

# ANÁLISIS DE FENÓMENOS DIDÁCTICOS VINCULADOS AL ESTUDIO DEL ÁLGEBRA: ASPECTOS DE UNA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Enrique González Lasseube y Lorena Espinoza Salfate  
Universidad Católica de Valparaíso- Chile  
[ivangonzalez@entelchile.net](mailto:ivangonzalez@entelchile.net) [l\\_espinoza@hotmail.com](mailto:l_espinoza@hotmail.com)

## RESUMEN:

A partir del análisis didáctico de distintas organizaciones matemáticas puntuales de la enseñanza media chilena que pertenecen al ámbito algebraico, se pudo postular la presencia de ciertas regularidades didácticas de aparente generalidad.

En la presente comunicación se mostrará la metodología utilizada para realizar la constatación empírica sobre la presencia o no de dichas regularidades, la que se encuentra basada en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En particular, se describirá el proceso de elaboración y posterior análisis del instrumento utilizado para tal propósito.

El análisis de los resultados concluye con la aplicación de un programa informático de análisis implicativo (CHIC). De esta forma, además de corroborar la mayoría de las hipótesis planteadas, este análisis permitió detectar ciertos aspectos del trabajo matemático de los estudiantes que en una primera versión del análisis no parecieron evidentes.

El artículo muestra algunos resultados obtenidos dentro de un trabajo de tesis de magíster de la Universidad Católica de Valparaíso, y que estamos realizando en el marco de los proyectos DY CIT N° 26-9933ES y FONDECYT N° 1020342 de Chile

## FUNDAMENTACIÓN

### Problemática y propósitos

Situados en el enfoque antropológico podemos formular nuestro propósito general de investigación en los siguientes términos:

Lo que nos interesa es describir y analizar la actividad matemática que se desarrolla en la educación media chilena en torno al álgebra. Esta descripción y análisis supone estudiar los tipos de tareas y técnicas que se proponen en el currículum oficial y que permiten concluir y gestionar el proceso de estudio de las organizaciones matemáticas relativas al estudio del álgebra. Este propósito sugiere detectar la adaptación estructural sufrida por este conocimiento matemático en el currículum para su posterior reconstrucción en el libro de texto, y que concluirá, finalmente, en la sala de clases cuando se enseñe.

Consideramos que los libros de texto son un buen reflejo de la postura institucional acerca de lo que se debe saber hacer. Este análisis nos debe permitir, además, detectar algunos fenómenos didácticos asociados al proceso de transposición didáctica sufrida por esta organización matemática, proponer algunas explicaciones y, prever posibles consecuencias que puedan eventualmente ocurrir en la sala de clases cuando se realice concretamente su estudio.

### Objetivos

- ❑ Analizar la actividad oficial relativa al estudio del álgebra en los planes y programas de estudio
- ❑ Analizar la actividad oficial relativa al estudio del álgebra presente en los libros de texto.

- Identificar fenómenos ó regularidades didácticas vinculadas a esta actividad matemática
- De acuerdo a la descripción realizada, elaborar conjeturas acerca de la actividad matemática en torno al álgebra que estarían en condiciones de realizar los alumnos y contrastarlas empíricamente.

## **Metodología**

La secuencia de pasos que se seguirá para el logro de nuestro propósito de investigación y los mecanismos usados para el desarrollo de cada uno de ellos son los siguientes:

### *1. Análisis de la actividad matemática oficial*

#### *a) Análisis de los programas de estudio*

Para realizar la descripción de la organización matemática en torno al álgebra se analiza, en primer lugar, los planes y programas oficiales que la proponen. Ya que al momento de la investigación se encontraban en vigencia dos planes y programas de estudio para diferentes niveles escolares de educación media, se realizó un análisis tendiente a señalar las características generales con relación a la presencia del álgebra en cada uno de ellos.

#### *b) Análisis de los libros de texto*

Se analiza la presencia de álgebra presente en los libros de texto, y para ello se elige el texto de la Editorial Santillana por ser uno de los más usados en la educación media chilena. En el análisis previo también fue pertinente el análisis de textos pertenecientes a otras editoriales, que presentaran los objetivos de los antiguos y nuevos planes de estudio (en el momento de nuestra investigación, sólo se encontraban en vigencia los nuevos planes y programas correspondientes a 1° medio)

### *2. Análisis de fenómenos didácticos vinculados*

De la descripción de la actividad matemática realizada en torno al álgebra, se caracteriza una serie de fenómenos didácticos que permiten organizar metodológicamente la actividad matemática en torno al álgebra. Para afinar esta descripción se hace necesario identificar diversos indicadores que dieran cuenta en forma más precisa de estos fenómenos.

### *3. Elaboración de hipótesis a contrastar empíricamente: Elaboración de cuestionario.*

Una vez realizada la identificación y descripción de los fenómenos didácticos, se elaboran una serie de conjeturas acerca de la actividad matemática que estarían en condiciones de realizar los alumnos. Para poder evidenciar “en acto” estas conjeturas, se elaboran una serie de hipótesis empíricamente contrastables que se materializan en un cuestionario para ser aplicado a alumnos de cuarto año de enseñanza media.

Una vez detectadas las regularidades ó fenómenos didácticos que emergen del análisis de los libros de texto debido a la reconstrucción de la organización matemática relativa al estudio del álgebra, y teniendo en cuenta lo que deseamos medir en cada ítem del cuestionario, se identifica cual ó cuales fenómenos están asociados a ese ítem, con lo cuál se puede postular lo que creemos que contestarán los alumnos frente a él, surgiendo así la hipótesis asociada a ese análisis y, que será contrastada empíricamente.

#### 4. Aplicación de cuestionario

Para contrastar la hipótesis, se elabora un cuestionario que pone de manifiesto algunos de los fenómenos y/o indicadores detectados en el estudio del álgebra. Este cuestionario se aplica a alumnos de cuarto año medio de tres colegios diferentes.

Para elaborar el cuestionario se sigue los siguientes pasos:

Un análisis a-priori que contempla la formulación de los objetivos del cuestionario en función de las hipótesis previamente construidas. Para cada objetivo se construyen los ítems necesarios para poder medir la presencia o ausencia de algún fenómeno didáctico o regularidad involucrada. Luego, se realiza un listado de las posibles respuestas y, de esta manera, se constituyen tipologías de respuesta, teniendo en cuenta los modelos del álgebra previamente descritos.

#### 5. Análisis de las respuestas del cuestionario: Análisis a posteriori

En esta etapa se analizan las tipologías obtenidas utilizando un análisis de frecuencia determinando aquellas que son correctas, incorrectas u omitidas, para cada ítem confeccionado. Esta descripción es menos cuantitativa o estadística y más cualitativa. Consideramos correcta nuestra hipótesis cuando la mayoría (superior a un 75 %) de los estudiantes realizan lo anunciado en ella. Posteriormente, se realiza una síntesis de los principales resultados obtenidos y se emiten las principales conclusiones obtenidas de él. Además, se realiza un análisis de efectos cruzados que permite relacionar tipos de respuestas de diversos ítems que nos permitan ampliar nuestro margen de investigación para hacerlo más rico en posibilidades. Interesa detectar cuáles son las técnicas más usadas por los alumnos y cuáles no, y bajo que circunstancias.

### RESUMEN DE FENÓMENOS DIDÁCTICOS DETECTADOS VINCULADOS AL ESTUDIO DEL ÁLGEBRA

#### Fenómeno 1: La utilización formal del Álgebra.

En el estudio del álgebra se privilegia la "forma" en oposición al contenido o significado de los conceptos, los símbolos y su escritura, la presentación de los conceptos, etc.

#### Indicadores:

1. *El trabajo de La modelización algebraica tiene un marcado carácter formal, y por ello, resulta ser artificial. entendiéndose por modelización, a la construcción de un modelo matemático útil para estudiar una situación problemática.*

#### Especificaciones:

- a) Los problemas cotidianos que se estudian requieren, casi en exclusiva de una traducción literal al lenguaje algebraico. Es decir, el modelo viene dado de manera casi explícita en el enunciado.
- b) Los problemas que se estudian dentro de cada tema son generalmente de la misma especie (del tipo). De esta forma, se presentan problemas y ejercicios de una complejidad que es siempre la misma, sin la posibilidad de estudiar el dominio de validez de las técnicas, su pertinencia y la relación entre ellas.

- c) Los problemas que se proponen, generalmente no requieren de la modelización algebraica para ser resueltos, es decir, el álgebra no es presentada como un instrumento que supera problemas matemáticos que no son objeto de estudio por la vía aritmética. Así, resultan artificiales para la aplicación de las técnicas algebraicas y la modelización. Los problemas que en teoría muestran la utilización del álgebra, son abordados de hecho, sin ella.
2. *Se antepone y se privilegia el estudio sintáctico al semántico. Esto es, importa más la estructura correcta, que el correcto entendimiento de la actividad matemática en desarrollo. Lo problemático suele ser la forma y no tanto el contenido.*
  3. *El estudio del álgebra no emerge como la consecuencia de enfrentarse a situaciones reales matemáticas o extra-matemáticas que requieran para su estudio de dicha herramienta. El álgebra aparece más como un objeto que como un instrumento.*

### **Fenómeno 2: Desarticulación local de la actividad Matemática en torno al Álgebra.**

No se realiza una sistemática relación y encadenación de conceptos y técnicas en el estudio de problemas.

#### Indicadores:

1. *Generalmente no se retoman problemas estudiados en cursos anteriores, que con nuevos instrumentos podrían ser estudiados con mayor eficacia.*
2. *No se retoman técnicas ni tecnologías estudiadas con anterioridad explícitamente, salvo excepciones como lo son el teorema de Pitágoras. No se explicita que parte del estudio es realizado con técnicas antiguas conocidas.*
3. *Todas las ecuaciones que se estudian siempre "tienen solución". Aparece aquí una oposición entre tecnología y teoría, ya que la teoría enuncia los problemas de existencia posibles, pero los problemas, las técnicas y sus tecnologías nunca tratan de este tipo de situación.*
4. *No se hace mención explícita a las relaciones que se pueden establecer entre conceptos.*
5. *Existen definiciones, esto es, tecnologías y teorías que no tiene ninguna utilidad dentro de la actividad matemática que se realiza a lo largo de la enseñanza media.*
6. *Existen tecnologías que, con instrumentos apropiados, aquello que no pudo ser justificado, puede ser efectivamente explicado y argumentado. No se muestra ni se demuestra.*
7. *Atomización de las tareas. Existe una marcada tendencia a subdividir minuciosamente las tareas, y por consecuencia de ello las técnicas implicadas.*

### **Fenómeno 3: El estudio del álgebra tiene un carácter marcadamente algorítmico.**

Se privilegia el trabajo técnico en desmedro del trabajo justificador (integrador). Es decir, no se menciona claramente el tipo de cuestiones que serán resueltas con el trabajo técnico ni el por qué se debe hacer así.

#### Indicadores:

1. *La manipulación de objetos algebraicos se realiza sin considerar los dominios de validez de ellos. Al parecer, lo que verdaderamente importa es la manipulación de ellos.*

2. *No se considera la validez de los resultados en la solución de ecuaciones y/o inecuaciones. Es decir, después de trabajar sobre el modelo que modela la situación problema; no se vuelve a dicha situación para verificar si las soluciones del modelo son también soluciones del sistema.*
3. *Existen algunos objetos que son manipulados como si fueran dominados por los alumnos y, sin embargo no han sido estudiados con anterioridad. Se dan por conocidos objetos matemáticos no conocidos y sustanciales para la actividad matemática en desarrollo.*
4. *No aparece de forma clara la problematicidad de la situación matemática en estudio. Lo problemático se sitúa generalmente a nivel técnico.*

#### **Fenómeno 4: El estudio del álgebra no se realiza en profundidad.**

Generalmente no se presenta un análisis acerca de la verdadera potencia de las técnicas, su pertinencia y su necesidad de ampliación.

##### Indicadores:

1. *Los criterios para decidir cuál técnica es más apropiada para realizar un determinado estudio, aparecen ocultos en el discurso del texto, o simplemente no están en él.*
2. *El estudio de determinados objetos matemáticos es parcial y con ciertos vacíos tecnológicos.*
3. *Las técnicas de estudio son impuestas por el texto; no surgen de un trabajo que se cuestione la adecuación de las mismas para las situaciones en estudio.*
4. *Quizá el criterio más evidente para escoger las técnicas pertinentes para el estudio es la distinción del determinado contenido o nivel escolar específico, o bien, el tema tratado.*
5. *Las técnicas o problemas aparecen difusas o poco transparentes, en términos de señalar claramente lo que se pretende resolver y cómo.*
6. *El estudio del álgebra no incorpora el punto de vista funcional para abordar los problemas. El tema de función y casos específicos, aparecen como un tema aislado, en el que la función es considerada un objeto en sí mismo y no una herramienta que sirva para modelar situaciones*
7. *Existen tecnologías importantes para la actividad matemática en estudio que se encuentran ausentes.*

#### **Fenómeno 5: Desarticulación regional del estudio del álgebra con las demás organizaciones matemáticas del currículum**

##### Indicadores:

1. *En problemas geométricos no se hace mención al uso del instrumento algebraico como ayuda para su estudio.*
2. *En el estudio del álgebra no se retoman problemas aritméticos.*

#### **Conclusiones generales y principales resultados**

1. La caracterización de las organizaciones matemáticas locales en torno al álgebra en cada uno de los cuatro niveles de enseñanza media, nos ha permitido identificar y describir los ingredientes prácticos y teóricos que las constituyen. Más allá de las diferencias específicas

que poseen cada una de estas organizaciones matemáticas, existen ciertas características comunes a todas ellas que tienen relación con la naturaleza didáctica relativa a la estructura y articulación de los ingredientes matemáticos que las componen. Estos invariantes constituyen el primer síntoma de los fenómenos didácticos que nuestro trabajo pudo detectar. Algunos de estos son:

- Uniformidad de tipos de tareas.
- Diversidad de técnicas para estudiar problemas equivalentes y que no se relacionan.
- Imposición de técnicas de estudio
- Tecnologías y teorías oportunistas y precarias.

2. A partir de esta caracterización, hemos podido identificar distintos fenómenos didácticos:

- El carácter formal del trabajo algebraico. Existe una tendencia a estudiar la “forma” (sintaxis) de los contenidos y no tanto sus “significados” (semántica), en particular sus aplicaciones.
- Escasa problematicidad. La mayoría de los problemas que se proponen modelar mediante el álgebra son resolubles sin ella. La mayoría de los problemas que se estudian tienen el propósito de aprender a manipular los objetos algebraicos y no tanto utilizar el álgebra como instrumento de modelación.
- Actividad matemática atomizada. Existe una tendencia a parcelar de manera insistente los problemas, dividiéndolos en subtareas que después no se relacionan. Ligado a ello, la utilización de las técnicas es generalmente rígida y parcial, sin permitir la posible articulación entre ellas.
- Vacíos tecnológicos y teóricos. Existen tecnologías artificiosas que simplemente se aplican sin justificación, que provienen de teorías precarias o poco claras. Frente a las técnicas que se usan para resolver los problemas en estudio, no es frecuente encontrar discursos que justifiquen matemáticamente los gestos que se realizan. Existe aquí, a nuestro parecer, un cierto “oportunismo” tecnológico-teórico, que no nos permite entender la estrategia de reconstrucción realizada en los textos. ¿Por qué en algunos casos hay justificación, incluso más compleja que lo que los alumnos en estos niveles pueden manejar, y en otros casos simplemente se omite?
- Una escasa adecuación de la teoría a las técnicas matemáticas que se estudian. Es frecuente encontrar discursos teóricos y tecnológicos que no se corresponden con el universo matemático disponible para los alumnos de estos niveles. Por tanto, estos discursos aparecen pero son inertes.
- El álgebra como aritmética generalizada, en que lo que prima es el cálculo del valor de la incógnita que satisface una determinada igualdad y no el estudio de variables que modelan la relación entre ellas.

3. Con la contrastación empírica de los fenómenos didácticos detectados a través de un “cuestionario”, pudimos realizar una primera corroboración de la presencia de los mismos en el sistema escolar.

4. La aplicación y análisis de los resultados del cuestionario nos permitió, además, verificar que nuestras descripciones de los ingredientes que componen las organizaciones matemáticas locales en torno al álgebra son efectivas y funcionales.

5. Finalmente, el cuestionario nos permitió además detectar las siguientes regularidades:

- Los alumnos realizan relativamente bien las tareas que pueden identificar como las del “tipo” de tareas estudiadas, donde los criterios para dicha identificación son, casi en exclusiva, la forma, la escritura y el contexto, y no tanto el conocimiento matemático que ponen en juego. En particular, son bastante exitosos en la manipulación técnica que corresponda textualmente a las estudiadas en el texto.
- A pesar que los alumnos estudian problemas de modelización algebraica, frente a situaciones problemas un poco distintas, no son capaces de encontrar un modelo que permita resolverlas. Esta situación permite postular que la actividad de modelización estudiada en la enseñanza media es bastante pobre y superficial, además e la rigidez en el caso de las técnicas.
- Cuando el modelo que permite resolver una situación problema específica viene dado, los alumnos dan por terminado el trabajo cuando encuentran una solución del modelo sin cuestionar si dicho resultado es una solución para la situación problema en estudio.
- Los alumnos resuelven los problemas utilizando, en general, un único registro de representación: el algebraico. El registro gráfico, por ejemplo, no es utilizado de que podría haber sido muy provechoso para obtener la solución o el modelo de la situación

6. Un importante logro de nuestra tesis también ha sido poner a prueba la teoría antropológica de lo didáctico y mostrar su productividad para el estudio de procesos didácticos

#### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

- Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (1998b) *El Proceso de algebrización de las matemáticas escolares*. Jornadas SIIDM BAEZA 98, Universidad de Jaen, Baeza, febrero-marzo de 1998.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997) *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona. ICE-Horsori.
- Espinoza, S, Lorena, (1998) *Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto “Límite de funciones”*. *Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos de estudio*. Universidad autónoma de Barcelona.
- Kieran, C, (1992) *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. Traducción de Vilma María Mesa. “Una empresa docente”. 1994.