LA FORMACIÓN, DESARROLLO Y GENERALIZACIÓN DE CONCEPTOS EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.

Otilio B. Mederos Anoceto

Centro de estudios de Educación. Universidad Central de Las Villas. Cuba.

Oma8111@yahoo.es , omederos@cei.uclv.edu.cu

RESUMEN

En la primera parte de este trabajo se analizan las características generales del proceso de formación, desarrollo y generalización conceptual. Se analiza, además, la importancia de utilizar la resolución de problemas como un medio para facilitar estos procesos. En la segunda parte, a partir de una experiencia docente, se muestra el comportamiento de dos grupos de alumnos que tomaron parte en el proceso de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica.

1. Ideas generales sobre los procesos de formación, desarrollo y generalización de conceptos.

Estos procesos, independientemente de sus singularidades, tienen una extraordinaria relación y unidad. El proceso de abstracción se caracteriza por:

- La determinación de un conjunto de rasgos abstractos comunes para los objetos de una clase inicial.
- La no consideración de rasgos particulares variables de los objetos de la clase inicial.

Al analizar diferentes objetos particulares para extraer rasgos comunes, dejando de considerar otros no comunes, se realiza un proceso de abstracción, que resulta imprescindible para pasar de lo concreto y singular, a lo general y abstracto. Por medio de las abstracciones la ciencia es capaz de captar aquello que es inaccesible a la contemplación.

El tránsito del encuentro de rasgos de un objeto individualizado a su determinación y separación en una clase inicial de objetos similares, y la utilización de una palabra para nombrar a todos los objetos que poseen esos rasgos comunes, y sólo esos objetos, que por lo general forman una clase más amplia que la inicial, se denomina proceso de generalización. Al generalizar, expresamos lo común en los objetos o fenómenos de la realidad individualizados, y designamos con una palabra los objetos o fenómenos que tienen esos rasgos comunes. Consecuentemente, la palabra corresponde a una clase de objetos distintos pero que tienen entre sí unos rasgos comunes que los caracterizan. El "tamaño" de esta clase determina la "magnitud" de la generalización.

Hemos comprobado en nuestra práctica docente que algunas acciones que son útiles para que los estudiantes desarrollen un concepto con ayuda de una persona más experta son las siguientes:

- Presentar a los estudiantes cierto número de objetos, especialmente seleccionados, con el objetivo que los analicen y los comparen.
- ayudar (dar impulsos) a los estudiantes para que seleccionen propiedades de cada objeto, los comparen con los otros objetos y eliminen propiedades no comunes.
- Determinar finalmente un conjunto de propiedades comunes a todos los objetos analizados.

- Seleccionar, del conjunto de propiedades comunes, un subconjunto mínimo de propiedades (esenciales), a partir de las cuales se puedan obtener (deducir) todas las demás propiedades comunes.
- Utilizar una palabra para nombrar la clase de todos los objetos que cumplen las propiedades esenciales.

El proceso de generalización conceptual no termina, especialmente en matemática, con la definición del concepto. La generalización de un concepto después que ha sido definido científicamente sigue, al menos, una de las dos vías que a continuación se señalan:

1. Debilitar, o eliminar, algunos rasgos esenciales.
2. Considerar conceptos de partida más amplios que el utilizado para definir científicamente el concepto que se generaliza.

2. La resolución de problemas como un medio para facilitar la formación, desarrollo y generalización conceptual.

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática por medio de la resolución de problemas debe estar dirigida a insistir en los procesos de pensamiento y de aprendizaje, tomando como campo de acción los contenidos matemáticos. Aunque desde hace mucho tiempo en Psicología, se han estudiado profundamente los procesos de formación, desarrollo (Vigotsky, 1998) y generalización (Davidov, 1981) de conceptos, consideramos que hay mucho que hacer en esta dirección con relación a la utilización de la resolución de problemas con este fin en matemática. Algunas de las acciones que hemos aplicado con buenos resultados al utilizar la resolución de problemas como un medio para facilitar la formación, desarrollo y generalización de conceptos son las siguientes:

1. Insistir en que la obtención de la solución de un problema no debe considerarse como la etapa final del mismo.
2. Utilizar problemas adecuados que motiven y faciliten la formación y desarrollo de conceptos; y de esa forma, lograr que los estudiantes participen en la construcción de la matemática que aprenden y que le encuentren un adecuado sentido a sus técnicas, ideas, objetos y estructuras.
3. Utilizar cadenas de problemas del tipo (problema planteado – problema resuelto – nuevos problemas planteados) que motiven y faciliten diferentes generalizaciones de un concepto teniendo en cuenta el desarrollo del tipo de pensamiento que corresponde a cada nivel de enseñanza.
4. Ofrecer impulsos y adecuados niveles de ayuda para que los estudiantes sientan la necesidad, una vez que ha logrado la solución de un problema, de plantear nuevos problemas que estén dirigidos a eliminar alguna restricción bajo la cual fue resuelto; y de esa forma guiarlos para que realicen generalizaciones de objetos relacionados con el problema original.

3. Problemas sencillos de geometría plana que conducen a diferentes medias de dos números reales positivos.

En esta sección se muestran algunos elementos de como se comportó el proceso de formación, desarrollo y generalización del concepto de media numérica en dos grupos de estudiantes: un grupo de 13 estudiantes de la asignatura Seminarios de Problemas I de primer año de la Carrera de Matemáticas de la Universidad Central de Las Villas, Cuba, en el curso 2001-2002; y un grupo de octavo semestre de la asignatura optativa Matemática Educativa de la Carrera de Matemática Aplicada de la Universidad Autónoma de Coahuila, México, en el curso 2000-2001. La diferencia esencial entre los estudiantes de estos dos grupos se presentó como consecuencia del tipo de pensamiento que habían desarrollado; los del primer grupo estaban muy lejos de tener un pensamiento funcional y los del segundo grupo tenían un pensamiento funcional, aunque no totalmente desarrollado. Las diferencias del proceso estuvieron en la utilización de herramientas acorde al tipo de pensamiento desarrollado.

El objetivo de estos problemas es mostrar a los profesores cómo es posible facilitar la presentación de un conjunto de objetos numéricos que constituyen su solución, y de esta forma comenzar a llamar la atención de los estudiantes sobre estos números. El problema que a continuación se plantea ha sido tomado del artículo (Maor, 1977) y fue presentado a los dos grupos de estudiantes sin que ellos conocieran que nuestro objetivo como profesor era utilizarlo para que aparecieran diferentes medias numéricas.

Problema 1. Dado un rectángulo de lados *a* y *b*, se quiere construir un cuadrado equivalente de lado *l*, que cumpla una de las propiedades siguientes:

1.1 El cuadrado tiene el mismo perímetro que el rectángulo.

Se pidió a los estudiantes que determinaran la longitud *l* del lado del cuadrado con esta característica, y ellos obtuvieron sin dificultad $l = \frac{1}{2}(a+b)$. Una vez que obtuvieron esta solución se le planteó el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1. Probar que si se representan en el eje real los números *a, b* y $\frac{1}{2}(a+b)$, el punto correspondiente a $\frac{1}{2}(a+b)$ ocupa el punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos correspondientes a los números *a* y *b*.

Para que, dados dos números *a* y *b,* el número $\frac{1}{2}(a+b)$ adquiera un significado para los alumnos es muy importante que se presenten varios problemas cuya solución conduzca a ese número, o en cuyo proceso de solución juegue un papel importante ese número. Sólo entones debemos darle el nombre de media aritmética de los números *a* y *b* y utilizar la notación *MA,* o sea, $MA = \frac{1}{2}(a+b)$. A los estudiantes se le presentaron otros problemas en cuya solución intervino la media aritmética de dos números, y se le pidió que presentaran otros problemas con estas características.

1.2 El cuadrado tiene la misma área que el rectángulo.

Siguiendo la idea que condujo a la solución del caso anterior; los estudiantes llegaron a que $l = \sqrt{ab}$. Se planteó el ejercicio, muy útil para que los estudiantes fuesen determinando algunos rasgos comunes de las medias siguientes:

Ejercicio 2: Pruebe que si $0 \leq a \leq b$, los números *a, b, y* $\sqrt{ab}$ satisfacen la cadena de desigualdades $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Recomendamos a los profesores que planteen a sus estudiantes, y le pidan que ellos mismos planteen, varios problemas cuya solución conduzca al número $\sqrt{ab}$. Cuando este número haya adquirido importancia para los estudiantes se le puede llamar media geométrica de *a* y *b*, e indicarse por $MG = \sqrt{ab}$. Nuestros estudiantes no se motivaron con la búsqueda de tales problemas.

1.3 Las diagonales del cuadrado tienen la misma longitud que las del rectángulo.

Los estudiantes llegaron a la solución $l = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$*,* y seguidamente se le planteo el siguiente

Ejercicio 3. Pruebe que $a \leq \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \leq b$ y determine cuando se cumple la igualdad.

Después de plantear otros problemas cuya solución conduzca al número que da la solución del problema 1.3 se puede indicar este número por *MC* y denominarlo media cuadrática de *a* y *b.*

1.4 El cuadrado tiene igual relación área / perímetro que el rectángulo.

Los estudiantes llegaron sin dificultad a la solución $\ell = \dfrac{2ab}{a+b}$; y con la ayuda del profesor llegaron a la expresión equivalente $\dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ y resolvieron el siguiente

Ejercicio 4. Pruebe que si *a* y *b* no son simultáneamente nulos, entonces $a \leq \dfrac{2ab}{a+b} \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, a = b.

1.5 El cuadrado tiene igual relación área / diagonal que el rectángulo.

Los estudiantes obtuvieron sin dificultad las igualdades

$$\ell = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}} \qquad \left(\frac{1}{\ell} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}\right)$$

y resolvieron el siguiente

Ejercicio 5. Pruebe que si *a y b* son no negativos y no simultáneamente nulos*,* entonces $a \leq MHC \leq b$ y que las igualdades se tienen si, y sólo si, a = b.

Conclusiones parciales:

Esta conclusiones están dirigidas a los profesores, no obstante, se hacen comentarios sobre como se comportaron los estudiantes.

1. Se ha indicado cómo proceder para que dados dos números positivos a y b se contribuya a que tengan un significado especial para los estudiantes los números

$$\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}\,,\ \frac{2ab}{a+b}\,,\ \sqrt{ab}\,,\ \frac{1}{2}(a+b)\,,\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

Después de haber trabajado en la forma que se ha indicado en esta sección, los estudiantes comprendieron la utilidad de estos cinco números y estaban familiarizados con los mismos.

2. Se han planteado cinco ejercicios que están dirigidos a destacar dos rasgos comunes a las cinco medias anteriores:

   2.1 Si M es uno cualquiera de esos cinco números, entonces $a \leq M \leq b$ si a y b son no negativos y no simultáneamente nulos.

   2.2 Se cumple que $M = a$ si, y sólo si, $a = b$.

Los estudiantes de los dos grupos fueron capaces de encontrar estos dos rasgos comunes de las cinco medias analizadas en esta sección.

3. Los estudiantes no fueron capaces de plantearse la pregunta: ¿existe algún orden entre las medias estudiadas?

4. Primeras abstracciones y primera generalización vinculadas al concepto de media numérica.

Se le dieron a los dos grupos de estudiantes ideas generales de los procesos de abstracción, de selección de rasgos comunes de objetos particulares y de generalización; y se le planteó el problema siguiente: *Llegar a algún tipo de generalización de los casos particulares que se habían estudiado*. Contrariamente a lo que esperábamos, los estudiantes del octavo semestre no utilizaron los rasgos comunes seleccionados. A partir de la forma de las medias estudiadas y utilizando su pensamiento funcional llegaron a la generalización $M = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^s$, con r.s =1, y r entero. No llegaron a una generalización donde r fuese un numero real cualquiera, lo cual indicó que no eran capaces de utilizar una potenciación mas allá de los números racionales. Los estudiantes del primer semestre también trataron de generalizar las expresiones de las medias pero no tuvieron éxito. Aunque habíamos insistido mucho en la selección de rasgos comunes esta situación se explica porque:

-Ninguno de los estudiantes de los dos grupos había desarrollado habilidades para llegar por ellos mismos a la definición de un concepto seleccionando rasgos esenciales de objetos particulares.

-Tenían experiencia en generalizar expresiones algebraicas sustituyendo números por parámetros.

-La mayoría de los conceptos los habían estudiado a partir de su definición y nunca encontrando ellos los rasgos esenciales.

En resumen, los estudiantes hicieron abstracción de todas las demás características y rasgos de estas cuatro medias y, analizando y trabajando con la forma de sus expresiones llegaron, con la ayuda del profesor en el caso del grupo de primer año, a nuevas expresiones que permiten una primera generalización. Si tenemos en cuenta que ninguno de los estudiantes conocía perfectamente la generalizaciones de la operación de potenciación, es sumamente significativo que haya sido para ellos mas difícil dar una definición sacando los rasgos comunes que utilizar una expresión con una operación que no dominaban totalmente, como es caso de la potenciación

El profesor escribió, para a y b, no negativos en el caso en que aparece una raíz cuadrada y no simultáneamente nulos en el caso en que aparece un exponente negativo, las expresiones de *MHC, MH, MA, MC* en la forma

$$MHC = \left(\frac{a^{-2} + b^{-2}}{2}\right)^{\frac{1}{-2}}, \quad MH = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}}, \quad MA = \left(\frac{a^{1} + b^{1}}{2}\right)^{\frac{1}{1}}, \quad MC = \left(\frac{a^{2} + b^{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

y sugirió a los estudiantes sustituir las notaciones *MHC, MH, MA* y *MC* por M_{-2}, M_{-1}, M_1 y M_2, respectivamente, y utilizar una expresión general para las cuatro medias; i. e.

$$M_p = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \{-2,-1,1,2\}$$

Entonces presentando la cadena de inclusiones $\{-2,-1,1,2\} \subset Z \subset Q \subset R$; se les guió para que completasen sus generalizaciones y planteasen una primera generalización del concepto de media numérica con una extensión de cuatro objetos, a un concepto de media numérica con una extensión con infinitos objetos, y aceptasen como adecuada la definición del concepto generalizado siguiente:

Definición 1. Se denomina media p-ésima de dos números reales no negativos y no simultáneamente nulos a y b , al número $\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in R \setminus \{0\}$,y se indica por M_p .

Seguidamente se le pidió a los estudiantes que propusieran algunas propiedades de las medias p-ésimas que ellos consideraban que debían cumplir, de acuerdo a los resultados obtenidos con las cinco medias estudiadas. De donde surgió el siguiente

Ejercicio 6. Pruebe que si *a y b* son números reales no negativos y no simultáneamente nulos; entonces $a \leq M_p \leq b$ y pruebe, además, que las igualdades se tienen si, y sólo si, a = b.

5. Abstracciones más profundas conducentes a la determinación de rasgos esenciales. Segunda generalización.

El ejercicio 6 de §4 les permitió asegurar que toda media p-ésima tiene dos rasgos comunes. Con la ayuda del profesor enunciaron esos rasgos, utilizando expresiones funcionales, en forma de propiedades para las medias p-ésimas como se muestra a continuación. Dados dos números reales no negativos y no simultáneamente nulos a y b, cada media cumple:

(i) Es menor o igual que max{a, b} y mayor o igual que min{a, b}; i. e.

$$min\{a,b\} \leq M_p(a,b),\ G(a,b) \leq max\{a,b\}$$

(ii) Es igual a max{a, b} e igual a min{a, b} si, y sólo si, a = b; o sea

$$min\{a,b\} = M_p(a,b) = G(a,b) = max\{a,b\} \text{ si, y sólo si, } a = b$$

Seguidamente se presentaron a los estudiantes ejercicios que los ayudaron a que plantearan, y seguidamente probaran, la afirmación siguiente

(iii) Toda media p-esima es invariante por un cambio de escala, o sea, $M_p(ta, tb) = t\, M_p(a, b)$ y $G(ta, tb) = tG(a, b)$.

Los estudiantes aceptaron de manera natural, aunque no fueron capaces de enunciarla, la definición del concepto de media numérica siguiente

Definición 2. Dados dos números reales positivos a y b, todo número M(a, b) que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) recibe el nombre de media numérica de a y b.

En el artículo (Nicolai, 1977) se presenta una definición del concepto de media que toma estas tres propiedades como el contenido de este concepto.

Al llegar a este punto los estudiantes tenían dos definiciones de medias numéricas, no obstante, ellos no tuvieron ninguna preocupación en cuanto a la equivalencia de estas dos definiciones, y de las generalizaciones que representan. Fue el profesor quien llamó la atención sobre este hecho, mediante la realización de la pregunta: ¿existen medias numéricas de a y b que satisfacen la definición 2 y que no son medias p-ésimas? Esta pregunta puede hacerse con diferentes objetivos:

- Para que los estudiantes determinen si la segunda generalización es más amplia (si la respuesta es positiva) o de igual amplitud (si la respuesta es negativa).
- Para que los estudiantes comprendan el concepto de extensión de un concepto.

La respuesta afirmativa de la pregunta se obtuvo también con la solución de un problema, que debido a las restricciones de espacio no presentamos, lo cual permitió concluir que la generalización segunda, que se obtuvo del proceso que condujo a la definición 2, no es vacía con respecto a la primera generalización. Por medio de problemas se logro que los estudiantes de los dos grupos participaran en el proceso de generalización del concepto de media numérica asociados a tres y n números reales.

Bibliografía

1. Davidov, V. (1981). Tipos de generalización en la enseñanza. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Cuba.
2. Maor, E. (1977) “A Mathematicians repertoire of means”. Mathematics Teacher 70. January. 20-25.
3. Nicolai, M.B. (1977). Commenting on Maor’s “A Mathematicians repertoire of means”. In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. September. 486.
4. Vygotsky L.S., (1998), Pensamiento y Lenguaje. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Segunda Edición.