

# EL PROCESO DE MODELIZACIÓN EN EL AULA: BUSCANDO UN MODELO GEOMÉTRICO PARA EL CORAZÓN

Liliana Homilka - María del Carmen Pérez  
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"  
Buenos Aires (Argentina)  
[lhomilka@fibertel.com.ar](mailto:lhomilka@fibertel.com.ar) [maria\\_del\\_carmen\\_perez@hotmail.com](mailto:maria_del_carmen_perez@hotmail.com)

## RESUMEN

Este trabajo se propone compartir y discutir el resultado de una investigación en la que se utilizó la modelización del cálculo del volumen del ventrículo izquierdo del corazón como instrumento en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para enriquecer y mejorar nuestra práctica cotidiana, realizada con alumnos que cursan el nivel medio. El modelo proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor la naturaleza y severidad de las afecciones cardíacas y mostrar con una visión simplificada aspectos de diagnóstico médico. (Pichel y otros, 1988). Otorgar significatividad a conceptos como área y volumen.

El proceso de modelización llevado a cabo en el aula siguió la secuencia planteada por Sallett Biembengut y Hein (1999). Esto dio origen a la búsqueda de información; a partir del análisis de la misma y de la elección de una figura se elaboraron actividades con el objeto de modelizarlo a través de alguna cuadrada.

Esta experiencia se constituyó en un medio eficaz para la motivación ya que los alumnos optaron por un desarrollo activo, demostrando gran interés al realizar las actividades dado que trabajaron con situaciones reales, buscando respuestas en la matemática a problemas concretos de otras ciencias.

*Hace unos quince años se acercó a mí un destacado cardiólogo argentino, el Dr. Hugo Castagnino, para invitarme a formar parte de su proyecto de investigación sobre aneurismas ventriculares, una afección cardíaca muy seria que surge como complicación del infarto de miocardio o del mal de Chagas. Inmediatamente supuse que era un error, y que buscaban un especialista en Bioestadística. La respuesta fue clara: “No, buscamos un geómetra. Lo buscamos a usted.” No había error. La afección mencionada produce una deformación extraña de los miocitos, que son las células musculares que forman la pared del corazón. Necesitaban alguien capaz de describir y explicar ese proceso de deformación y deterioro esencialmente geométrico de una de las más perfectas estructuras biológicas de nuestro cuerpo. Los siguientes cinco años contuvieron la experiencia más apasionante de mi vida como matemático. Por primera vez desarrollé modelos matemáticos que explicaban estos procesos biológicos. Por primera vez estuve ante la pantalla de un microscopio electrónico, observando como la inspección del corte de un corazón infartado de rata nos confirmaba la validez de esos modelos. Por primera vez sentí la importancia y utilidad de mi formación matemática. Esta línea de investigación continúa, aunque ahora ya no necesitan de mi colaboración.*

**Fausto A. Toranzos (Relme 15)**

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo se propone compartir y discutir el resultado de una investigación en la que se utilizó la modelización como instrumento en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para enriquecer y mejorar nuestra práctica cotidiana. La experiencia fue realizada con alumnos que cursan el nivel medio y, dado lo abarcativo de la misma, ésta se desarrolló durante un cuatrimestre. En ella se propuso la modelización del cálculo del volumen del ventrículo izquierdo del corazón. El modelo proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor la naturaleza y severidad de las afecciones cardíacas y mostrar con una visión simplificada aspectos de diagnóstico médico. (Pichel y otros).

Esto permitió diagnosticar en los alumnos el nivel de adquisición de habilidades lógicas, determinar las falencias básicas de la enseñanza-aprendizaje en los ciclos anteriores y, dado que los aprendizajes previos deben ser tenidos en cuenta para construir los nuevos, superar los obstáculos y permitir la transferencia de los mismos a situaciones reales.

Otorgar significatividad a conceptos como área y volumen permite a los estudiantes avanzar en el proceso cognitivo y desarrollar capacidades de intuición, deducción y validación y de esta manera, progresar en la comprensión de los conceptos geométricos pasando por los distintos niveles de razonamiento propuestos por Van Hiele. (*Van Hiele, 1998*)

## **LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE**

En la ciencia, la noción de modelo es fundamental para la construcción y expresión del conocimiento. La matemática permite elaborar modelos que posibilitan una mejor comprensión, simulación y previsión del fenómeno que se estudia, en este caso la determinación de la naturaleza y severidad de las afecciones cardíacas.

En la modelización se requiere del conocimiento de conceptos matemáticos, de la realización de investigaciones sobre el tema -ya sea directamente a partir de datos experimentales o indirectamente a través de libros, enciclopedias, revistas, internet, etc.-, de la clasificación de la información, de la formulación de hipótesis, de la generalización, de la selección de las variables relevantes, de la selección de los símbolos apropiados para esas variables y de la descripción de sus relaciones en términos matemáticos, además de la utilización de la computadora como recurso didáctico. Una vez construido el modelo matemático, éste debe ser interpretado y convalidado.

Considerando que el aprendizaje es un proceso de crecimiento y que la educación matemática debe proveer de los elementos necesarios para que el educando desarrolle sus potencialidades y su capacidad para pensar crítica e independientemente, que el aula es el ambiente indicado para estudiar problemas del mundo real a través de la modelización matemática, este trabajo (Ausubel, 1972) parte de una situación problemática cuyo objeto es otorgar significatividad al concepto de volumen que, según Piaget causa dificultad por que crea confusión entre cantidad de materia, que es algo concreto y el volumen físico (espacio ocupado) que es algo abstracto.

En la modelización se aplicó la secuencia propuesta por Sallett Biembengut y Hein (*Biembengut y Hein, 1998*):

### a) Justificación del proceso:

Se comienza presentando una situación problemática extraída de la vida real que tiene repercusión directa en el accionar diario de las personas, mostrando que para su análisis y solución se requiere de la matemática, valorando así el carácter que la misma tiene como herramienta de apoyo a otras ciencias, en este caso la medicina.

Preocupa la poca motivación que manifiestan los alumnos en lo que se refiere al aprendizaje de las matemáticas, hoy acentuada por la crisis social en que vivimos, esto llevó a tratar de responder en forma explícita e implícita preguntas relacionadas con el

por qué, para qué y el cómo enseñar, aprender, trasvasar, evaluar, etc. conocimientos matemáticos.

b) Elección del tema:

Para dar respuesta a una discusión surgida en el aula sobre "*para qué sirve aprender matemática*" se propuso como actividad (que posteriormente generó otras): **¿Cómo calcularía el volumen del corazón?**

Esto motivó, en principio, una búsqueda bibliográfica en la que puso en juego, entre otras situaciones, comprensión e interpretación de textos de temas referentes a medicina. Del análisis de varios de ellos surge la elección de una figura que representa al corazón. y de que existen diferentes métodos que analizan el comportamiento regional del ventrículo izquierdo. A partir de la misma se elaboraron actividades con el objeto de modelizarlo a través de alguna cuádrlica.

c) Desarrollo del contenido programático:

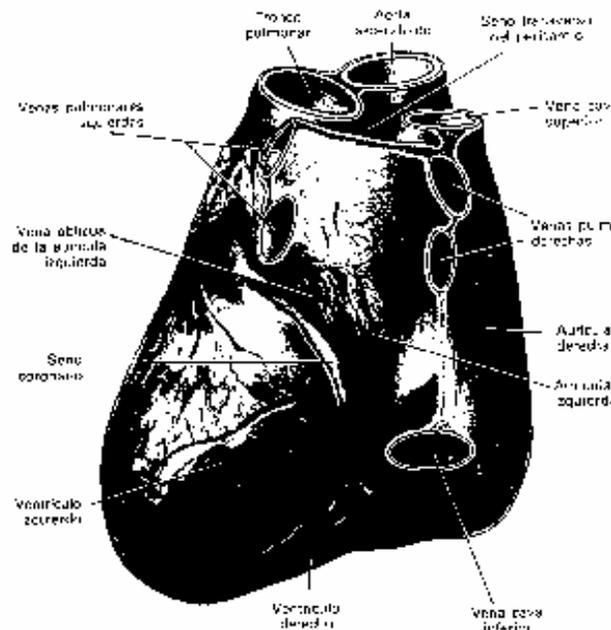


Fig. 6-17. Base y cara diafragmática del corazón. El antiríndico se mantiene en azul y se aproxima su sección alrededor de los vasos.

El corazón es una bomba pulsátil que trabaja en forma discontinua La caracterización funcional, que permite comparar lo normal de lo anormal, se realiza a través de diferentes métodos, entre ellos los referidos a:

- 1) La determinación de volúmenes ventriculares.
- 2) Los que analizan el comportamiento regional del ventrículo izquierdo.

Con respecto al primer método las respuestas obtenidas fueron:

- No sé
- *Calculo el volumen de una figura plana*
- *Por desplazamiento de líquido en un recipiente*
- *Lo asocio a un cuerpo conocido*

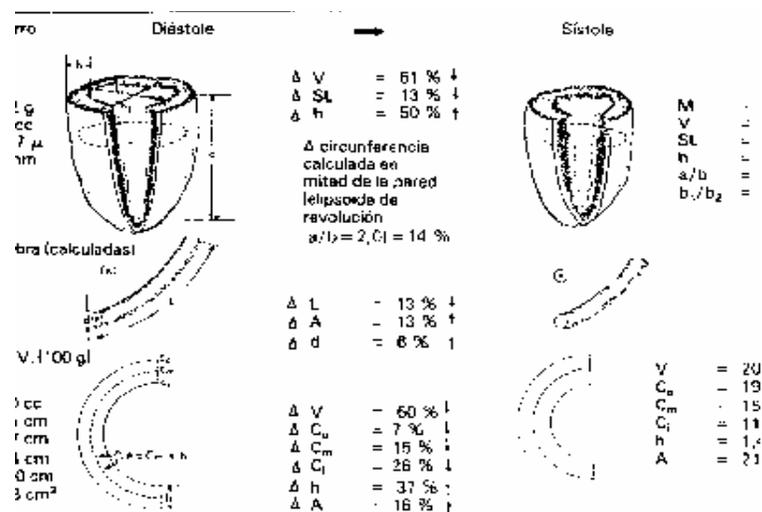
Luego de analizar las mismas se continuó con la presentación de algunos cuerpos ideales. (esfera, elipsoide, cono, cilindro, paraboloide, hiperboloide) y preguntándoles: **¿A cuál se asemeja? ¿Por qué?**

Se compararon las respuestas obtenidas desde la matemática con las que dio la medicina.

*Jonsell demostró que el volumen cardíaco total calculado considerando al elipsoide de revolución como referencia geométrica, guardaba buena correlación con el volumen total medido en forma directa. En la actualidad utilizan este cuerpo como referencia. La fórmula es  $V=4/3\pi .a.b.c$ , donde  $a$  es la longitud del semieje mayor y  $b, c$  las longitudes de los semiejes menores. (Jonsell, 1969)*

d) Fijación de conceptos:

En la sístole las paredes de las arterias se dilatan y en la diástole retornan elásticamente a su estado normal, impulsando a la sangre como un flujo continuo. Estudios experimentales en animales han demostrado que la relación entre el volumen normal y el anormal permite determinar distintos grados de patologías. Por eso, se analiza el siguiente estudio experimental del ventrículo izquierdo de un perro que se representa en sístole y diástole.



En esta etapa, se propuso a los alumnos:

*Sobre la base de los datos de la figura determinar el volumen del ventrículo izquierdo en sístole y en diástole, graficarlos y compararlos.*

e) Evaluación y convalidación de los resultados:

La propuesta para los alumnos al llegar a este punto de la investigación fue:

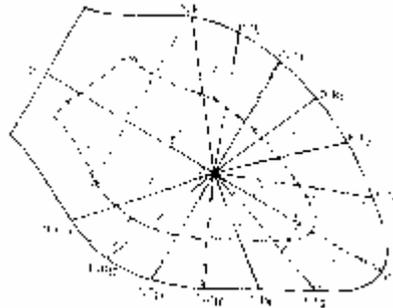
***Analizar si el volumen calculado se corresponde con datos reales obtenidos en investigaciones médicas.***

En relación con el análisis del comportamiento regional del ventrículo izquierdo este derivó en el conocimiento de que existen diferentes métodos que analizan su comportamiento regional.

Entre ellos se analizó el de Scampadornis por considerarlo el que más se adecua a los objetivos propuestos (Pichel, Patrìtti, de la Fuente, 1988). Parte de imágenes del ventrículo

izquierdo en final de sístole y en final de diástole obtenidas en forma directa si se trabaja sobre placas radiográficas, e indirectamente si es a través de imágenes proyectadas por el cineangiograma. En él es fundamental, para adjudicar a cada sector lo que le corresponde, la correcta superposición de las siluetas de final de sístole y de final de diástole. Esto motivo el análisis de la necesidad de pasar del espacio al plano, y de comparar las respuestas posibles desde la matemática y desde la medicina.

El desarrollo del método permitió aplicar en un contexto diferente el concepto de movimientos en el plano y de sus propiedades para obtener la división del ventrículo izquierdo en cuatro áreas. El trazado de bisectrices y mediatrices nos llevó a comparar triángulos, clasificarlos según sus lados y sus ángulos y determinar en cada caso sus puntos notables llegando así a la división del mismo en trece áreas morfológicas.



En la comparación entre áreas morfológicas normales y anormales se trabajó el concepto de proporcionalidad, desde el abordaje del estudio de las escalas de representación. La normalización del ventrículo izquierdo por medio de proyecciones y de la aplicación de propiedades de la circunferencia permitió visualizar de manera diferentes zonas alteradas.

Con el cálculo del índice de asineria el alumno puso en juego conceptos de probabilidad, valor absoluto e incuaciones.

A continuación se presentan algunas de las actividades que formaron parte de la secuencia didáctica para ilustrar el proceso de modelización en el aula.

*1. Identificados los ejes longitudinales de final de diástole y de sístole, debe corregirse el movimiento de rotación.*

*Superpóngalos de acuerdo a las siguientes instrucciones:*

*a) Alineando los ejes longitudinales máximos coincidiendo los puntos medios de ambos ejes.*

*b) Alineando los ejes longitudinales máximos a partir de la superposición del punto medio de la válvula aórtica de los dos contornos.*

*c) Gire  $5^\circ$  en sentido horario la silueta que representa el final de diástole, considerando como centro de giro el punto determinado por la intersección de dichos ejes a nivel del plano valvular aórtico*

*2. Realizada la alineación de las siluetas, y teniendo en cuenta la variación de la longitud de un radio, rote el eje  $90^\circ$  con centro O. Trace las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice.*

*¿Cuánto miden los ángulos que quedaron determinados? ¿Por qué?*

3. *¿Cómo establecería que la medida de un radio de una zona morfológica determinada se corresponde con los valores normales*

4. a) *Trace la mediatriz segmento OL y OR. ¿Qué queda determinado?*

b) *¿Existe algún punto de intersección de la mediatriz con algunos de los radios? ¿Por qué?*

5. *Las propiedades de los materiales elásticos que has visto en física, se pueden aplicar a una fibra muscular, por lo tanto podemos decir que un músculo más delgado tiene mejor "calidad contráctil" que uno más grueso porque a menor sección desarrolla la misma fuerza.*

*El comportamiento de los músculos se ven afectados por las tensiones y por los estiramientos. Por lo tanto, se aplica a las propiedades diatólicas del ventrículo.*

*La función  $y = 0,43 e^{kv}$  vincula la presión de diástole (y) con el volumen de diástole (v)*

a) *Caracterice la función.*

b) *K es un número que indica el módulo de rigidez, ¿cómo puede conocer el valor que le corresponde a una persona cuyo volumen es de  $75 \text{ cm}^3$  y que tiene una presión de 10 mmHg?*

c) *A la función derivada de y con respecto a v se la llama rigidez, obtenga su ecuación.*

d) *Teniendo en cuenta la expresión hallada en el ítem anterior, indique si la proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta*

*"La rigidez del ventrículo es función lineal de la presión".*

e) *Lo recíproco a rigidez se llama distensibilidad. Halle la fórmula que le permita calcular la distensibilidad si se conoce la presión.*

f) *Caracterice la función distensibilidad..*

Las dificultades que surgieron en cuanto a la comprensión de temas que corresponden a otras ciencias fueron abordados por los profesores de biología, física, química y lengua. De esta manera, la investigación llevada a cabo se constituyó en un proyecto interdisciplinario.

## **CONCLUSIONES**

Esta secuencia de actividades permite trabajar desde la modelización un problema significativo con el objeto de construir y aplicar conceptos matemáticos curriculares en forma no tradicional, constituyéndose en un medio eficaz para la motivación ya que los alumnos optaron por un desarrollo activo.

Además permitió analizar la diferencia entre responder a una situación determinada desde la matemática y desde otra ciencia, reforzando el sentido crítico y realista y valorando la herramienta matemática como apoyo en este caso a la medicina.

Por otra parte, se destaca que la situación planteada, dado la amplitud de los conocimientos matemáticos relacionados el tema propuesto, fue posible abordar durante la experiencia múltiples conceptos matemáticos desarrollados en la escuela media, permitiendo al alumno comprender la interrelación existente entre contenidos de los que por lo general posee una visión y tratamiento aislado. El abordaje de la situación problemática presentada, al transformarse en un proyecto interdisciplinario, en el cual los docentes de las distintas áreas

colaboraron en la búsqueda del modelo, dio a los alumnos la posibilidad de comprobar cómo especialistas de formaciones diversas aúnan sus esfuerzos en la investigación para hallar soluciones a situaciones problemáticas reales.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Ausubel, D. (1972). *Psicología Evolutiva: un punto de vista cognitivo*. México: Trillas.

Alsina, C. y otros (1996). *Enseñar matemática*. Barcelona, España: Grao.

Biembengut, M.; Hein, N. (1998). *Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas*. Educación Matemática. Vol 11. N° 1.

Herman, J. (1970). *Left ventricular volume by angiocardiography. Comparison of methods and simplification of techniques*. Cardiovasc Res.

Jonsell, S. (1969). *Method for the determination of heart size by teleroentgenography*

Ministerio de Cultura y Educación. (1997). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal*. Buenos Aires.

Pichel, H.; Patrilli, J.; de la Fuente, L. (1988). *Análisis de patologías cardíacas*. Buenos Aires: Fundación Favalaro.