

MODELO DIDÁCTICO ALTERNATIVO PARA EL AJUSTE DE CURVAS

Patricio Rosen R. y Carlos H. Saavedra
Universidad Nacional Autónoma de México, México
pizzio@hispavista.com cahesa@hispavista.com

RESUMEN:

El análisis de datos ha cambiado muchísimo en estos últimos años con la inclusión de ciertas técnicas que en general son muy sencillas y poco conocidas por ejemplo los diagramas de tallos y hojas o los diagramas de cajas y bigotes, estos últimos ya incorporados en algunas calculadoras gráficas. La recta de Tukey, o mejor conocida como el método de Mediana-Mediana, que figura en el currículo de Matemáticas IV, del tronco común de los programas actuales del Colegio de Ciencias y Humanidades, permite ajustar una recta a una nube de puntos en algunos casos en los que el ajuste mínimo cuadrático produce resultados no muy buenos. Por eso, nos ha parecido que podría tener cierto interés el conocer esta técnica desarrolladas por el matemático americano John Wilder Tukey. *La recta de Tukey o Mediana-Mediana* es un método novedoso y práctico que puede venir a apoyar a otro que tradicionalmente se ha empleado en el ajuste de curvas, a nivel bachillerato, el de Mínimos Cuadrados.

En el presente trabajo presentamos las bondades prácticas de este método ingenioso que no requiere de un fundamento matemático demasiado abstracto en su tratamiento, y por lo cual se puede emplear en el cuarto semestre del tronco común de los programas vigentes del Colegio de Ciencias y Humanidades.

INTRODUCCIÓN

Por una parte, la situación actual en la que se encuentra la educación a nivel bachillerato en nuestro país, nos lleva a ser más cuidadosos en generar aquellos apoyos didácticos que requerirá en forma urgente el cuerpo docente, para ello es necesario avanzar con materiales educativos que le permitan al profesor suavizar el abordaje de los programas de Matemáticas, y su tratamiento le permita crear un ambiente académico adecuado a resarcir construcciones de conocimientos matemáticos significativos en nuestros alumnos, por esta razón el Seminario de trabajo de Rubro 2 del área de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades ha avanzado en la producción de materiales de apoyo con esta metodología. Debemos agregar en este apartado, que durante este periodo, los integrantes del Seminario diseñamos una serie de fichas de trabajo para favorecer el proceso enseñanza-aprendizaje, fichas que incluyen principalmente actividades individuales o grupales para que los estudiantes trabajen en el aula y que incluyen: la temática, los objetivos a alcanzar y una serie de sugerencias para que el profesor las utilice adecuadamente.

Estas fichas son de cinco tipos diferentes:

- *Fichas de lectura:* En este tipo de fichas la participación del alumno se limita a leer con atención para obtener nociones básicas o introductorias sobre un tema. Se utilizan con fines de motivación o para referencia de consulta. Requieren pocos antecedentes previos.
- *Fichas de exploración:* En este tipo de fichas se presentan al estudiante tareas de diferente grado de complejidad (generalmente basadas en un problema), para que él realice conjeturas o redescubra propiedades de algún ente matemático. Se recomienda trabajarlas en dos etapas, primero en forma individual y luego en pequeños grupos de trabajo. Estas fichas plantean “puentes conceptuales”, de acuerdo al avance de los alumnos. Requieren respuestas escritas.

- *Fichas de sistematización*: En este tipo de fichas el estudiante trabaja en la solución de problemas o ejercicios mediante una guía dirigida, para que sistematice procedimientos y estrategias típicas de solución a los mismos. Requieren respuestas escritas.
- *Fichas de consolidación*: Mediante estas fichas se pretende descubrir los avances alcanzados por los estudiantes en el logro de algún objetivo de aprendizaje, así como servir de retroalimentación a los aprendizajes adquiridos. Requieren respuestas escritas.
- *Fichas de aplicación*: Estas fichas pretenden lograr que los alumnos “transfieran” el aprendizaje adquirido, es decir que puedan aplicarlo en contextos distintos. Requieren respuestas escritas. Se recomienda trabajarlas de preferencia de manera grupal.

Por otra parte, el análisis de datos ha cambiado muchísimo en estos últimos años con la inclusión de ciertas técnicas que en general son muy sencillas y poco conocidas por ejemplo los diagramas de tallos y hojas o los diagramas de cajas y bigotes, estos últimos ya incorporados en algunas calculadoras gráficas. La recta de Tukey que figura en el currículo del Colegio de Ciencias y Humanidades, permite ajustar una recta a una nube de puntos en algunos casos en los que el ajuste mínimo cuadrático produce resultados no muy buenos.

Por eso, nos ha parecido que podría tener cierto interés el conocer algunas de estas técnicas desarrolladas por el matemático americano John Wilder Tukey.

¿QUIÉN ES TUKEY?

John Wilder Tukey nació el 16 de junio de 1915 en New Bedford Massachusetts. Después de licenciarse y hacerse Master en Química por la Universidad de Brown en 1937 participó en el programa de matemáticas de la Universidad de Princeton donde recibió el Master en 1938 y el Doctorado en 1939.

Después de su graduación, fue nombrado instructor de Matemáticas de Princeton; 10 años más tarde llegó a ser catedrático. En 1965 la Universidad de Princeton creó el departamento de estadística, y Tukey fue su primer director. Además de su posición en Princeton fue miembro de la Dirección Técnica de los Laboratorios de ATT & Bell desde 1945 hasta jubilarse en 1985 como Director ejecutivo de Investigación en la División de Información Científica.

Tukey está considerado una de las personas que más ha influido en el análisis exploratorio de datos habiendo sido el creador de diversas técnicas, tales como los diagramas de tallos y hojas, los diagramas de cajas y bigotes, etc. También ha hecho importantes aportaciones a la teoría de la estimación y al análisis de las series cronológicas. Tukey es autor de numerosos libros y de más de 350 artículos importantes en matemáticas y estadística. A él también se debe el término de contracción de las palabras *binary digit*.

La participación de Tukey tanto en educación como en servicios de asesoramiento técnico al gobierno ha sido importante. Fue nombrado miembro del Comité Asesor Científico del Presidente Eisenhower en 1965; ayudó al desarrollo del Programa Nacional para el Progreso de la Educación y fue un miembro destacado de la Oficina del Censo en 1990.

A lo largo de su vida de trabajo ha conseguido todo tipo de honores, tan sólo mencionamos los más importantes: recibió la Medalla Nacional James Madison de la Universidad de Princeton y miembro extranjero en la Royal Society de Londres.

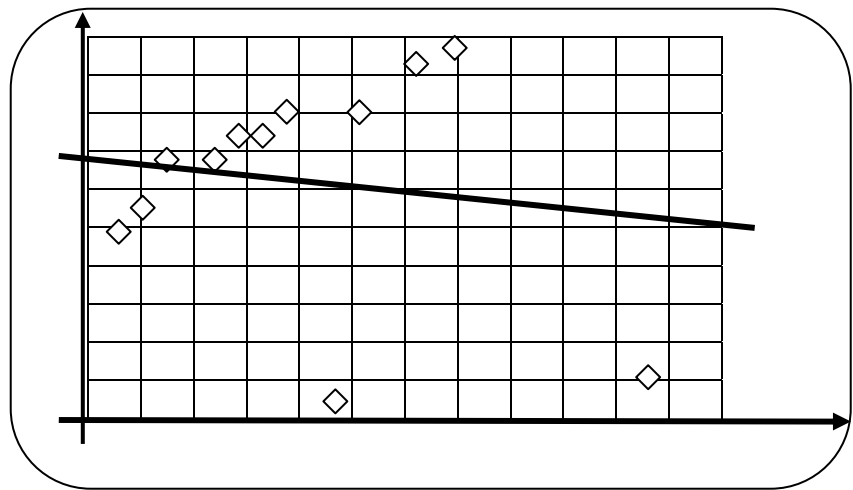
Tukey hasta hace muy poco ha seguido desempeñando el cargo de Profesor Emérito de Estadística, Profesor Emérito de Ciencia y Alto investigador Estadístico en la Universidad de Princeton.

LA RECTA DE TUKEY

Consideramos la distribución bidimensional dada por la tabla del margen. Con una calculadora con tratamiento bidimensional obtenemos la ecuación de la recta en regresión de Y, que es la siguiente:

$$Y = - 0.161 X + 13.569$$

En el gráfico hemos representado la nube de puntos y la recta de regresión. Es obvio que debido a dos puntos patológicos la recta obtenida se ajusta muy mal a la nube.



La regresión que hemos estudiado está basada en las medias, y éstas son muy sensibles a los valores muy extremos. En cambio, la mediana es un parámetro mucho más inerte a estos valores extremos.

El estadístico americano John Wilder ha desarrollado un procedimiento que se basa en esta idea eliminando en gran medida la influencia de los valores muy extremos.

Se divide el eje X en tres partes de modo que cada una de las partes corresponde aproximadamente a la tercera parte de los datos. Con ello dividimos la nube en puntos en tres nubes. Calcularemos la mediana de la X y la mediana de la Y de la nube de la izquierda; a ese punto lo denotamos (M_{x1}, M_{y1}) .

Análogamente calculamos la mediana de la X y la mediana de la Y de la nube de la derecha; a ese punto lo denotamos por (M_{x3}, M_{y3}) .

➤ Gráficamente, la recta de Tukey se obtiene trazando la recta que pasa por los puntos (M_{x1}, M_{y1}) y (M_{x3}, M_{y3}) , y a continuación trasladando paralelamente dicha recta y la otra mitad por debajo.

➤ Analíticamente, la recta de Tukey viene dada por la ecuación:

$$Y = ax + b, \text{ donde:}$$

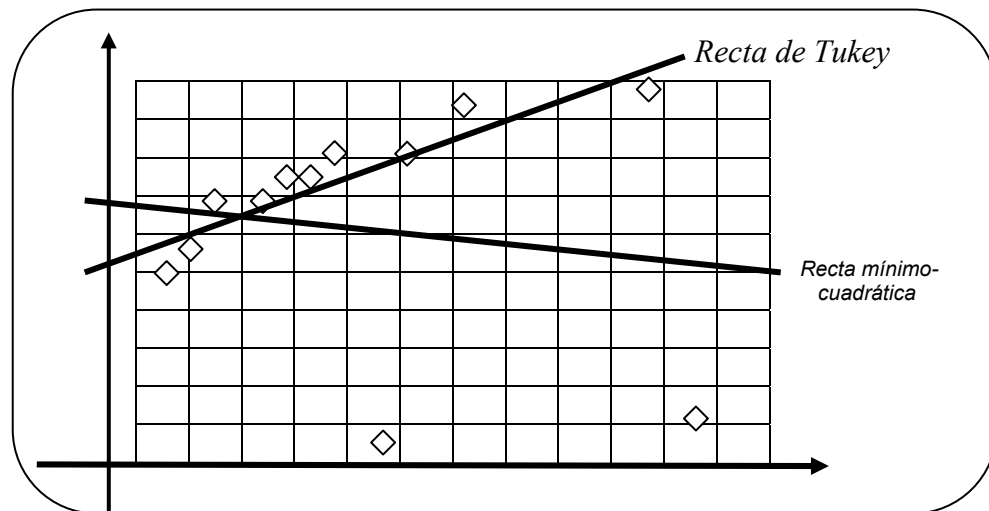
$$a = \frac{M_{Y3} - M_{Y1}}{M_{X3} - M_{X1}}, \quad b = \text{mediana de los valores } (y_i - ax_i).$$

Hoy en día existen calculadoras gráficas que ya tienen incorporado un procedimiento para obtener la ecuación e la recta de Tukey que también se llama *recta resistente*.

La recta así obtenida tiene la siguiente ecuación:

$$Y = 0.476 X + 10.849$$

A continuación representamos ambas rectas: la mínimo-cuadrática y la de Tukey, que evidentemente se ajusta mucho mejor a la mayor parte de los puntos de la nube.



CONCLUSIONES

El *ajuste de curvas* es un tema que se ha estudiado casi exclusivamente en programas de estadística, no obstante su inserción en el programa de Matemáticas IV, última asignatura del tronco común en el CCH, es la de darle un aspecto de cierre al estudio de *funciones* que se da a lo largo de los cuatro primeros semestres, esto significa que a partir de una serie de datos, recopilados al analizar el comportamiento de algún fenómeno, los métodos para ajustar curvas nos permiten obtener a su vez el comportamiento funcional del mismo. Además, el uso de estos métodos tendría que estar ligado al entorno natural de los alumnos. Estos tienen que practicar la recopilación de datos, su representación en tablas y gráficas, deben discutir conjuntamente la metodología más adecuada y deben ejercitarse en la interpretación de los resultados. Como hemos visto el *ajuste de curvas* se puede realizar de una manera novedosa, efectiva y práctica aplicando el método de *mediana-mediana o de Tukey*.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, M. C. et al (1987): *Azar y probabilidad*. Editorial Síntesis. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid.

Hawkins, A. et al (1992): *Teaching statistical concepts*. Longman. Londres.

Holmes, P. et al (1991): *Practical statisticals*. Macmillan. Londres.