se comporta de manera continua, ¿qué pasará cuando el segundo número cruce el cero?



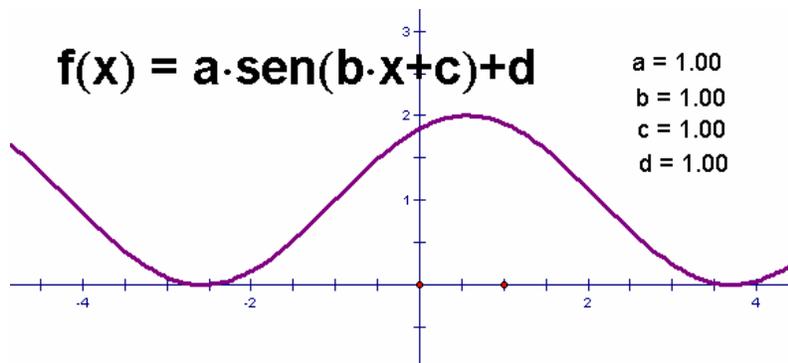
Esta máquina hace muy fácil que un estudiante entienda el argumento por el cual el producto de dos números negativos es positivo.

### Familia de funciones

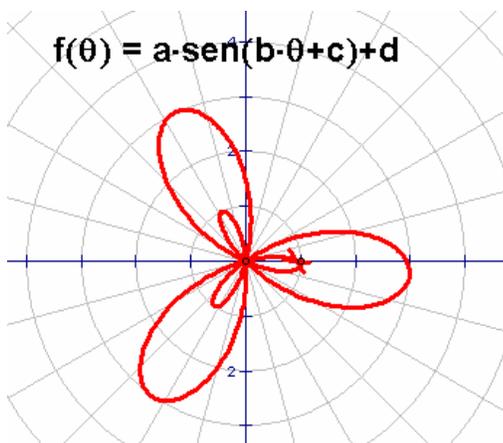
Es muy fácil graficar una función con Sketchpad. Elija Graficar nueva función del menú Graficar y teclee la función, en este caso  $\text{sen}(x)$ . El programa nos pregunta si deseamos graficar la función seno usando grados o radianes. Escogemos radianes y aparece la gráfica.

Con Sketchpad podemos graficar una familia entera de funciones al agregar un parámetro a nuestra función. Escogemos Nuevo parámetro del menú Graficar y etiquetamos con “a” al parámetro. Hacemos lo mismo para obtener un segundo parámetro “b”. Ahora hacemos doble clic en la expresión de la función para editarla y la cambiamos para que ahora tenga los parámetros.

Después de hacer la edición todavía no vemos cambios porque ambos parámetros tienen valor uno. Podemos cambiar el valor de los parámetros si presionamos las teclas “+” y “-” y explorar la familia de funciones que se crea. Podemos fácilmente ver cualquier valor particular de cualquier parámetro si hacemos doble clic en él y tecleamos un nuevo valor. También podemos animar los parámetros para observar cómo cambia la función y su gráfica.



Podemos también graficar la función en coordenadas polares. En el siguiente dibujo presentamos la familia de funciones del seno en coordenadas polares. Si mostramos los controles podemos ver que el valor de  $b$  es uno. Cambiemos el valor a 3 para ver el resultado. Este dibujo nos parece muy atractivo, pues cuando animamos el parámetro  $c$  podemos imaginar que somos pilotos de una aeronave a punto de despegar.



## Derivada

En el siguiente ejemplo presentamos varias actividades que tienen el objetivo de ayudar a los estudiantes a entender el concepto y la definición de derivada. Recomendamos hacer las actividades en dos partes para darle tiempo al estudiante de pensar en ellas. En la primera parte empezamos con una función, por ejemplo,  $\text{sen}(x)$ . Después utilizamos la herramienta de Rectas para construir una secante.

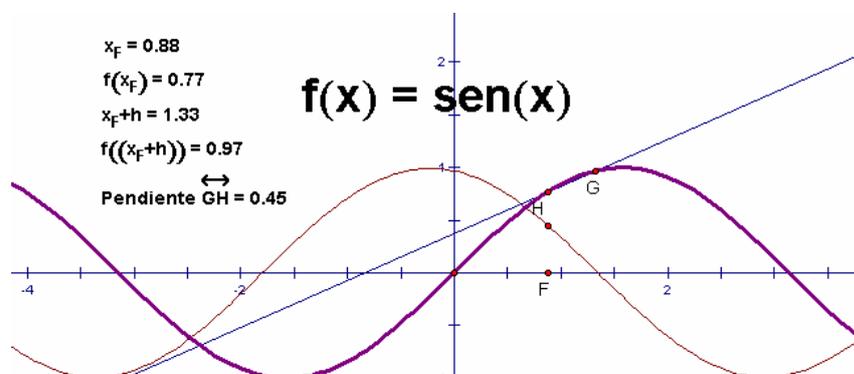
Observe que podemos arrastrar la secante a lo largo de la función y animarla de modo que se desplace de manera automática. Ahora que tenemos una secante, queremos estudiar la “función pendiente”, es decir, deseamos observar el comportamiento de la pendiente de la recta secante en diferentes posiciones de la función. Medimos la pendiente y el valor  $x$  de uno de los puntos extremo. Podemos graficar el punto que muestra el valor de la pendiente y marcar su rastro. Cuando movemos la secante, podemos observar la función pendiente de la secante.

Sin embargo, la pendiente de la secante no es un resultado preciso para la pendiente de la función misma; podemos hacer que el resultado sea mucho más preciso si acercamos mucho los puntos A y B entre sí. Ahora vemos una aproximación mucho mejor del valor de la pendiente de la función.

Como una segunda parte de las actividades, en una clase posterior, colocamos un punto en el eje  $x$  y medimos su abscisa. Después calculamos el valor correspondiente de  $f(x)$ . Si graficamos estos dos valores, tenemos un punto en la función; en esta ocasión deseamos controlar la separación de los dos puntos, por tanto construimos el parámetro  $h$ . Definimos las propiedades de este parámetro de manera que cambie en valores muy pequeños, 0.01, cada vez que presionamos la tecla “+” o “-”.

Si calculamos tanto el valor de  $x + h$  como el de  $f(x + h)$ , tendremos las coordenadas requeridas para un segundo punto en la función. Podemos ahora utilizar estos dos puntos para construir una recta secante. Ésta es diferente de la construida en la primera parte, pues ahora tenemos un control muy preciso de la separación de los dos puntos.

Midamos de nuevo la pendiente de la secante y grafiquemos después el valor de la pendiente como función de  $x$ . Incluso podemos graficar el lugar geométrico del punto graficado para diferentes valores de  $x$ , para ver la función pendiente completa al mismo tiempo. Y podemos cambiar la separación de los dos puntos para hacer que el resultado sea más o menos preciso para la pendiente de la tangente. Y también podemos ver por qué podemos hacer que el valor de  $h$  se acerque a cero, pero sin dejar nunca que realmente alcance este valor.



Podemos hacer mucho más con el cálculo, como explorar el teorema fundamental del cálculo y hacer algunas actividades con antiderivadas e integrales definidas, y con campos de tangentes. De hecho, creemos que el único límite que un profesor encuentra al diseñar actividades con Sketchpad es su imaginación.

Los ejemplos presentados en esta plática son sólo una pequeña muestra de la capacidad que tiene Sketchpad para diseñar actividades de enseñanza de las matemáticas (y algunas otras materias como física) en las cuales el alumno pueda hacer las matemáticas que debe aprender en cualquier nivel escolar, desde primaria hasta universidad. El uso del paquete en el aula permite diseñar actividades donde el alumno, a través de la exploración, pueda descubrir objetos matemáticos y las relaciones que existen entre ellos; pueda tener una mejor visión de los conceptos matemáticos mediante representaciones geométricas dinámicas de los mismos; y pueda, a través de la exploración y la visualización, llegar a sus propias conclusiones y sus propias conjeturas e, incluso, aventurarse en el arduo camino de validarlas y argumentarlas para convencerse a sí mismo y a otros de su veracidad: una de las actividades más importantes de un matemático y una de las habilidades que todo buen profesor de matemáticas quisiera fomentar en sus alumnos.

#### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

**Jackiw, N** (2001), *The Geometer's Sketchpad: software de geometría dinámica para explorar matemáticas, version 4.0*. Key Curriculum Press, Emeryville, Ca. EUA.