LOS MODOS DE PENSAMIENTO ANALÍTICO Y SINTÉTICO EN EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

Bonifacio Mora Rodríguez
Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. México.
bmora@tunku.uady.mx

RESUMEN

Ante el interés creciente por Álgebra Lineal y las dificultades que aún continúan presentando los estudiantes en el aprendizaje de los objetos abstractos de esta disciplina, el presente trabajo pretende apoyarse en el marco de la Geometría Sintética para introducir los espacios analíticos R^1, R^2 y R^3 y poder sólo después realizar las generalizaciones pertinentes a R^n.

Un análisis histórico permite comprender ciertas dificultades de los estudiantes y a la vez proporciona elementos para construir secuencias de actividades con miras a introducir los conceptos de Álgebra Lineal de tal manera que los estudiantes perciban la necesidad del formalismo, presentando todos los sentidos posibles de los conceptos en sus diferentes modos de representación, en particular conectarlo con sus conocimientos anteriores sobre los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría.

Esta investigación se desarrollará con estudiantes de primer año universitario, cuando llevan por primera vez Álgebra Lineal y el concepto de espacio vectorial es enseñado formalmente como una definición muy amplia que involucra varios conceptos previos.

Introducción

Intuitivamente podemos decir que un espacio vectorial es un conjunto de objetos que satisfacen ciertas reglas que llamamos axiomas.

En los últimos años, las investigaciones en didáctica de la matemática en Francia, han centrado su interés en algunos conceptos fundamentales del Álgebra Lineal. En comparación con la otra gran parte de la enseñanza durante los primeros años universitarios, por citar el cálculo o análisis, el Álgebra Lineal ha alcanzado un mayor interés para los investigadores. “Las dificultades de los estudiantes en Álgebra Lineal parecen ser igualmente importantes y visibles como en análisis” (Robert y Robinet, 1989; Rogalsky, 1990, referidos en Dorier, 1998).

Analizando los trabajos de J. L. Dorier encontramos que, después de un poco más de 15 años de investigación sobre conceptos del Álgebra Lineal, actualmente el interés por esta rama de las matemáticas ha crecido notablemente, así, menciona algunos trabajos que gracias a los cambios internacionales, permiten observar de manera unificada diferentes problemáticas de investigación que desembocan sobre algunos resultados todavía parciales pero alentadores (Dorier, 1997a).

Este trabajo se pretende desarrollar en 3 fases.

1. Etapa de exploración, en la que se podrá observar cómo vive el concepto de espacio vectorial en la mente de los estudiantes que ya han recibido algún curso de Álgebra Lineal.
2. Apoyados en la etapa anterior y un análisis histórico se buscará construir una secuencia de actividades-problema que permitan introducir el concepto de espacio vectorial en los estudiantes a través de los espacios geométricos R^2 y R^3.
3. Hacer visible la necesidad del formalismo introduciendo el espacio R^n y posteriormente generalizar a objetos (vectores) más abstractos de la teoría axiomática.

Marco teórico.

Los trabajos que se han desarrollado atendiendo a estas problemáticas (sobre todo franceses y canadienses) tienen en común algo que han llamado "flexibilidad cognitiva" que tiene que ver sobre los niveles de descripción, los puntos de vista y los modos de razonamiento. Todos estos inciden sobre la importancia de las cambiantes formas de conocimiento o de representación en el funcionamiento de los conceptos del Álgebra Lineal y analizar su función en los procesos de aprendizaje. Así, estos trabajos muestran la riqueza de contexto del Álgebra Lineal para el análisis didáctico así como también las dificultades que tienen los estudiantes (Dorier, 1998).

El trabajo de Harel, se basa explícitamente en una generalización gradual; se apoya sobre el marco de la geometría sintética para introducir los espacios analíticos R^1, R^2 y R^3 hasta R^n. La problemática sobre la posible confusión entre el objeto vector y su representación analítica casi no es abordada. En varios trabajos se ha mostrado que es necesario separar los objetos de sus diferentes representaciones; esto es uno de los problemas esenciales del aprendizaje del Álgebra Lineal (Hillel y Sierpinska 1995).

Los conceptos en Álgebra Lineal se integran en un campo general de las estructuras algebraicas, que en un primer curso de Álgebra Lineal podría no abordarse directamente la presentación axiomática de tales estructuras y atender la generalidad de las representaciones de un modo gradual y no el modo más elevado (es decir la estructura axiomática). Se puede así introducir el concepto de vector geométrico de dos y tres dimensiones y generalizar hasta n-adas o hasta matrices. En estos diferentes marcos con las herramientas y el lenguaje referente se pueden introducir los conceptos fundamentales de la teoría elemental de los espacios vectoriales.

En estudios realizados en varios países se ha encontrado que el centro de las dificultades de los estudiantes tiene que ver con problemas que tratan con la generalidad de los objetos y el carácter formal y abstracto de las nuevas nociones (muchas nuevas nociones que no tienen los estudiantes). "El formalismo agregado a esta teoría parece ser un origen de dificultad" (Dorier, 1998). Los estudiantes adoptan concepciones erróneas de ciertos conceptos y estos errores se hacen más visibles cuando intentan relacionarlos con los conocimientos anteriores. Gran parte de trabajos que se han revisado toman en cuenta la riqueza de las interacciones y de los posibles juegos entre los diferentes modos de razonamiento o de representación tanto en el funcionamiento del saber con los procesos de aprendizaje como también en las dificultades que este genera.

Para Hillel y Sierpinska, comprender el Álgebra Lineal exige que los estudiantes comiencen a pensar sobre los objetos y los operadores del álgebra, no en términos de relaciones entre las matrices, los vectores o los operadores particulares, sino más bien en términos de estructuras enteras de los objetos, tales que: los espacios vectoriales, las álgebras y las clases de operadores lineales, que pueden ser transformados, representados de diferentes maneras y considerados como no isomorfos. Asocian esta dificultad a la complejidad de las interacciones entre diversos tipos de lenguajes propios del Álgebra Lineal y distinguen: el lenguaje de la teoría general, denominado *lenguaje abstracto*; el lenguaje de la teoría más específica de R^n , denominado *lenguaje algebraico*; el lenguaje geométrico de los espacios en dos y tres dimensiones, denominado *lenguaje geométrico* (Hillel y Sierpinska, 1995).

Interpretando las conclusiones a las que llega Dorier encontramos que, a principios del siglo XX, los trabajos de álgebra esencialmente en Alemania, conducen a desarrollar la importancia de las estructuras algebraicas definidas axiomáticamente. En estos trabajos, la cuestión de la diversidad de los modos de representación y de pensar, aparece como pregunta central. La primera entrada se refiere al análisis del saber, más particularmente a la dimensión histórica. La naturaleza unificadora, generalizadora, simplificadora y formalizadora del Álgebra Lineal, conduce inevitablemente a la multiplicidad de los marcos, los registros, los puntos de vista o los modos de razonamiento, pero también a su unificación en la teoría formal. "El obstáculo del formalismo parece ser una dificultad relevante en los estudiantes que provoca un retroceso en sus diferentes modos de representación y de pensar" (Dorier, 1998).

> "El análisis histórico es entonces una fuente para reencontrar el sentido olvidado a los conceptos y comprender la evolución de ese concepto hasta llegar a su última formalización en la teoría axiomática. En cuanto a la enseñanza, las condiciones históricas de emerger un concepto, en los trabajos de Dorier-Robert-Robinet-Rogalsky, muestran que el análisis histórico permite comprender ciertas dificultades de los estudiantes, pero también a construir ingenierías locales con miras a introducir los conceptos de Álgebra Lineal, de manera que los estudiantes sientan la necesidad del formalismo, presentando todos los sentidos posibles de los conceptos en sus diferentes marcos o registros de representación, en particular conectarlo con sus conocimientos anteriores sobre los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría" (Dorier, 1998).

Un modo de razonamiento es como un tipo de lenguaje para expresar un conocimiento matemático y como todo lenguaje hace uso de un sistema específico de signos y representaciones, los modos de razonamiento se distinguen por el uso de tales representaciones. El modo sintético-geométrico se basa en el uso de las figuras geométricas, tales como líneas y planos, principalmente, así como la intersección entre ellos. En el modo analítico-aritmético, las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-adas" o números satisfaciendo ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo en forma de sistemas de ecuaciones o desigualdades. El pensamiento analítico-estructural va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de toda una estructura (Sierpinska, 2000).

En un plano más específico, los tres modos de razonamiento en Álgebra Lineal serán distinguidos correspondiendo a sus tres lenguajes de interacción: el lenguaje geométrico-visual, el lenguaje aritmético que tiene que ver con los vectores y matrices como listas y tablas de números y el lenguaje estructural que tiene que ver con los espacios vectoriales y las transformaciones lineales (Sierpinska, 2000).

Pensando en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal a nivel universitario, es considerado como una experiencia frustrante para un gran número de estudiantes, debido a que muchos de ellos se enfrentan por primera vez a una teoría matemática con estricto formalismo. Esta teoría se construye sistemáticamente basándose en conocimientos elevados y refiriéndose constantemente a conocimientos, definiciones o teoremas anteriores que los estudiantes no tienen claro.

En un primer nivel, las dificultades de los estudiantes con Álgebra Lineal provienen de su inexperiencia con pruebas y demostraciones basadas en teorías. Al respecto (Rogalsky, 1990) pregunta a 380 estudiantes en Francia, ¿dónde encuentran mayores dificultades en el tema?, y resulta que una de las cinco principales respuestas, es el tratamiento que los estudiantes enfrentan con las pruebas y demostraciones. Otro aspecto importante de la teoría matemática es la generalidad. Los estudiantes piensan acerca de los objetos y operaciones, en términos de relaciones, no en términos de toda una estructura.

Existen tres niveles de descripción o lenguajes: el lenguaje de la teoría general, un lenguaje más específico de la teoría y el lenguaje geométrico de R^2 y R^3. Estos tres lenguajes coexisten frecuentemente, pero ciertamente no son equivalentes. Una dificultad específica que los estudiantes tienen en el entendimiento de las nociones es representar un objeto matemático y moverse desde una representación a otra.

El lenguaje en Álgebra Lineal puede verse como un sistema o una red de lenguajes y reglas de traslación entre ellos. El lenguaje es parte del mundo como muchas otras cosas. Una persona pronto debe aprender que existen otros lenguajes y que todo lenguaje es gobernado por una gramática la cual puede ser muy diferente. El lenguaje es un instrumento, que ofreciendo signos su función significativa es conocer. Los signos son algo más en las cosas que esperan ser reconocidos o descubiertos.

Álgebra Lineal es realmente el mundo del uso simultáneo de sistemas de representación. ¿Cómo estar seguro que dos representaciones distintas en verdad representan la misma cosa o asemejan el mismo objeto? Una de las representaciones es elegida, las demás necesitan ser reportadas para ser elegidas y probadas como equivalentes. La elección es un asunto de tradición o familiaridad. Si la vieja concepción no es remplazada por una nueva forma de pensamiento acerca del lenguaje en Álgebra Lineal, uno puede estar cerrado a observar cómo en una representación los estudiantes se cuidan de no caer en una trampa de "semejanza" y se mantienen cometiendo siempre el mismo error (Hillel y Sierpinska, 1995).

Metodología

En la primera fase se desea trabajar con estudiantes que ya han recibido al menos un curso de Álgebra Lineal, donde hayan abordado los espacios vectoriales y su teoría axiomática, dado que se hará un cuestionario individual con un grupo de 15 estudiantes como máximo, para explorar como permanece en su mente la noción de espacio vectorial después de haber recibido el curso. El cuestionario está en proceso de construcción.

Después de analizar las concepciones de los estudiantes y hacer un análisis histórico sobre la evolución de este concepto en los libros de texto, planeamos diseñar una secuencia de actividades que permitan involucrar al estudiante en el problema, favoreciendo el debate entre sus compañeros y que al final sea posible que el estudiante haga suyo el concepto de espacio vectorial al resolver la secuencia de actividades.

Al tener este diseño bien estructurado y revisado será puesto en escena con estudiantes que estén iniciando un curso de Álgebra Lineal, pero que aún no hayan estudiando el concepto de espacio vectorial. Se intentará construirlo sin hacer presente la teoría axiomática y formal, sino más bien hacer generalizaciones a través de los espacios geométricos R^2 y R^3. En esta fase se piensa trabajar con equipos de tres estudiantes (entre tres y cinco equipos). Si se considera adecuado y el diseño lo permite, se podrá incorporar el uso de calculadoras graficadoras o algún software computacional.

Conclusiones

Respecto a resultados de investigación aún no se puede ofrecer mucho. Las ideas se tienen y se hace necesario repensarlas, madurarlas y empezar a realizarlas. Sin embargo, se considera que esto puede conducir a un diseño interesante y creativo que permita alcanzar las metas que ahora se proponen.

Referencias bibliográficas

Dorier, J. L. (1991). Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algebre linéaire á l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 11(2/3), 325-364.

Dorier, J. L. (1993). L'Émergence du concept de rang dans l'etude des systémes d'équations linéaires, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* (2a serie) 3, 159-190.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Matemática* 22(4).

Dorier, J. L. (1997a). *L'enseignement de l'algébre linéaire en question*. Grenoble: la Pensée Sauvage, 331 p.

Dorier, J. L. (1998). État de l´art de la recherche en didactique á propos de l´enseignement de l´algébre linéaire. *Recherches en didactique des mathématiques*. 18(2), 191-229.

Robert, A. y Robinet, J. (1989*). Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algébre linéaire en premiére anné de DEUG*. Cahier de Didactique des Mathématiques, No. 53, Paris: IREM de París VII.

Rogalsky, M. (1990). Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algébre linéaire? In Comisión Inter.-IREM université (ed), *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Premiére Année*, 279-291, Lyon: IREM.

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. Research on the teaching and learning of linear algebra conducted at the Concordia University by A. Sierpinska and J. Hillel. Montréal Canadá.