LA SEGUNDA LEY DE KEPLER COMO ESLABÓN ENTRE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y EL CÁLCULO INTEGRAL

Alexander Bell Mejía y Roberto Torres Hernández
Instituto Tecnológico de Querétaro y Universidad Autónoma de Querétaro
robert@sunserver.uaq.mx

RESUMEN:

En el presente trabajo se expondrán algunos temas para enriquecer el curso tradicional de geometría analítica y cálculo integral a nivel medio-superior y superior. La idea principal consiste en proponer, analizar y desarrollar una serie de suplementos a los temas usuales con el objeto, por un lado, de ilustrar algunas aplicaciones y problemas que pueden resolverse con herramientas elementales y por otro, dar un vistazo a la historia y origen de algunos conceptos, así como su evolución y utilidad a través del tiempo. Lo anterior se hará con un ejemplo concreto que, de paso, muestra como se eslabonan diversos aspectos de las matemáticas escolares sobre un problema común.

INTRODUCCIÓN:

Dos de las principales líneas en la didáctica de las matemáticas son la enseñanza a través de la resolución de problemas y la incorporación de la historia de las matemáticas a las clases cotidianas. Con esto en mente, este trabajo propone una serie de temas complementarios a los temas usuales del curso promedio de geometría analítica con los siguientes objetivos:

1. En cuanto a la formación de profesores, creemos importante que el instructor de un curso de geometría analítica tenga un panorama más o menos amplio acerca de los diversos alcances del material que enseña, en cuanto a los problemas que resuelve. Por otro lado, consideramos que conocer el origen de algunos conceptos posibilitará entender, de manera clara, algunas de las dificultades encontradas en la evolución y por ende en la enseñanza de los mismos.
2. Articular y eslabonar diversos temas de las matemáticas elementales sobre un problema común.

ALGO DE HISTORIA:

En el siglo XVI d. C. el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543), basándose en la teoría de Aristarco (siglo III a. C.), afirmó que la Tierra y todos los planetas giraban alrededor del Sol como centro. Corrigiendo así la teoría de Ptolomeo desarrollada en el siglo II d. C.

Posteriormente, aprovechando el legado de Copérnico y tomando como base de sus especulaciones astronómicas los resultados de las pacientes observaciones realizadas por el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), después de muchos años de estudio, descubre que los planetas no se mueven formando círculos sino describiendo órbitas elípticas.

Este descubrimiento produjo un profundo cambio en la perspectiva científica acerca de la naturaleza. El movimiento circular establecido como soberano desde los tiempos antiguos hasta los días de Copérnico y Tycho Brahe era reemplazado por la elipse. De aquí en adelante, aquella cónica estudiada por Apolonio de Perga (alrededor de 247-205 a. C.) y a la cual nombró Elipse, pasaba a ocupar el centro de una filosofía práctica natural.

Empleando una frase poco ortodoxa podríamos decir que, en la época de Kepler, "*a la humanidad le «achataron» el círculo*".

Puede resultar curioso, pero sobre todo, muy interesante, relacionar este suceso histórico, con una definición de la Elipse. Esto es lo que estudiaremos a continuación.

EL MOVIMIENTO "CIRCULAR" DE LOS PLANETAS

Con la intención de iniciar una reflexión acerca del tema que aquí se enuncia, analizaremos la siguiente definición.

Definición (1). Una ***elipse*** es una circunferencia contraída.

Para ilustrar esta definición, basta trazar desde cada punto $\boldsymbol{P' = (x, y')}$ de una circunferencia de radio $\boldsymbol{a}$ y (para facilitar nuestro trabajo) con centro en el origen, un segmento perpendicular al *eje x*, tal y como se muestra en la *Figura* 1. Y, posteriormente, suponer que las ordenadas de todos los puntos $\boldsymbol{P'}$ de la circunferencia se acortan mediante un coeficiente de contracción $\boldsymbol{0 < k < 1}$. De esta manera, todo punto $\boldsymbol{P' = (x, y')}$ será sustituido por otro punto $\boldsymbol{P = (x, y)}$. Éste último tiene la misma abscisa que su antecesor, pero generalmente su ordenada es otra, a saber, $\boldsymbol{y = ky'}$.

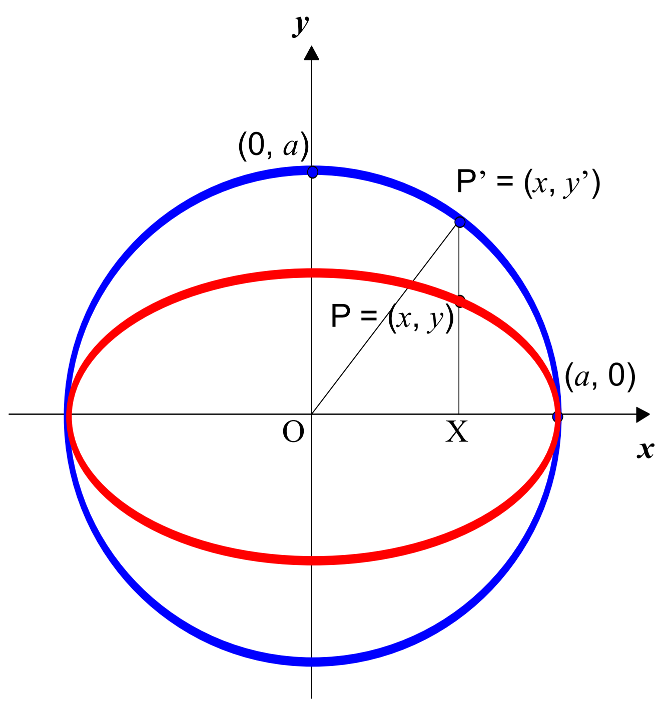

Figura 1

De este modo, la definición (1) afirma que mediante el proceso anteriormente descrito, se transforma a la circunferencia considerada en una elipse.

Por otro lado, obtener la ecuación de esa elipse es sencillo, para ello es suficiente relacionar los siguientes hechos:

- De acuerdo con la definición (1), para la ordenada de cualquier punto ***P* = (*x*, *y*)**, de la elipse, se tiene que:

$$y = ky'$$

- Pero, al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo ***OP'X*** de la *Figura* 1, se tiene que:

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

  Claro está que si el punto ***P*** y su correspondiente ***P'*** están en la mitad superior o en la mitad inferior de la elipse, se tendrá que

$$y' = +\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{ó} \qquad y' = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

  respectivamente.

- Por otro lado, es claro que el punto de intersección de la circunferencia con la parte positiva del *eje y*, tiene por coordenadas **(0, *a*)**. Y que si al punto de intersección de la elipse con la parte positiva del *eje y*, le asignamos las coordenadas **(0, *b*)**, entonces por la definición (1), se tiene que

$$b = ka \text{ o, bien,} \qquad \frac{b}{a} = k$$

Así, de los tres hechos anteriores se sigue que: si ***P* = (*x*, *y*)** está en la mitad superior de la elipse, entonces

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ ,$$

mientras que si ***P* = (*x*, *y*)** está en la mitad superior de la elipse, entonces

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Pero, si se elevan ambas ecuaciones al cuadrado, entonces las coordenadas de cualquier punto ***P* = (*x*, *y*)** de la elipse (independientemente de si se encuentra en la parte superior o inferior) satisfacen a la ecuación

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

o, de manera equivalente, a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Que no es otra que la ecuación *canónica* de la elipse que se obtiene al trabajar con la siguiente definición

Definición (2). Una ***elipse*** es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a dos puntos fijos tiene una suma constante.

Después de nuestro estudio y siendo coherentes con la definición (1), podemos afirmar que: *Los planetas giran al rededor del sol en circunferencias contraídas*. Y, en tono poco serio, podemos decir que esta última palabra "contraídas" era el error (de omisión) que Kepler corrigió a sus antecesores.

Ahora, antes de abordar un hecho curioso acerca de una de las leyes de Kepler, enunciaremos, de manera precisa, las primeras dos de sus tres leyes[1] sobre el movimiento de los planetas, mismas que sirven de base a la Astronomía y que marcan una época en la historia de la ciencia matemática.

- **Primera Ley**. La órbita de todo planeta es una elipse, con el Sol en un foco.
- **Segunda Ley**. El radio vector que enlaza al Sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.

Así, de acuerdo con esta ley, si el área de la región ***OPS*** es igual a la de la región ***QSP***, entonces el tiempo que tarda el planeta en pasar del punto ***P*** al punto ***O***, será el mismo que emplea en trasladarse del punto ***R*** al punto ***Q***. (*Figura* 2)

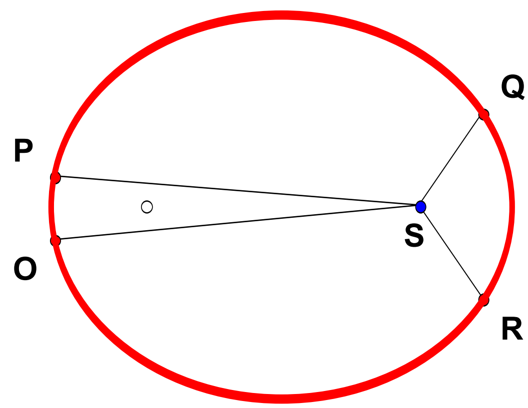

Figura 2

La segunda Ley de Kepler: En los trabajos de Kepler es notorio el abandono del rigor con el cual se trabajó desde la época de Arquímedes. El deseo de obtener resultados que el método griego era incapaz de proveer rápidamente, fue la razón por la cual este autor, entre otros, muy a menudo se basó en suposiciones no rigurosas. Así, por ejemplo, consideró que el área del círculo estaba compuesta de un sinnúmero de triángulos con vértice común en el centro. Esta forma de trabajar de Kepler le dio un matiz característico a su obra destacando, de manera particular, sus consideraciones infinitesimales. En este contexto, su segunda ley, constituye un ejemplo notable como antecedente al Cálculo Infinitesimal.[2]

Por otro lado, resulta interesante el hecho de que el sustento original (el realizado por Kepler), con el cual se logró establecer la certera e importante aseveración *"el radio vector que enlaza al Sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales"*, contenga una combinación de errores que se compensan mutuamente.

---

[1]Las dos primeras leyes se encuentran expuestas en su *Astronomia Nova* (1609), tratado que representa la culminación de sus cuidadosos esfuerzos para calcular la órbita de Marte.
La tercera, que es una muestra de un trabajo duro y prolongado, más que una genialidad del autor, se encuentra en la sección final de su *Armonices Mundi, Libri* (1619).

[2] Son precisamente las grandes obras de Kepler, Cavalieri, Torricelli, entre otros, en las que se desarrollaron métodos que con el tiempo condujeron a la invención del Cálculo.

Kepler, de manera acertada, logró establecer (con base en sus observaciones astrales) que si un planeta está en cualquiera de sus ápsides[3], entonces su velocidad $\boldsymbol{v}$ es inversamente proporcional a su distancia $\boldsymbol{r}$ desde el Sol. Esto es, si $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ son sus velocidades en el afelio $\boldsymbol{P_1}$ y perihelio $\boldsymbol{P_2}$ (*Figura* 3) entonces hay una constante $\boldsymbol{k}$, tal que

$$v_1 = \frac{k}{r_1} \qquad \text{y} \qquad v_2 = \frac{k}{r_2} \tag{1}$$

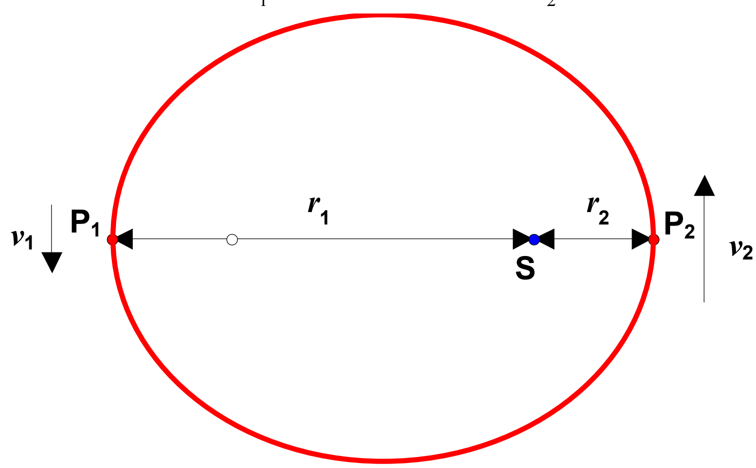

Figura 3

Después, este resultado lo generaliza estableciendo que este hecho se verifica para todo punto $\boldsymbol{P}$ de la órbita,

$$v = \frac{k}{r} \tag{2}$$

Esta afirmación ($\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{r}}$ para cualquier punto de la órbita) es el *primer error*, ya que la conjetura es falsa. Lo que en realidad se verifica es que la velocidad en $\boldsymbol{P}$ es inversamente proporcional a la distancia $\boldsymbol{d}$ perpendicular desde $\boldsymbol{S}$ a la recta tangente a la elipse en $\boldsymbol{P}$.

Por otro lado, al calcular el tiempo $\boldsymbol{t}$ requerido para cruzar un arco $\boldsymbol{PQ}$ (*Figura* 4) de su órbita, él dividió el arco en un gran número de subarcos de igual longitud $\Delta \boldsymbol{s}$. De este modo, si $\boldsymbol{r_i}$ es la distancia $\boldsymbol{SP_i}$ desde el Sol hasta el punto inicial $\boldsymbol{P_i}$ del **i**-ésimo subarco $\boldsymbol{P_iP_{i+1}}$, $\boldsymbol{v_i}$ la velocidad en $\boldsymbol{P_i}$, y $\boldsymbol{t_i}$ el tiempo requerido por el planeta para cruzar este subarco, obtuvo que

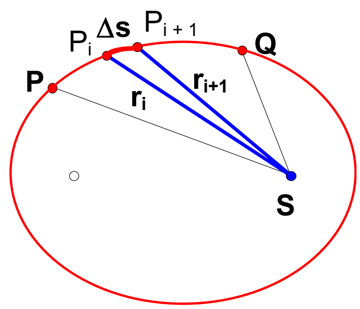

Figura 4

[3] En astronomía se llama *ápside* a cada uno de los dos extremos del eje mayor de la órbita de un astro, es decir, a los vértices de la órbita.

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{v_i} \qquad \text{(ya que } v_i = \frac{\Delta s}{t_i}\text{)} \tag{3}$$

Aquí, cuando Kepler considera la relación generalizada (no válida) $\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{r}}$, obtiene

$$t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{k / r_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i \, \Delta s}{k} \tag{4}$$

Para finalmente tener que

$$t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} r_i \, \Delta s \tag{5}$$

Por otro lado tomó en cuenta que, si la **i**-ésima sección de área fuera un triángulo con base $\boldsymbol{r}_{\mathbf{i}}$ y altura $\boldsymbol{\Delta s}$, entonces el área total

$$A \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s \,, \tag{6}$$

pero esta conjetura constituye el *segundo error*, ya que, también, es falsa. Este error, de manera superficial, podemos decir que es del mismo tipo que el primero, en el sentido de que se trata de generalizar una propiedad que es válida en situaciones particulares. Observemos que, esto constituiría una buena aproximación si r_i fura igual r_{i+1} situación que no se da en la elipse.

Sin embargo, este segundo error compensa al cometido anteriormente, de tal suerte que, de acuerdo con las expresiones (5) y (6), se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \, \Delta s = 2A = kt \,,$$

luego, ya que $\boldsymbol{k}$ es una constante, Kepler obtiene la expresión, precisa, siguiente

$$\boldsymbol{A = ct} \tag{7}$$

donde, obviamente, $\boldsymbol{c}$ es una constante cuyo valor es $\dfrac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}$.

Esta última expresión nos dice que el área $\boldsymbol{A}$ depende de la constante $\boldsymbol{c}$ y de la variable $\boldsymbol{t}$ (de esta manera si a un determinado tiempo t_0 le corresponde una área A_0 y a un tiempo t_1 una área A_1, entonces, de acuerdo con (7) A_0 será igual a A_1 cuando, y sólo cuando, t_0 sea igual a t_1), por lo que:

Una recta trazada desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Edwards, C. H. (1979) *The Historical Development of the Calculus.* USA. Springer-Verlag.

Katz, V. (1999). *A history of mathematics. An introduction.* USA: Addison-Wesley.

Lehmann, Ch. (1986). *Geometría Analítica.* México, D.F.: Editorial Limusa.