

# UNA RECONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS EN EL CONCEPTO DE DERIVADA. EL CASO DE LA LINEALIDAD DEL POLINOMIO\*

María del Pilar Rosado Ocaña y Francisco Cordero Osorio  
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México  
[mrosado@mail.cinvestav.mx](mailto:mrosado@mail.cinvestav.mx) y [fcordero@mail.cinvestav.mx](mailto:fcordero@mail.cinvestav.mx)

## RESUMEN:

Se presentan los resultados de un proyecto de investigación cuya finalidad es formular una reconstrucción del significado de la derivada, basada en considerar que la propiedad de linealidad del polinomio –en el marco del argumento gráfico del comportamiento tendencial de las funciones- posibilita que los estudiantes construyan, desde este argumento, un nuevo significado a la primera derivada y a su vez usarlo en el bosquejo de gráficas de polinomios en general. La situación refleja la posibilidad de reconstruir significados en el concepto de derivada y explica la relación de éstos con el concepto, a través de la actividad humana.

## PROBLEMÁTICA

Considerando que la problemática fundamental de la enseñanza de las matemáticas, consiste en una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, y que cada una es de naturaleza y necesidad distinta; la tarea fundamental de la Matemática Educativa consiste en reorganizar a la obra matemática. La fuente principal de la reorganización se encuentra en la reconstrucción de significados en contextos interactivos que formula la organización social del salón de clases (Cordero, 2001). El concepto de derivada ha tenido muchos acercamientos, sin embargo no es clara su reorganización en la matemática escolar.

Un cuestionamiento que se hace, en el marco de la problemática es, si la derivada como concepto es el resultado de la actividad, es decir, si corresponde a la naturaleza del conocimiento que proviene de la actividad. Se percibe en diferentes investigaciones que el concepto de derivada no corresponde a esa naturaleza. En diversos estudios se reporta que el estudiante no incorpora significados a la derivada a pesar de conocer que es la pendiente de una recta. En este artículo, se presentan los resultados de un proyecto de investigación que considerando el cuestionamiento dentro de esta problemática, propone una reconstrucción de significados en el concepto de derivada.

## PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Dentro del marco anterior, se formula la siguiente pregunta de investigación:

- *¿Qué significados se pueden reconstruir, con relación a la derivada a través de la situación diseñada para construir la propiedad de linealidad del polinomio, en contextos interactivos de los estudiantes?*

Para aproximarse a una respuesta, se ha pretendido hacer un estudio basándose en el marco teórico y la metodología elegida de la investigación, realizando un diseño de la situación para la recolección de datos y su respectivo análisis.

---

\* Este trabajo es el seguimiento de la comunicación breve “La Variación, la Aproximación y la Transformación como un marco de reconstrucción de significados en el concepto de derivada. El caso de la Linealidad del Polinomio”, presentado en RELME 15 en Buenos Aires, Argentina.

## HIPÓTESIS

La hipótesis consiste en creer que la construcción la propiedad de linealidad del polinomio –en el marco del argumento gráfico del comportamiento tendencial de las funciones- posibilitará que los estudiantes construyan, desde este argumento, un nuevo significado a la primera derivada y a su vez usarlo en el bosquejo de gráficas de polinomios en general.

## MARCO TEÓRICO

La Socioepistemología es considerada una aproximación teórica que toma en cuenta las relaciones entre las dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica a través de la incorporación de la dimensión social. Se trata de considerar las interacciones que surgen en el salón de clases entre el profesor y los estudiantes, y entre los estudiantes mismos, como una actividad humana que debe considerarse más allá de los conceptos matemáticos a la hora de reorganizar la obra matemática y antes de ser llevada al salón de clases.

Esta perspectiva teórica, brinda herramientas didácticas a los docentes para que participen activamente en el diseño de situaciones del Cálculo, esas herramientas dependen de los significados y de sus reconstrucciones que surgen de la actividad humana y los significados y sus reconstrucciones componen contenidos matemáticos específicos que reorganizan la obra matemática (Cordero, 2001). La socioepistemología se basa en cuatro elementos: significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos.

Una descomposición genética basada en la socioepistemología, que considera a los conceptos que aluden a un comportamiento de la función que tiene cierta tendencia (situación de transformación), puede ser formulada como sigue:

- **Significados.** Patrones de comportamiento de la función.
- **Procedimientos.** Variación de parámetros de la función.
- **Procesos-objetos.** Función como una instrucción que organiza comportamientos.
- **Argumento.** Comportamiento tendencial de las funciones.

Este trabajo, toma en cuenta esta aproximación teórica en el diseño de situación.

## METODOLOGÍA

La metodología de la investigación consiste en observar a las situaciones a través de un ciclo iterativo, considerando tres elementos mutuamente relacionados: análisis de hechos o datos, diseño de la situación y su implementación, la recolección de datos y con ello considerar la experiencia de la cual se partió. (Martínez, 1999). Estos tres elementos componen varias etapas para alcanzar la actualización de la descomposición genética de los conceptos involucrados en las situaciones.

- En la etapa uno, se parte de una experiencia epistemológica estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, y se organiza el contenido con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende. (Cordero, 1998).
- Para la etapa dos, se trabajan ejemplos de diseño e implementación de situaciones y colección de datos en el laboratorio.

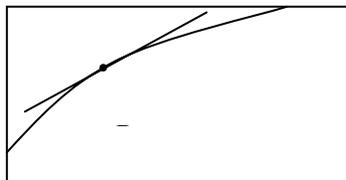
- En la etapa tres, se realiza un análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsidera la experiencia de la cual se partió.
- En la etapa cuatro, al analizar los datos coleccionados y de acuerdo a los resultados obtenidos, se espera encontrar los fundamentos para la aplicación de la situación en el proyecto. Al realizar el rediseño de la situación, se parte de esos resultados.
- Para la etapa cinco, se realiza la aplicación del rediseño y la colección de datos.
- En la etapa seis, se realiza el análisis de datos y la actualización de la descomposición genética. Se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento sobre el cuál se partió. La iteración continúa hasta alcanzar una explicación de la evolución socioepistemológica del contenido matemático de la problemática.

## DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

En la didáctica actual, todavía hallamos énfasis en los aspectos formales y rigurosos, dejando de lado los aspectos epistemológicos y psicológicos concernientes a los conceptos. En el cálculo, los conceptos fundamentales son señalados por la derivación e integración, explicados a través de las concepciones del límite y de función, acompañados de sus representaciones geométricas, la recta tangente a una curva, y el área bajo la curva. Cabe señalar que esta didáctica ha generado una “cultura”, en el profesor y estudiante, aprenden a “decir” lo que es la derivada e integral y representarlos geoméricamente, sin tener una explicación que les permita estudiar fenómenos de variación continua, sólo lo conciben como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación (Cordero, 1997).

Esta didáctica tiene un buen desarrollo de los argumentos analíticos sobre los conceptos, logrando matizarlos a través de los dominios de las funciones, sin embargo la didáctica insinúa que estos argumentos sustituyen cualquier otro tipo de argumentos, por ejemplo, los intuitivos y los visuales. La característica fundamental de esta didáctica es que toma los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin considerar que estos conceptos tienen que ser construidos por el sujeto como una herramienta funcional que le será posible tratar con distintas clases de situaciones.

El concepto de derivada es presentado comúnmente por ventanas como la siguiente:



Se le presenta al alumno una curva, se señala un punto y se le pide que trace la recta tangente a la curva en dicho punto. Sin embargo, este tipo de ventanas nos pueden representar tres situaciones, la situación de variación, la situación de aproximación y la situación de transformación (Cordero, 2001).

La idea central, es diseñar situaciones que no solamente tomen en cuenta la adquisición del conocimiento, sino también el desarrollo de actividades. Esas situaciones deben mostrar o interpretar de alguna manera relaciones entre los contextos algebraico y gráfico. El lenguaje de

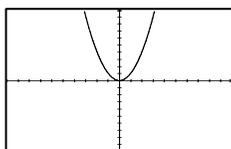
herramientas basado en la actividad humana nos ayuda a identificar a la categoría del comportamiento tendencial de las funciones a través de argumentos cualitativos, estos argumentos cualitativos nos llevan a nuevas acciones que reflejan un intercambio permanente entre los contextos algebraicos y gráficos.

Uno de los aspectos importantes de la investigación, es el diseño de la situación que se trabajó con los estudiantes y que se presenta a continuación.

**¿Qué le pasa a una función cuando se le suma una recta?**

**SECUENCIA 1**

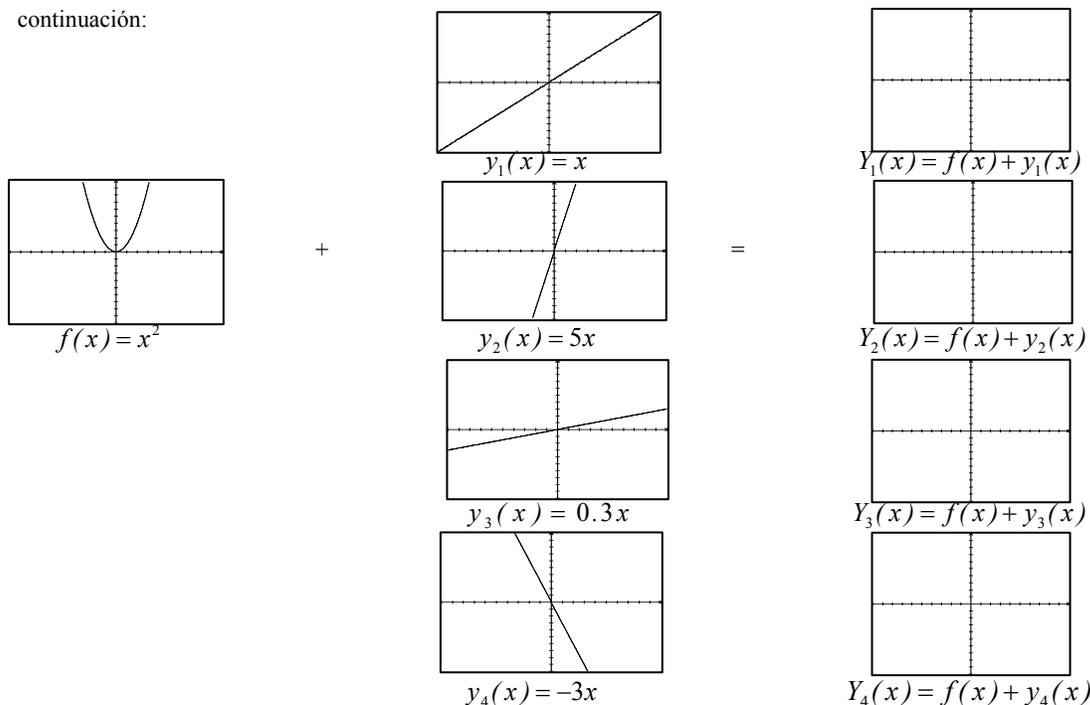
La función cuadrática  $f(x) = x^2$ , tiene como gráfica la curva que aparece en la figura siguiente y se llama parábola.



Se trata que identifiquen la propiedad que tiene la función cuadrática  $f(x) = x^2$  cuando se le suma una recta. Para tal propósito les sugerimos las siguientes actividades.

**Actividad 1.**

a) Grafiquen en un sistema de ejes coordenados la función resultante [ $Y_i(x) = f(x) + y_i(x)$ ], como se indica a continuación:

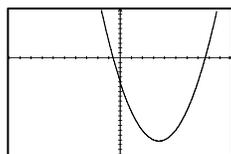


b) Organicen sus resultados en una tabla que registre las características de la recta y de la función resultante.

**Actividad 2.**

- a) Describan lo que le pasa a la parábola  $f(x) = x^2$  cuando se le suma una recta, o sea cuando resulte  $x^2 + ax + b$ .
- b) Ilustra la descripción anterior con varios casos. Grafica en los mismos ejes coordenados la función resultante y la recta.

**Actividad 3.** Consideren ahora, la función cuadrática  $f(x) = x^2 - 7x - 5$  y su gráfica. Identifiquen la parte lineal de la función en la gráfica.



$$f(x) = x^2 - 7x - 5$$

**Actividad 4.** Conjeturen acerca de lo que le pasa a una función cuadrática cuando se le suma una recta.

### SECUENCIA 2

La función cúbica  $f(x) = x^3$ , tiene como gráfica la curva que aparece en la figura 2.

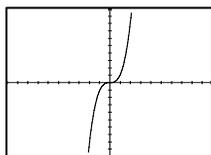
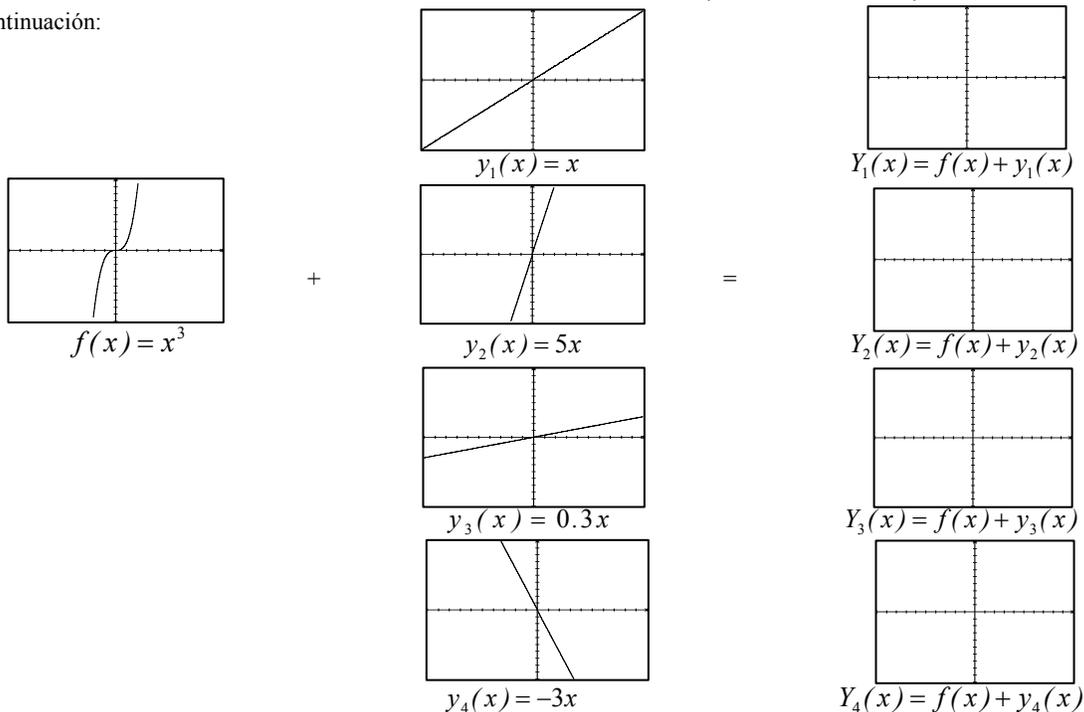


Figura 2

Se trata que identifiquen la propiedad que tiene la función cúbica  $f(x) = x^3$  cuando se le suma una recta. Para tal propósito les sugerimos las siguientes actividades.

### Actividad 1.

Grafiquen en un sistema de ejes coordenados la función resultante [ $Y_i(x) = f(x) + y_i(x)$ ], como se indica a continuación:

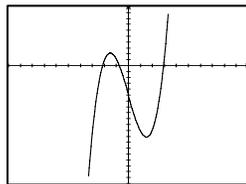


b) Organicen sus resultados en una tabla que registre las características de la recta y de la función resultante.

### Actividad 2.

- Describan lo que le pasa a la función cúbica  $f(x) = x^3$  cuando se le suma una recta, o sea cuando resulte  $x^3 + ax + b$ .
- Ilustra la descripción anterior con varios casos. Grafica en los mismos ejes coordenados la función resultante y la recta.

**Actividad 3.** Consideren ahora, la función cúbica  $f(x) = x^3 - 7x - 5$  y su gráfica. Identifiquen la parte lineal de la función en la gráfica.



$$f(x) = x^3 - 7x - 5$$

**Actividad 4.** Conjeturen acerca de lo que le pasa a una función cúbica cuando se le suma una recta.

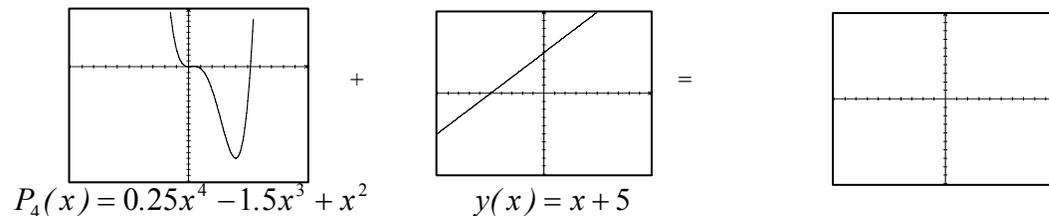
### SECUENCIA 3

Una función de la forma  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  recibe el nombre de polinomio de grado  $n$ .

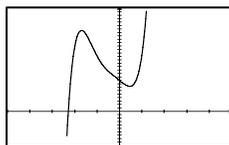
#### Actividad 1.

a) Bosquejen en el mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de la recta y la función resultante al sumar el polinomio  $P_4(x) = 0.25x^4 - 1.5x^3 + x^2$  y la recta  $y(x) = x + 5$ .

b) Describan el comportamiento de la gráfica de la función resultante con respecto a la recta.

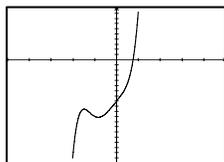


**Actividad 2.** Consideren el polinomio  $P_5(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 5x + 9$  y su gráfica. Describan el comportamiento de la gráfica del polinomio con respecto a su parte lineal  $y = -5x + 9$ .



$$P_5(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 5x + 9$$

**Actividad 3.** En la siguiente gráfica, se han variado los parámetros de la parte lineal del polinomio de la actividad anterior. Propongan una expresión analítica para esta gráfica. (Justifiquen su respuesta).



#### Actividad 4.

a) De acuerdo a los resultados que obtuvieron en las actividades anteriores conjeturen, escribiendo en un párrafo, lo que le pasa a un polinomio cuando se le suma una recta.

b) Demuestren la conjetura.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*. II, 6, 1-32.
- Cantoral, et. Al, (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Ed. Trillas, México, D.F.
- Cordero, F. (2001). *La distinción entre las construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Numero 2, 103-128.
- Cordero, F. (1997). *Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada*. Serie: Antologías, número 1.
- Cordero, F. Y Solís, M. (1997<sup>a</sup>). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*. Serie Cuadernos de Didáctica, Grupo Editorial Iberoamérica, 2<sup>a</sup>. Edición, 79 pp.
- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Numero 1, 56-74.
- Martínez, M. (1999). *Estudio de las relaciones que el estudiante hace para construir la gráfica de la derivada y de la primitiva: efectos de la enseñanza en la transformación de funciones.*, tesis de maestría. Dirección de estudios de posgrado. Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.