

# ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DEL SIGNIFICADO DE LA TERCERA DERIVADA

Carlos A. García y Ricardo A. Cantoral  
Cinvestav-IPN. México

[carlos\\_agp@hotmail.com](mailto:carlos_agp@hotmail.com)    [rcantor@mail.cinvestav.mx](mailto:rcantor@mail.cinvestav.mx)

## RESUMEN:

Se presentan los resultados del estudio relacionado con la tercera derivada desde la aproximación socioepistemológica. El análisis del discurso matemático escolar contenido en los libros de Análisis ha permitido observar la introducción de las derivadas sucesivas, y en consecuencia a la tercera derivada, como un proceso iterativo que se aplica a funciones que se generan al derivar una función. Sin embargo, esta presentación minimiza las relaciones de variación que vinculan a la derivada primera con las de orden superior. Con el propósito de identificar propiedades gráficas de las funciones en las que entra en juego el pensamiento y lenguaje variacional, se analizaron los vínculos de la curvatura y las variaciones de tercer orden. Culminando en el diseño e implementación de una secuencia fundamentada en las variaciones del círculo de curvatura.

## INTRODUCCIÓN

Desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 2000), se han realizado diversas investigaciones con el afán de generar secuencias didácticas que favorezcan la noción de variación en los estudiantes de los cursos de análisis de nivel medio superior y superior. Particularmente en el tema de derivadas de orden superior se han realizado investigaciones acerca de la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas (Contreras, 1999) y el diseño de secuencias desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas (González, 1999). Estas aproximaciones han abierto un terreno propicio para germinar investigaciones en diversas direcciones, y el presente proyecto corresponde a una de las vertientes que tienen su origen en ésta perspectiva.

La noción central del proyecto lo conforma la variación de la circunferencia de curvatura en la descripción del comportamiento de la función. Bajo este supuesto, se han implementado una serie de actividades con el propósito de generar un ambiente propicio para que el estudiante analice las relaciones existentes con las derivadas de una función.

## DESARROLLO

### Problema y justificación del estudio

Desde el punto de vista de las derivadas sucesivas, se ha reportado que la presentación de este tema, se considera de importancia en dos aspectos, el primero de ellos corresponde al análisis gráfico y el segundo, sin dejar de considerar el anterior, corresponde al estudio del Polinomio de Taylor. (Pernía, 1984). Sin embargo, se hace énfasis en el aspecto iterativo del proceso de derivación dejando de lado las propiedades variacionales que aparecen de manera implícita al calcular derivadas de orden superior. Esto limita a la derivación a un proceso de algoritmización, perdiendo el estudiante una serie de significados que la derivada posee, limitando así su desempeño en diversos contextos que requieren interpretaciones diversas del proceso de derivación. En este sentido la hipótesis que sustenta a este proyecto es la estabilización del concepto de derivada hasta que el estudiante ha hecho propia la noción de derivada sucesiva desde la perspectiva variacional.

Bajo esta visión, pretendemos identificar las propiedades variacionales de la curvatura, para el diseño de una secuencia que considere variaciones de tercer orden, con el afán de proporcionar al alumno un espacio propicio para analizar los vínculos de la primera derivada con sus derivadas sucesivas.

## **Marco Teórico y Metodología**

El marco teórico que sustenta esta investigación corresponde a la aproximación socioepistemológica, que considera cuatro dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

Desde la perspectiva didáctica nos interesa estudiar el discurso matemático escolar contenido en los libros de texto. Nuestra aproximación corresponde al análisis de textos científicos como resultado de la cultura. En este sentido no solo nos interesa identificar el tipo de presentación y los propósitos del autor en relación a la tercera derivada, sino integrar los recursos discursivos que utiliza a lo largo de su presentación del tema en la obra y los posibles significados que genera en los usos que hace la noción.

Asimismo, se consideran los significados generados en diversas obras relacionadas con temas de física e ingeniería, pues en ellas se aborda a la segunda derivada como la aceleración y en consecuencia la tercera derivada describiría variaciones en la aceleración.

En la dimensión epistemológica pretendemos analizar la naturaleza y desarrollo de las nociones de derivación, curvatura y círculo osculador, identificando sus cualidades particulares, los vínculos que existen entre estos tres temas así como las posibilidades de integrar evidencias de variaciones de tercer orden. Estas dos aproximaciones fortalecerán el diseño de la secuencia didáctica para identificar las cualidades cognitivas de los estudiantes al identificar variaciones de tercer orden; identificando los diferentes registros de representación, gráfico, icónico, gestual, analítico, verbal, etc., que utilizan durante la resolución de la secuencia. Finalmente, como se puede observar, la dimensión social ha entrado en juego en cada una de las dimensiones anteriores.

El estudio de textos se realizó con cuatro obras representativas en el área de Análisis y que actualmente están vigentes en la cultura escolar. Los propósitos del análisis fueron los siguientes:

- Identificar la forma en que el autor define el concepto.
- Caracterizar el orden de presentación del tema para ubicar el concepto.
- Describir el tipo de ejemplos que resuelve y los problemas que propone al lector.
- Establecer los contextos en que ubica a la noción.
- Ubicar los recursos gráficos, textuales y tipográficos de los se vale en su presentación.
- Determinar la intencionalidad del autor al presentar el tema.
- Delimitar el tipo de usos que hace el autor del tema en cuestión durante su presentación y en capítulos posteriores.

En este sentido, el trabajo consistió en recopilar muestras de texto que sustenten las afirmaciones que se generen en cada uno de estos aspectos.

En lo referente al estudio de la curvatura para la estructuración de la secuencia, se procedió en dos direcciones. Por una parte, se analizaron las posibilidades de diversas presentaciones de la curvatura, tratando de ampliar y representar en diferentes registros las nociones que emanan de las diferentes obras en las áreas de cálculo, historia de la matemática, geometría y geometría diferencial. Por otra parte se aprovecharon los recursos que ofrecen las calculadoras graficadoras con el propósito de identificar relaciones visuales entre las derivadas primera, segunda y tercera y las variación de la curvatura.

Finalmente, el diseño de la secuencia se efectuó considerando las propiedades puntuales y globales del círculo de curvatura y las variaciones que experimenta al desplazarse a lo largo de la gráfica. Particularmente la secuencia cubre los siguientes aspectos

- Identificación de las propiedades de la circunferencia de curvatura y la gráfica de la función
- Variaciones de la concavidad y su repercusión en el radio de curvatura
- Caracterización de la circunferencia de curvatura en los puntos de inflexión
- Variaciones de la circunferencia de curvatura en la trayectoria de las gráficas
- Visualización de variaciones en la función de curvatura
- Establecimiento de conjeturas y argumentación de las mismas

La secuencia se implementará en estudiantes de nivel medio superior y superior que han recibido al menos un curso de cálculo. La implementación se realizará en entrevistas semiestructuradas en la cuál se consideran dos sesiones en las que se resolverán las tres fases de la secuencia. El proceso de resolución se realizará en equipos de tres estudiantes cada uno grabando en audio y video cada sesión para establecer el registro de los episodios.

### Avances preliminares

El análisis de textos ha permitido identificar la conceptualización de las derivadas de orden superior como un proceso iterativo que se aplica a las funciones que se generan al derivar. Este es una invariante que se presenta en las cuatro obras analizadas. Sin embargo se detectaron diferencias en lo referente a los ejemplos, problema, orden de presentación y contextos manejados. Se ubicó que los gráficos son preferentemente utilizados como recursos de apoyo a las nociones introducidas y como resultado de los procesos aplicados a la función.

En lo referente a la noción de curvatura, ubicamos diversas aproximaciones que permitieron identificar cualidades variacionales de la gráfica en las que interviene la primera y segunda derivada. Una aproximación considera una circunferencia límite que se genera mediante una recta tangente a la gráfica en un punto, en ella se traza una circunferencia que sea tangente a la recta y que toque a la gráfica en el punto P y la corte en el punto Q (fig1). La circunferencia de curvatura es el límite, si es que existe, cuando hacemos tender el punto Q al P siguiendo la grafica.

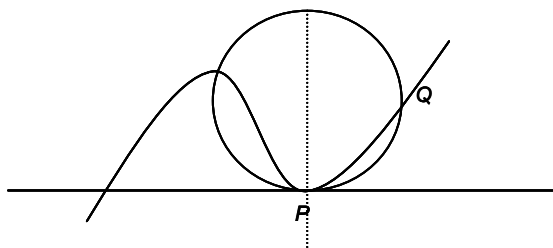


Figura 1

Esta aproximación nos permite identificar una familia de circunferencias cuyos centros se ubican sobre la recta normal a la tangente a la curva en P. Y observamos que conserva una estrecha relación con las secantes en la conformación de la tangente.

Esto nos permite obviar la existencia de una relación entre la primera derivada y la circunferencia de curvatura, por otra parte, observamos que la circunferencia conserva las propiedades de concavidad de la curva en un entorno cercano a P.

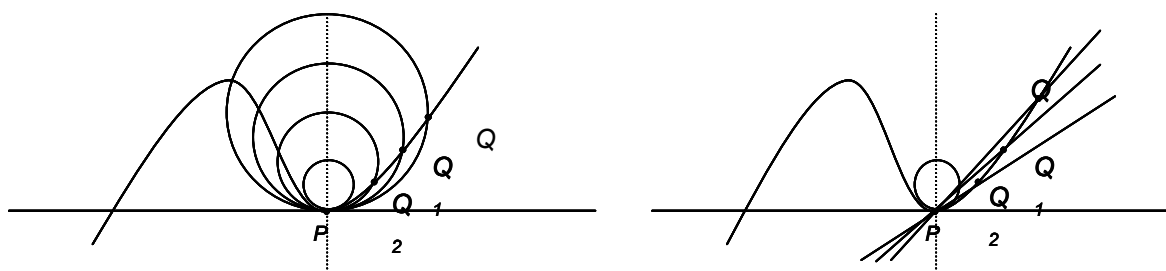


Figura 2

Esto es de utilidad debido a que se hace explícita la relación con la segunda derivada. Sin embargo el estudio de esta noción nos permitió delimitar los alcances reales dirigidos hacia las variaciones de tercer orden.

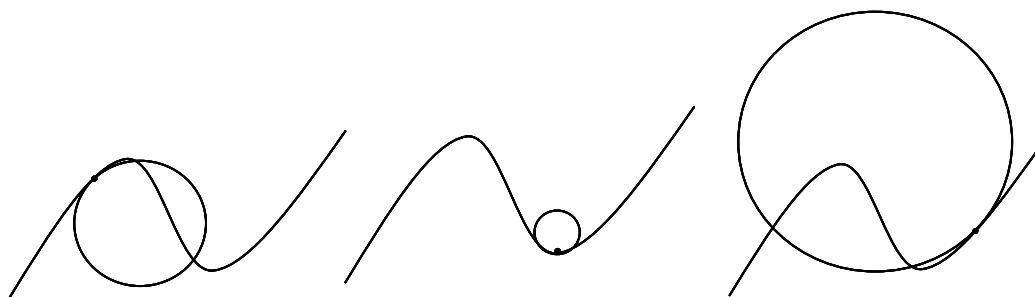


Figura 3

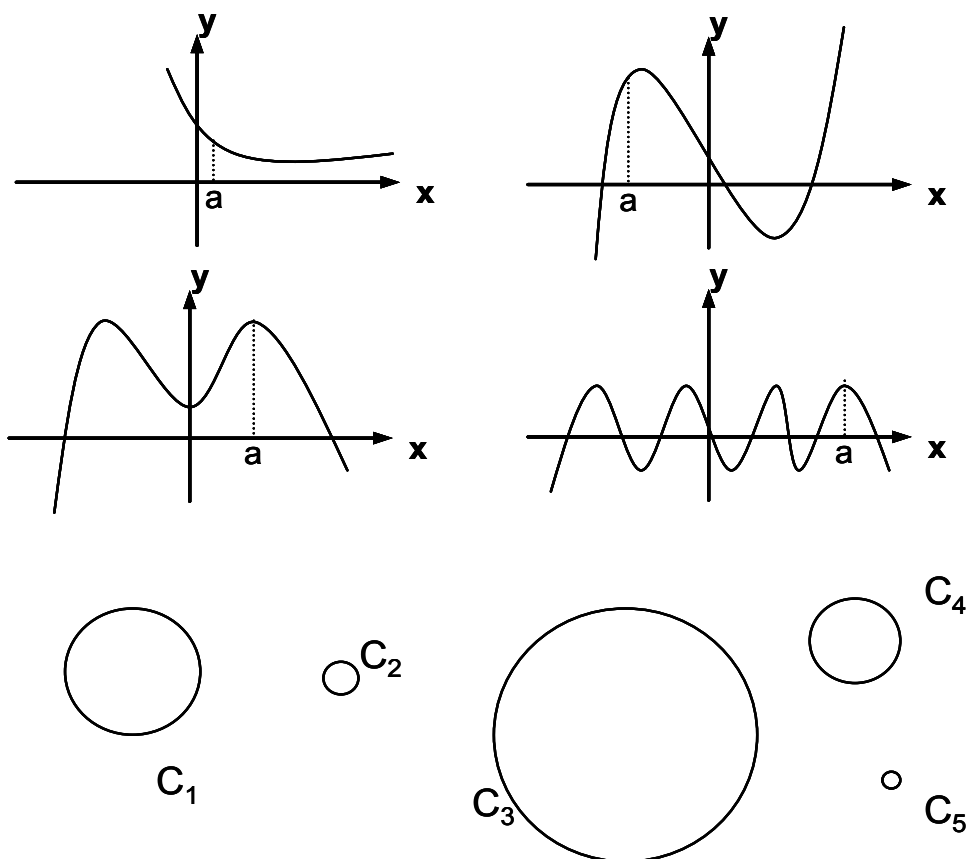
Al analizar los comportamientos gráficos relacionados con la curvatura identificamos relaciones entre los gráficos correspondientes a la curvatura de la gráfica y su segunda derivada que nos permiten observar relaciones con los puntos de inflexión, los máximos y mínimos locales.

Estas aproximaciones han permitido la conformación de una secuencia que considera tres secciones, la primera de ellas corresponde a un estudio preliminar de las posibilidades del estudiante en problemas relacionados con el tema y que corresponden al discurso matemático escolar; la segunda parte considera la identificación de las propiedades del círculo osculador, la variación del radio de curvatura a lo largo de la gráfica así como la identificación de las propiedades gráficas de la función; finalmente se propone a los estudiantes, actividades que, con el apoyo de la calculadora graficadora, permitan visualizar propiedades variacionales relacionadas con el comportamiento de la curvatura y el gráfico de la derivada y sus derivadas sucesivas.

Las actividades se estructuraron de manera tal que el estudiante partiera de nociones intuitivas hasta desarrollar conjeturas que requieren de un análisis detenido de la situación.

### Actividad 1

En la parte inferior se encuentran cinco circunferencias, selecciona y dibuja sobre las gráficas la cada función, la circunferencia que mejor “imite”, el comportamiento de la curva en un entorno de el punto  $(a, f(a))$ .



- ¿qué puedes conjeturar?
- ¿qué características comparten localmente la gráfica y la circunferencia?

Partiendo de este marco intuitivo se pretenden identificar las relaciones que existen entre las nociones de curvatura y variaciones de tercer orden, así como las relaciones que se puedan deducir entre la tercera derivada, la función y las derivadas de primer y segundo orden.

### COMENTARIOS FINALES

El análisis de las obras literarias científicas, permitió identificar las diversas aproximaciones que realizan los autores en el tema de estudio. Las posibilidades de la circunferencia de curvatura se aprovecharon para generar la secuencia relacionada con variaciones de tercer orden. La secuencia considera aspectos relacionados con el desempeño de los estudiantes al resolverla haciendo énfasis en la identificación de las propiedades de la circunferencia de curvatura y sus relaciones con el gráfico de la función.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los procesos del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). Editorial Iberoamericana. México.
- Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal*. Editorial Iberoamericana. México.
- Contretras, L. (1999). *La interpretación geométrica de las derivadas sucesivas*. CINVESTAV, IPN. México.
- González, R. (1999). *Estudio paralelo de la presentación de la derivada en diversos textos de cálculo*. CINVESTAV, IPN. México.
- Pernía, R. (1984). *Estudio paralelo de la presentación de la derivada en diversos textos de cálculo*. CINVESTAV, IPN. México.