

# LAS ACTIVIDADES DE MODELACIÓN Y SIMULACIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DEL CÁLCULO

*Liliana Suárez Téllez y Francisco Cordero Osorio*

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – IPN, México

[lsuarez@mail.cinvestav.mx](mailto:lsuarez@mail.cinvestav.mx), [fcordero@mail.cinvestav.mx](mailto:fcordero@mail.cinvestav.mx)

## **RESUMEN:**

En este reporte de investigación se presentan los avances de un proyecto acerca de las formas de construcción de conocimiento matemático que proporcionan experiencias de aprendizaje basadas en actividades de simulación y modelación en el estudio de situaciones de la variación y de la acumulación de cantidades que varían continuamente.

En la investigación se toma como referencia la aproximación socioepistemológica. Bajo ese paradigma se concibe el Cálculo como el cuerpo de conocimientos que permite el estudio de los fenómenos de variación y la modelación se concibe como una forma de construir conocimiento matemático que pertenece a las prácticas sociales.

Se presentan aquí las primeras exploraciones en un contexto del estudio del movimiento. La forma de trabajar las representaciones asociadas al movimiento es con el uso de sensores y de transductores que transforman la información en conjuntos de datos que diversos programas manipulan mostrando representaciones gráficas en calculadoras.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Se ha hecho evidente que el conocimiento sobre la naturaleza del contenido matemático permite el planteamiento de hipótesis plausibles sobre la construcción y reconstrucción de significados asociados a las ideas matemáticas importantes. (Por ejemplo, Alanís, 2000). El planteamiento teórico llamado Socioepistemología proporciona una base para identificar y explicar los fenómenos didácticos asociados a la construcción y reconstrucción de significados del Cálculo. La identificación está guiada por la búsqueda de invariantes que ocurren en la actividad humana y las prácticas sociales que motiva el surgimiento de un contenido matemático determinado, como la predicción en el estudio realizado por Cantoral (2001). La explicación se proporciona a través de esos invariantes en la construcción del conocimiento, llamados categorías por Cordero (1998), estableciendo ejes que pueden organizar una rama disciplinaria como, en esta perspectiva, lo es el Cálculo y el Análisis.

El antecedente principal de este trabajo está tomado del planteamiento teórico de Cordero (2001) donde se esboza una estructura que da cuenta de una nueva organización del Cálculo a través de tres categorías y en el que toma como un elemento importante la modelación y el uso del contenido matemático. Otro de los antecedentes es el planteamiento de Arrieta (2001)

Nuestra tarea específica consiste en mostrar las características del contenido matemático que delinean cierto tipo de pensamiento matemático, particularmente el referente a la variación y el cambio. Interesa también establecer la relación de esta caracterización con una de las actividades, generadora por excelencia de uso y conocimiento matemático, como lo es la modelación matemática. *¿Qué formas de construcción de conocimiento proporcionan experiencias de aprendizaje basadas en actividades de simulación y modelación matemática en el estudio de las situaciones del Cálculo que se refieren a la variación y a la acumulación de las cantidades que varían continuamente?*

## MARCO TEÓRICO

La teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) proporcionará un marco teórico general para estudiar las relaciones entre los sistemas del aprendizaje, la enseñanza y el saber. En esta teoría el principal problema de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción. Esta visión concede particular importancia a la situación- problema que constituye la experiencia de aprendizaje y a la gestión del profesor, durante el diseño y durante la experiencia, de la interacción entre la situación y el problema.

El diseño de situaciones será el punto de partida de la investigación. En la Teoría de las Situaciones Didácticas la naturaleza del conocimiento matemático incluye tanto conceptos como sistemas de representación simbólica y procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas. Una situación didáctica se define como un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un grupo de estudiantes y el profesor que se establecen con el fin de que los alumnos aprendan, reconstruyan algún conocimiento. En particular el diseño de las situaciones en nuestra investigación contemplarán los siguientes aspectos:

- su planteamiento será coherente con la aproximación teórica socioepistemológica,
- incorporará actividades de simulación y modelación,
- tendrá asociada una explicación de la forma en cómo las construcciones del Cálculo se lograrán a partir de las actividades que la integran. Esta explicación incluirá el uso de herramientas y la generación de significados.

## EXPLORACIONES INICIALES

A continuación se presenta una situación de aprendizaje cuyo propósito es el estudio del movimiento. Se ejemplifica, a través del desempeño de los estudiantes en esta actividad, cómo la interacción entre el uso de representaciones (numéricas, gráficas y algebraicas) y el uso de simulaciones guía al estudiante para avanzar en el uso de herramientas y la generación de significados hasta lograr una visión cualitativa de la situación planteada sobre el movimiento.

En las realizaciones de los estudiantes se observa la forma primaria de predicción, es decir aquella que considera el cambio constante. El propósito de esta investigación es generar la evolución en las producciones a los estudiantes hacia el uso de herramientas de predicción más sofisticadas que involucren el análisis de los cambios en segundo y tercer orden.

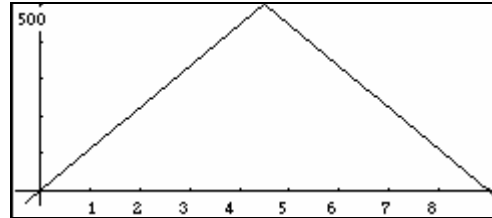
Durante la secuencia de actividades se propicia que los estudiantes transiten por un ciclo de exploraciones que comienza con la situación, sigue con realización de simulaciones y regresa a la situación (ciclo situación – simulación - situación). El propósito de esta secuencia es propiciar una interacción entre las representaciones de los estudiantes con las representaciones que resultan de simular con el uso de la tecnología la situación del movimiento establecida.

Llamamos *construcción de conocimiento matemático a partir de actividades de simulación y modelación* a la evolución que se presenta en el uso de herramientas y la generación de significados que se observa en la secuencia de exploraciones situación – simulación – situación en las que interactúan las representaciones de los estudiantes con las representaciones que resultan de simular la situación del movimiento establecida.

## S1. La situación

Se describe con palabras el recorrido de una persona de ida y vuelta a una distancia de 500 metros en 9 minutos.

Los estudiantes recurren a representaciones gráficas de la posición con respecto al tiempo con trazos rectos, tomando como constante la velocidad del recorrido.



Calculan la velocidad con la fórmula para velocidad constante y se identifica ésta como la pendiente de la recta.

$$v = \frac{d}{t}, v = \frac{1000}{9}, v = \frac{500}{4.5}$$

Observan que la pendiente tiene signos contrarios para los recorridos de ida y de regreso.

Al analizar las posiciones para minutos consecutivos, observan que el cambio de posición de un minuto a otro es constante en los intervalos de ida y de regreso, y corresponde con las pendientes de la curva.

x	y68	y69	
0.	0.		
1.	111.1111		
2.	222.2222		
3.	333.3333		
4.	444.4444		
5.	444.4444		
6.	333.3333		
7.	222.2222		

y69(x)=t

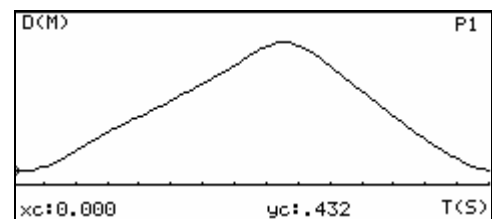
## S2. La simulación

Se propicia que los estudiantes realicen un movimiento de tal manera que a través de un sensor de posición se genere una representación gráfica que corresponda con la situación planteada.

Los estudiantes establecen escalas para representar la situación y se mueven a lo largo de una línea recta frente al sensor.

500 m corresponden con 5 m  
9 min corresponden con 1 min

Obtienen una gráfica con trazos suaves. Durante la simulación controlan su velocidad, determinando que ésta sea constante para que se parezca a su primer esbozo.



Observan que la inclinación de la recta se relaciona con la velocidad, que la inclinación durante la mayor parte del recorrido es constante, que en el momento de comenzar el regreso la curva no tiene inclinación, que las inclinaciones para los recorridos de ida y vuelta son contrarios.

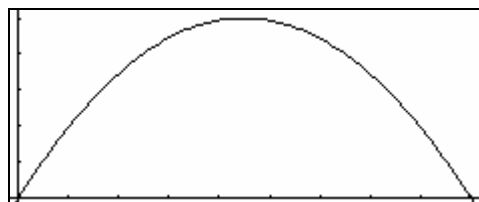
Relacionan la velocidad constante con líneas rectas.

### S3. La situación

Se les propone a los estudiantes explorar<sup>1</sup> el fenómeno del movimiento a partir de la gráfica de una parábola.

Asocian a esta representación el significado esbozado en la exploración anterior en la que la pendiente de la curva corresponde con la velocidad.

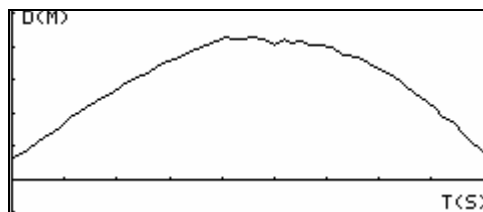
Obtienen la representación algebraica de la parábola y se determina la velocidad por medio de una aproximación con velocidades promedio



### S4. La simulación

Se propicia que los estudiantes realicen nuevas simulaciones analizando lo que ocurre con las pendientes en cada momento del recorrido.

Durante la simulación, los estudiantes concentran la atención en las pendientes de la curva a lo largo del periodo del recorrido. Observan que las pendientes de la curva tienen menor inclinación en el inicio y fin del recorrido.



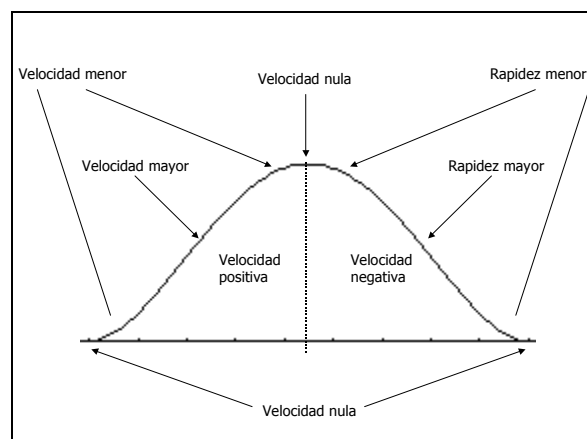
Uso de herramientas y generación de significados encontrados en el desempeño de los estudiantes.

	Herramientas	Significados
S1	Graficación de rectas. Cálculo de la velocidad constante. Tabulación de puntos.	Se identifica la velocidad promedio como la pendiente de la recta. Se observa que la pendiente tiene signos contrarios para los recorridos de ida y de regreso y se asocian signos contrarios a las velocidades de ida y de regreso. Se identifica el cambio de posición constante con la velocidad promedio y con las pendientes de las rectas.

<sup>1</sup> En algunas ocasiones los estudiantes han hecho la exploración de manera espontánea, es decir no ha sido necesario que el profesor se los sugiera.

S2	Establecimiento de escalas. Abstracción de la situación para representarla con la medición de posición con el sensor.	Se relaciona la velocidad constante con líneas rectas. Se relaciona la velocidad nula con una pendiente horizontal de la curva.
S3	Graficación de parábolas. Cálculo de velocidades constantes en intervalos pequeños.	Se genera un procedimiento de cálculo de la velocidad variable a partir de aproximaciones de velocidades promedio.
S4	Establecimiento de escalas. Abstracción de la situación para representarla con la medición de posición con el sensor.	Se relaciona los trozos donde la gráfica tiene pendientes más o menos inclinadas con velocidades mayores o menores Se observa que en el inicio y fin del recorrido la pendiente de la recta es pequeña y se asocian con una velocidad nula

El ciclo de exploraciones de situación - simulación - situación permiten incorporar los significados generados por el estudiante para la construcción de una apreciación cualitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo:



Estas exploraciones señalan, de alguna manera, el tipo de actividades relacionadas a la modelación: el estudiante realiza múltiples realizaciones con el propósito de lograr una gráfica que mejor describa la situación de movimiento, realiza ajustes en su movimiento y en la representación gráfica que le permiten una mejor correlación entre la pendiente de la curva y la velocidad y entre la variación de la pendiente de la curva y la aceleración del movimiento. En este sentido decimos que la actividad de aprendizaje planteada permite la construcción de conocimiento matemático a partir de actividades de simulación y de modelación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alanís, J. (2000) La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de Cálculo. En Cantoral, R. (Com.) El futuro del Cálculo infinitesimal. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Arrieta, J. (2001) La modelación de fenómenos como procesos de matematización en el aula. Memoria predoctoral. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.
- Artigue, M. (1995) La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.) Ingeniería en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cordero, F. (en prensa). Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 4, 2, 57-74.
- Confrey, J. (1999). Generative domain knowledge: Redefining teachers' content knowledge for a changing technological world. En Memorias del VII Simposio Internacional en Educación matemática Elfriede Wenzelburger. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Confrey, J. y Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of "Mathematical objects" as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. International Journal of Computers for Mathematical Learning, volumen 1, pp. 139-168.