UN SOFTWARE ASISTENTE DE GEOMETRÍA Y EL TRATAMIENTO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Rafael A. Meza V.
CECyT Diódoro Antúnez E.-I.P.N., México
rmezav53@yahoo.com.mx

RESUMEN:

La utilización de los conceptos de tiempo y movimiento en el estudio de curvas, consideradas éstas como la trayectoria descrita por un cuerpo en movimiento, condujeron a una comprensión intuitiva de los problemas principales del Cálculo, o sea el de la determinación de la tangente a una curva y el problema del área bajo una curva, pero fue Barrow quien con mayor precisión formuló, en 1667, el problema de la relación entre tangentes y áreas, aunque con un carácter estrictamente geométrico.

El presente trabajo muestra como con el apoyo de un software de geometría dinámica se puede llevar a cabo esta tarea. El Cabri Géomètre, ha mostrado ser un excelente aliado para este tipo de actividades y con su ayuda es posible explorar en forma sistemática, y dinámica, cómo los cambios en una variable cognoscitiva visual, de una de las dos gráficas involucradas en la relación entre tangentes y áreas, provoca cambios en la otra.

INTRODUCCIÓN:

La invención del cálculo es atribuible, en forma independiente a Leibniz y Newton a finales del siglo XVII. Newton desarrolló los conceptos de *fluxión* y *fluente* motivado por el problema de calcular la velocidad de un cuerpo y Leibniz por su parte desarrolló los conceptos de *diferencial* e *integral* motivado en el problema de trazar tangentes a una curva cualquiera. Además, concibieron una notación que permite usar estos conceptos. También encontraron y probaron que lo que ahora conocemos como "El Teorema fundamental del Cálculo" relaciona estos dos importantes conceptos. El descubrimiento de este último, hace posible el desarrollo algorítmico del cálculo y proporciona una formulación genérica de la relación entre el problema de la tangente y el problema del área, o en nuestra moderna notación, entre derivación e integración.

La utilización de los conceptos de tiempo y movimiento en el estudio de curvas, consideradas éstas como la trayectoria descrita por un cuerpo en movimiento, condujeron a una comprensión intuitiva de estos problemas, pero fue Barrow quien con mayor precisión formuló, en 1667, el problema de la relación entre tangentes y áreas, aunque con un carácter estrictamente geométrico en sus *Lectiones geometricae*. El problema de la tangente básicamente consistía en determinar un método que permitiera trazar una línea tangente a una curva en un punto específico; el problema del área, también fue abordado en forma geométrica, y básicamente consistía en encontrar un método que permitiera construir un rectángulo de área igual al área de interés.

El Teorema de Barrow permite recuperar el significado gráfico del Teorema Fundamental del Cálculo, así como las relaciones de las variables cognoscitivas visuales entre el problema de la tangente y el problema del área. No es obvio identificar la organización entre estas variables. Sin embargo, con el apoyo de un software de geometría dinámica podemos llevar a cabo esta tarea. Cabri ha mostrado ser un excelente aliado para este tipo de actividades y con su ayuda es posible explorar en forma sistemática, y dinámica, cómo los cambios en una variable cognoscitiva visual, de una de las dos gráficas involucradas en la relación entre tangentes y áreas, provoca cambios en la otra.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La motivación de este estudio se plantea en términos de las siguientes preguntas:

El alumno que ha llevado un curso tradicional de Cálculo ¿es capaz de identificar la relación que existe entre el problema de la tangente y el problema del área si únicamente dispone de información gráfica?

Y si la identifica,

¿Es capaz de realizar el tratamiento gráfico de la relación entre estos dos problemas, si cuenta con los elementos formales y abstractos del Cálculo que le proporciona un curso tradicional?

Aún cuando a primera vista parece simple identificar o construir esta relación *no es obvio* y el tratamiento de tal relación gráfica requiere de la comprensión de la organización de las variables cognoscitivas visuales, por lo que nuestras siguientes preguntas pueden ser planteadas de la siguiente manera:

¿Cuáles son las variables cognoscitivas visuales en la relación entre tangentes y áreas? y *¿El tratamiento y la conversión de las variables visuales posibilitan al estudiante de bachillerato a la comprensión de tal relación?*

EL CUESTIONARIO

Con el propósito de conocer hasta qué punto los alumnos que han tomado los cursos tradicionales de cálculo son capaces de identificar, llevar a cabo el tratamiento y la conversión de la relación entre tangentes y áreas, se aplicó un cuestionario que tiene la particularidad de no presentar expresiones algebraicas explícitas y guía al alumno a tratar de dar una respuesta que se apoye en elementos gráficos pero sin obstaculizar, desde luego, una respuesta de tipo algebraica.

CUESTIONARIO DIAGNOSTICO

Sea **L** la recta tangente a la gráfica de la función polinomial de segundo grado $\boldsymbol{f}$ en el punto de coordenadas **(2, 60)** como se muestra en la figura 1.

a) encuentra el valor de la función $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x = 2}$, es decir $\boldsymbol{f(2)}$

b) encuentra el valor de la derivada de la función $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x = 2}$, es decir $\boldsymbol{f'(2)}$

c) en el sistema de coordenadas proporcionado en la figura 2 traza la gráfica de la función derivada $\boldsymbol{f'(x)}$

d) determina la expresión polinomial de primer grado que corresponde a $\boldsymbol{f'(x)}$

e) utiliza la expresión de $\boldsymbol{f'(x)}$**,** obtenida en el inciso anterior, y determina $\boldsymbol{f(x)}$

f) haz uso de la expresión $\boldsymbol{f(x)}$ para determinar $\boldsymbol{f'(0.5)}$

g) ¿a qué tipo de curva corresponde la expresión $\boldsymbol{f(x)}$?

h) proporciona dos o tres elementos representativos de esta última curva.

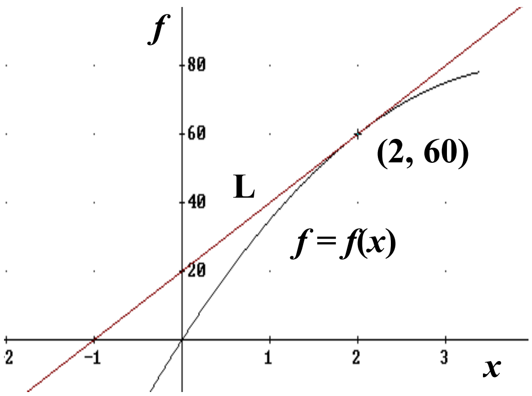

Figura 1

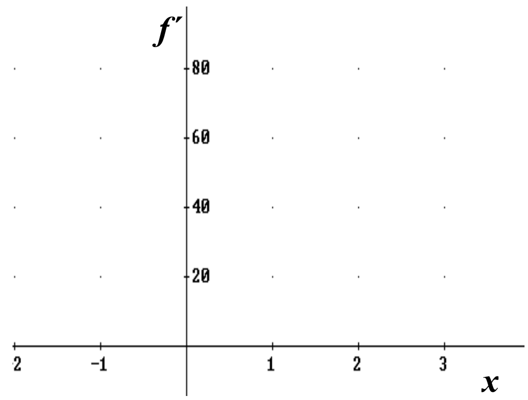

Figura 2

Hemos podido constatar que alumnos del nivel bachillerato y del primer año de licenciatura del área Físico-Matemáticas (he incluso profesores del nivel medio superior) no logran identificar tal relación. Construcción, tratamiento o conversión definitivamente no se encuentran dentro de las posibilidades de estudiantes de este nivel.

EL TEOREMA DE BARROW

Las investigaciones medievales de personajes como: Galileo, Roberval, Descartes, Torricelli, Fermat, Gregory St. Vincent, en particular las de Oresme (siglo XIV), condujeron a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad como función del tiempo (Boyer, 1968). Estos resultados fueron dando lugar al reconocimiento de lo fundamental de la relación entre tangentes y áreas, pero fue Isaac Barrow quien con mayor precisión formuló, en 1667, el problema de la relación entre tangentes y áreas. Struik (1969) en su libro *"A Source Book in Mathematics"* en las páginas 254-260 proporciona los más representativos de esta *Lecture X.*

El método utilizado por Barrow es totalmente geométrico, y esto hace que no sea fácil reconocer la importancia de sus resultados.

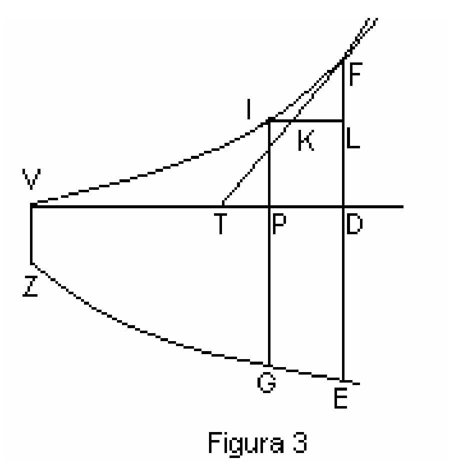

Figura 3

Este trabajo es una de las grandes contribuciones al cálculo infinitesimal, usa métodos geométricos libres de los cálculos y hace uso de curvas auxiliares, aunque es poco claro. Retomo el párrafo XI, que corresponde al Teorema Fundamental, de la *Lecture X,* con el objeto identificar las variables cognoscitivas presentes en este trabajo.

Con referencia a la Figura 3, sea la curva *ZGE*, la gráfica de una función monótona decreciente, a partir de la ordenada perpendicular *VZ*, con respecto a la recta *VD*. Construyamos la curva *VIF* con las siguientes hipótesis.

1. La ordenada perpendicular *DF,* de la curva *VIF, representa* el área de la región *VDEZ.*
2. Elijamos el punto *T* sobre la recta *VD* tal que satisfaga $\dfrac{DF}{DE} = DT$.

En consecuencia

$$LF = DF - DL = \text{área } VDEZ - \text{área } VPGZ = \text{área } PDEG.$$

Por otro lado, ΔLKF es semejante al ΔDTF así,

$$\frac{LK}{DT} = \frac{LF}{DF},$$

$$LK = LF\,\frac{DT}{DF},$$

pero, por la segunda hipótesis $\dfrac{1}{DE} = \dfrac{DT}{DF}$, y

$$LK = \frac{LF}{DE} = \frac{\text{área } PDEG}{DE} < \frac{DE \cdot DP}{DE} = DP = LI.$$

Así, finalmente tenemos que: $LK < LI$

Si el punto P está a la derecha del punto D se cumple entonces la relación:

$$LK > LI$$

Con lo que Barrow demuestra que la recta *TF* es tangente a la curva *VIF* en el punto F en el sentido clásico griego de la recta que toca en un único punto a la curva sin cortarla.

Desde luego que es posible reinterpretar en nuestra notación este resultado.

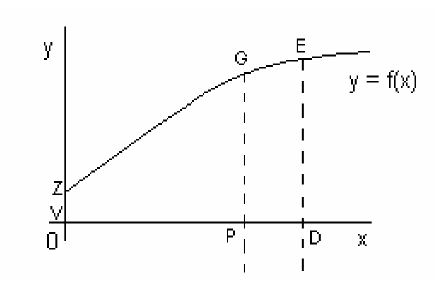

Figura 4

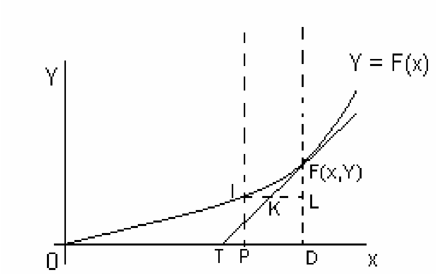

Figura 5

Dada una función creciente $y = f(x)$, figura 4, construyamos una función $Y = F(x)$, figura 5, con la condición de que la ordenada $Y = DF$ represente el área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las ordenadas VZ, DE y el eje horizontal, es decir

$$Y = \int_0^x y\,dx\,.$$

Barrow elige el punto T sobre el eje horizontal de tal forma que se cumpla la relación $\dfrac{DF}{DE} = DT$, y demuestra que la recta TF es tangente a $Y = F(x)$.

Por otro lado se tiene que $\dfrac{DF}{DT} = DE = y$, en nuestra notación este resultado es equivalente a $\dfrac{dY}{dx} = y$, es decir $\dfrac{d}{dx}\int_0^x y\,dx = y$.

Barrow da así, solución al problema de construir una curva, $Y = F(x)$, en la que en todo momento conocemos su tangente. En nuestra notación moderna, la integral definida considerada como una función del límite superior variable resuelve el problema de encontrar una función en la que en cada momento conocemos su derivada. Lo que no está presente aquí es el cálculo de áreas por medio de tangentes o en nuestra notación la obtención de integrales definidas a partir de integrales indefinidas, sin embargo podemos considerar a la luz de estos hechos que en 1667 logró identificar la siguiente relación básica:

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f *es continua en* $[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f$ *para* $x \in [a, b]$, *entonces* $F'(x) = f(x)$.

CABRI Y LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Tomando como hilo conductor el Teorema de Barrow y apoyándonos en el software de geometría dinámica Cabri, podemos llevar a cabo el tratamiento de diversos pares de funciones familiares en el Cálculo. Bosquejamos a continuación el tratamiento para el par de funciones: *lineal* $f(x)$ y *cuadrática* $F(x)$.

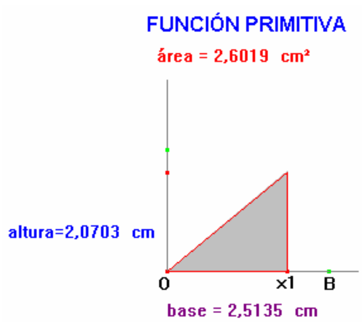

Figura 6

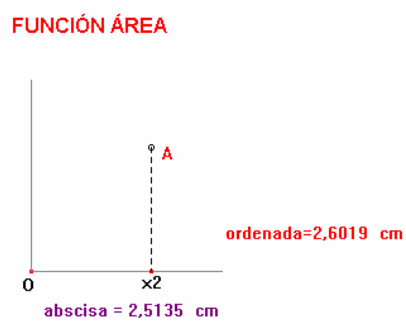

Figura 7

En la figura 6 podemos observar que el área del triángulo sombreado, de base 2.5135 y altura 2.0703, es 2.6019, la magnitud numérica de esta área está representada en la figura 7 como un segmento, perpendicular al eje de las abscisas, de magnitud numérica igual a la magnitud numérica del área del triángulo, con lo cual se obtiene un punto A de coordenadas (2,5135, 2.6019). Este mismo proceso puede ser repetido para obtener un conjunto de puntos, pertenecientes a la función de área (figura 7), generados por las diversas áreas de los triángulos correspondientes. El siguiente paso es decisivo ya que implica dar el salto de concebir “x1” como un número a concebir “x” como una variable continua, para poder obtener la expresión algebraica correspondiente al lugar geométrico generado por el punto A al desplazarse la variable “x” sobre el intervalo OB. En este punto Cabri permite que el estudiante pueda llevar a cabo la exploración de la variación de “x” sin recurrir necesariamente al uso de herramientas algebraicas, lo cual puede ser una ventaja para aquellos que aún no poseen estos recursos. La función *Lugar geométrico* del Botón *Construir* muestra en la figura 8 el lugar geométrico generado por el punto A al variar en forma continua “x”.

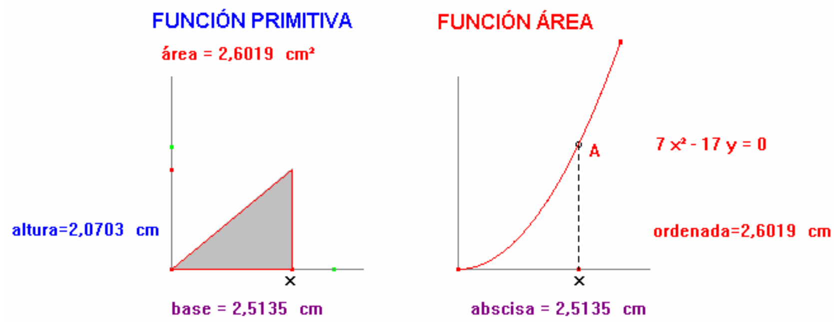

Figura 8

Sin embargo, podemos tomar la alternativa de activar la función *Ecuación y coordenadas* del botón *Medir* y Cabri nos proporcionará la ecuación de la función $Y(x) = F(x)$, como se muestra en la figura 9.

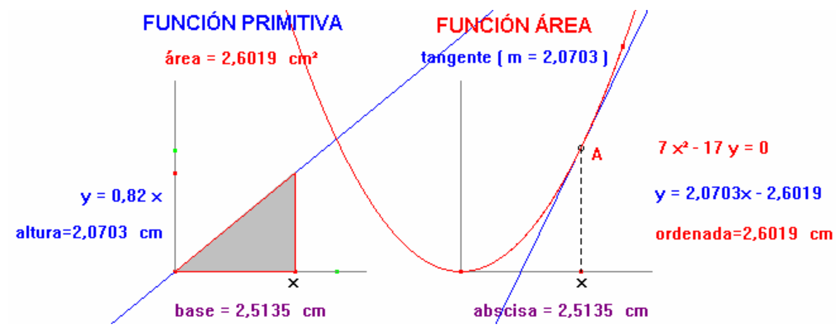

Figura 9

OBSERVACIONES

En este breve espacio se bosquejó la recuperación gráfica y el tratamiento de las variables visuales del Teorema Fundamental del Cálculo, de la versión geométrica de Isaac Barrow, con la ayuda del software de geometría dinámica "Cabri". El tratamiento se realizó sobre la representación gráfica de una función primitiva y se construyó la función área correspondiente para el caso en que la primera es una función lineal ascendente $(m > 0)$, forma un ángulo menor de 45° con el eje de las abscisas $(m < 1)$ y pasa por el origen de coordenadas (constante $b = 0$). Es posible ampliar este análisis en forma sistemática sobre las variables visuales, sus valores y las correspondientes unidades simbólicas (Duval, 1992). Puede mostrarse, por ejemplo, que cuando la función primitiva es la función identidad $y = x$ la cual pasa por el origen, la función de área es la función cuadrática $y = \frac{1}{2}x^2$ de vértice el origen de coordenadas, y como el trazo de la primitiva es ascendente la función de área abre hacia arriba. Una gran variedad de situaciones didácticamente interesantes surgen con respecto al tratamiento de la función primitiva cuando esta última es una función lineal que no pasa por el origen. Finalmente, es necesario dar un mayor énfasis a la construcción, tratamiento y conversión de las representaciones gráficas ya que en general nuestros estudiantes no han llegado a desarrollar las herramientas mentales necesarias para realizar en forma satisfactoria estas operaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duval, R (1992). Gráficas y Ecuaciones: La articulación de dos registros. En *"Antología En Educación Matemática",* Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

Boyer, C. (1968). *"A History of Mathematics"*. John Wiley & Sons. New York, USA.

Descartes, R. (1637). *"La Geometría"*. (Traducción, 1947) Espasa – Calpe Argentina, S. A. Traducida por Rossell Soler, Pedro. Profesor de la Universidad de Buenos Aires. Argentina.

Struik, D. J. (1969). *"A Source Book in Mathematics, 1200-1800"*. Harvard University Press. Cambrige.