

# APROPIACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL DIBUJO Y LA FIGURA GEOMÉTRICA A TRAVÉS DEL USO DE CABRI-GÉOMÉTRE.

Alejandro Carrillo A.  
CINVESTAV-IPN.

[acarrill@mail.cinvestav.mx](mailto:acarrill@mail.cinvestav.mx)

## RESUMEN:

En el siguiente artículo se presenta el resumen del proyecto de investigación de tres estudios de casos, el cual se encuentra en la etapa de análisis de los resultados arrojados en los diferentes instrumentos metodológicos aplicados a los alumnos de segundo grado de secundaria. En este estudio se pretende, que a través de la herramienta CABRI- GÉOMÉTRE, el alumno se apropie de las relaciones estructurales que se preservan en una figura geométrica.

Después del seguimiento realizado al proyecto a gran escala de EMAT con procesos estadísticos, se hace una extensión del proyecto combinándolo con un estudio en detalle de tres alumnos por su alto, medio y bajo rendimiento escolar, asumiendo a la investigación la forma de un estudio de casos, que es en esta segunda parte donde versa el proyecto.

## INTRODUCCION

Se sabe que el razonamiento geométrico del estudiante es inicialmente guiado por el dibujo que se realiza en una hoja de papel o en el pizarrón, es decir, el estudiante al principio no distingue el dibujo de la figura geométrica, de la cual, el dibujo es sólo un ejemplo. La figura geométrica es un objeto abstracto que consiste en un conjunto de relaciones estructurales que se preservan a través de las deformaciones que pueda sufrir un dibujo de la figura, bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, cuando se tiene un triángulo dibujado con Cabri se le puede deformar a través del arrastre. Las deformaciones que sufre un dibujo mediante el arrastre son válidas, en el sentido de que el resultado de la deformación es otro dibujo que representa a la misma figura geométrica. Esto es análogo a lo que ocurre cuando en lugar de un número pensamos en una variable que puede tomar ese valor numérico.

El software “CABRI –GEOMETRE” es el ambiente computacional adecuado para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, ya que permite al alumno manipular figuras geométricas en la pantalla, haciendo que trace y transforme estas figuras, lo que lo conducirá a veces a deducir, por ejemplo, las propiedades invariantes de dichas figuras. Esto es posible, debido a que las transformaciones en el ambiente Cabri están sujetas a las reglas de la Geometría Euclidiana. La verificación práctica de teoremas geométricos, la exploración y elaboración de conceptos hacen del programa Cabri un acercamiento práctico y experimental al mundo de la geometría.

Lo mencionado anteriormente, nos dice que Cabri es el ambiente idóneo para los alumnos de segundo año de secundaria, que usualmente encuentra gran dificultad para conceptualizar en el campo de la Geometría Euclidiana. Por lo general, el estudiante está anclado a las propiedades del dibujo y para tomar conciencia de las propiedades de la figura correspondiente al dibujo debe reconocer propiedades invariantes, es decir, las que permanecen cuando se deforma la figura; por ello, es importante que el alumno distinga las relaciones en el dibujo (particularidades del dibujo, por ejemplo, la medida de los ángulos, la longitud de los lados) y las relaciones en la figura (por ejemplo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo

siempre es  $180^\circ$ , la suma de la longitud de dos lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercero).

Por las razones antes expuestas, en esta investigación se utilizará el ambiente Cabri como herramienta para cerrar la brecha entre la percepción y la geometría, proponiendo un micromundo para la enseñanza de la geometría con manipulación directa.

Contar con las computadoras, no quiere decir que el problema de la enseñanza ya está resuelto. Hay que tener presente que la computadora por sí misma, no es garantía de que se logre el aprendizaje, ni es sinónimo de renovación pedagógica, más bien es una ayuda pedagógica, donde el alumno construye su conocimiento y los significados para interiorizarlos y así, avanzar en su proceso de aprendizaje. Sin embargo, todo esto ha sido demostrado en proyectos anteriores, donde las experiencias nos señalan que, “sí el uso de las tecnologías es apoyado en un modelo pedagógico, permitirá construir ambientes de aprendizaje apropiados, que permitan enriquecer y mejorar la enseñanza actual de las matemáticas en la escuela secundaria” (proyecto EMAT 2000).

El uso de la tecnología puede ayudar en cierto modo a reducir la carga académica del profesor, pero esto, no en el sentido de hacer al alumno más rápido para realizar sus tareas, o más eficiente, o de manera más expedita, sino en el sentido de acceso y equidad para desarrollar sus estructuras cognitivas con mayor eficiencia, como la idea de construcción y verificación de conjeturas, la idea de semejanza, la idea de congruencia. Pero a esta carga se debe acceder después de haber creado un cierto bagaje con respecto al tema de estudio (en este caso la Geometría Euclidiana) en donde el alumno, además, no sólo deba aprender el funcionamiento de la máquina (ya que este funcionamiento es importante, para que el alumno sepa con certeza, cómo decirle a la misma, el proceso que más convenga para llevar a cabo su desarrollo cognitivo), sino también aprovechar todo el desarrollo didáctico y pedagógico, que es lo que se pretende en esta investigación, utilizar la tecnología para producir un impacto a nivel epistemológico.

Por otro lado podemos decir que para resolver un problema en geometría no es suficiente el programa Cabri, sino en principio, se debe tener una buena intuición, después hacer un buen dibujo y tratar de ver qué pasa con él, es decir, qué polígonos son congruentes, qué líneas son paralelas, qué puntos son tangenciales... Después, hacer otro dibujo para ver qué propiedades se preservan y tratar luego de demostrarlo. Porque una vez hecho el dibujo con el software, uno puede modificarlo con libertad y éste se traza solamente en nuevas condiciones iniciales.

El descubrimiento y la construcción de un concepto matemático con Cabri no se realizan de manera esporádica, es necesario recorrer un camino que comienza en un nivel intuitivo y que vaya progresando gradualmente a través de un nivel experimental, un nivel teórico y hasta pretender llegar a un nivel axiomático. El recorrido en estas diferentes etapas debe ser guiado por el profesor con actividades previamente elaboradas, sin que la exploración del micromundo por parte del alumno sea totalmente libre o azarosa, ya que los micromundos ofrecen un amplio rango de experiencias para el estudiante, sin que ello garantice que necesariamente ocurra el aprendizaje deseado. Lo que el estudiante experimenta a través de la pantalla puede no ser relevante en un momento dado, de ahí que la presencia del maestro siga siendo indispensable.

En el ambiente del micromundo, el maestro tiene entre sus funciones, no sólo ser el facilitador de las tareas orientadoras para la exploración del estudiante, donde se favorezca el razonamiento y la reflexión en los alumnos, sino también la función de intervenir oportunamente en el proceso de exploración y de conceptualización. Para ello el profesor tiene que desarrollar una sensibilidad en el proceso de enseñanza y de aprendizaje para detectar el momento crucial e intervenir, ya sea con una nueva información o con una pregunta adecuada, y acercar al alumno hacia la zona de desarrollo próximo (modelo Vygotskiano), donde el maestro actúa como interlocutor del sujeto que está aprendiendo, es decir el experto en la pareja.

## **MARCO TEÓRICO**

Desde hace más de dos décadas se ha tenido la expectativa de que la influencia de los softwares y las herramientas computacionales hubiesen tenido un gran impacto en las prácticas cotidianas. Sin embargo, el impacto epistemológico ha sido mayor que lo previsto (Balacheff & Kaput 1996). Estos autores señalan, que se debe fundamentalmente al proceso de reificación de los objetos matemáticos y a las relaciones entre ellos que el estudiante pueda activar en los entornos interactivos computacionales. Lo anterior permite una forma de actividad mucho más directa que lo que era posible anteriormente. Esta nueva concepción hace indispensable la extensión de la transformación didáctica a los contextos computacionales, dando lugar a una transposición informática.

Para Balacheff & Kaput, el micromundo debe de tener ciertas condiciones en su composición para que sea funcional.

### **Un micromundo está compuesto de (Balacheff & Kaput, 1996):**

- Un conjunto de objetos primitivos y operaciones que se realizan sobre estos objetos (un campo operatorio), es lo que usualmente se denomina en matemáticas un sistema formal.
- Un dominio fenomenológico, que relaciona los objetos y operaciones con los fenómenos que podemos apreciar a nivel de pantalla. Este dominio determina el tipo de retroalimentación que se produce como consecuencia de las acciones y decisiones que toma el estudiante durante la exploración.

### **Un micromundo planteado como el paradigma del “costruccionismo” (Papert, 1993):**

Las representaciones mentales son reconstrucciones de acciones externas, por ende, las representaciones externas son herramientas en la construcción de significado. Esto condujo a Seymour Papert a plantear el paradigma del “costruccionismo”. La idea central detrás de este paradigma, en palabras de Papert, es que las construcciones que se dan en la cabeza de las personas suceden de manera particularmente oportuna cuando son apoyados por construcciones externas, “en el mundo”, llevando a productos que se pueden ver, discutir, examinar “ahí afuera”, tales como la construcción de un programa de computación, un poema, o la teoría del universo. Es decir, su idea central es que si el conocimiento es una construcción del sujeto activo, la mejor manera de lograr dicha construcción es construyendo algo.

Papert llega a la conclusión, que si se pretende que los niños construyan su propio conocimiento, esto no podía darse a partir de formulaciones abstractas o en ausencia de materiales que facilitaran dicha construcción. Papert considera que es la cultura la encargada de facilitar los recursos necesarios que den soporte a la construcción del aprendizaje. Es aquí donde las hojas de actividades y software Cabri juegan un papel importante para que el alumno construya su conocimiento.

El diseño de las actividades y el ambiente computacional Cabri, se sustenta con la teoría constructorista y el ambiente de micromundo de Papert.

### **La idea de micromundo de Papert con más apego a la realidad, (Hoyles & Noss 1987).**

Estos autores llevaron la idea del micromundo más lejos al considerar también la *situación didáctica* en la que la interacción se lleva a cabo. Dichos investigadores consideran que la definición de micromundo debe tomar en cuenta los siguientes elementos: estudiantes; maestros; el entorno tanto social como físico en los que las actividades se llevan a cabo; y la actividad como algo que depende de las experiencias pasadas e intuiciones del estudiante, y de las metas y experiencias del profesor.

Hoyles y Noss,(1987) define entonces a un micromundo como formado por los siguientes cuatro componentes:

- El componente del estudiante: que involucra los entendimientos y concepciones parciales existentes que el alumno trae consigo a la situación didáctica.
- El componente técnico: formado por el software o lenguaje programación, y un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representación para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual.
- El componente pedagógico: todas las intervenciones didácticas que se llevan a cabo las actividades de programación; y
- El componente contextual: el entorno social de las actividades.

La teoría de Hoyles y Noss, sustenta el diseño del modelo de las hojas de actividades y del modelo del plan de clases (que es el modelo del Proyecto EMAT), aplicado en la momento de la observación directa.

## **MÉTODO**

Se toman como antecedentes los trabajos de CABRI-GÉOMÉTRE; Fritzler, 1998, Yábar, 2000, Cabri World Montral, 2002, que no hablan precisamente de estudios de casos, pero sí de la enseñanza de la matemática a través de este software. El presente estudio tiene como marco general el macro proyecto EMAT (SEP – ILCE) y “El Proyecto de Grupo CONACYT “La Incorporación de Nuevas Tecnologías a la Cultura Escolar(1999)”, desarrollado por CINVESTAV, SEP - CONACYT.

Para cumplir con el objetivo de esta investigación, se dividió el trabajo en cinco fases, que facilitaron las actividades de campo y son: Primera fase: Cuestionario inicial y Entrevistas individuales. Segunda fase: Selección de los alumnos para el estudio de casos. Tercera fase: Etapa experimental (trabajo de las hojas de actividades con el software Cabri). Cuarta fase:

Cuestionario Final y Entrevista individuales. Quinta fase: Análisis e interpretación de los resultados y análisis de las categorías.

### **Combinando métodos**

Después del seguimiento realizado al proyecto a gran escala de EMAT con procesos estadísticos, llevado a cabo en diferentes partes de la república Mexicana, se pretende hacer una extensión a este proyecto, combinándolo con un estudio de casos de tres alumnos, los cuales se escogieron entre 38 estudiantes por sus diferentes rendimientos escolares anterior a este proyecto y por sus resultados obtenidos en el cuestionario inicial. Adán por su alto rendimiento escolar, Victoria un rendimiento medio y Maribel bajo rendimiento, ellos son de segundo grado de una Escuela Secundaria Técnica, en el municipio de Ecatepec, Estado de México. A los tres se les aplicó, un cuestionarios y entrevista exploratoria antes y después de trabajar con las hojas de actividades, para investigar en detalle el desarrollo de las nociones básicas de la Geometría Euclidiana cuando interactúan con el ambiente CABRI-GÉOMÉTRE, utilizando actividades de geometría, previamente diseñadas. En esta investigación se trató de introducir innovaciones educativas para iniciar al alumno en las prácticas escolares en el aula de matemáticas. Para ello se recurrió al uso del software par la enseñanza de la geometría.

El esquema metodológico usado en esta investigación contempla como primer instrumento, la aplicación de un *cuestionario exploratorio* (evaluación diagnóstica) para indagar las nociones básicas de la Geometría Euclidiana a 38 estudiantes de segundo grado de secundaria. El cuestionario estuvo conformado por 10 problemas, con tareas muy específicas de geometría, las cuales fueron estructuradas bajo el enfoque de la resolución de problemas promovida en el currículum de la SEP en 1993.

El segundo instrumento del estudio fue la *observación directa* en el aula, donde el investigador es el maestro frente a grupo, implementando un plan de clases para observar que las hojas de actividades prediseñadas para el software Cabri cumplieran con su objetivo. La finalidad de este instrumento, era observar el avance y dificultades que presentaban los alumnos con las nociones de Geometría al momento de estar resolviendo las hojas de actividades en el instante de estar interactuando con la herramienta CABRI-GÉOMÉTRE.

El plan de clases consistió en trabajar con CABRI-GÉOMÉTRE las hojas de actividades proporcionadas a cada alumno, en cada sesión con una duración de 50 minutos. En esta fase experimental el alumno inicia el trabajo con el software. Durante la sesión se permitía la intervención oportuna del maestro investigador, de una forma pertinente para que los alumno construyeran sus conocimientos, haciendo preguntas o consultando al experto sobre alguna dificultad. Este tipo de interacción también la podía hacer con sus compañeros de equipo.

El diseño de las hojas de actividades para la enseñanza de la Geometría con el ambiente computacional Cabri, fue elaborado conforme al currículum respectivo del segundo año de secundaria de la SEP y bajo del marco teórico del micromundo de Papert, creando un ambiente al alumno que le permita realizar el trabajo exploratorio bajo la teoría constructorista de los conceptos geométricos y la actualización de las actividades se efectuaron con apoyo en al teoría de Hoyles y Noss, además con un modelo de aprendizaje colaborativo; es decir, la libre exploración no fue individual, sino que se agruparon en equipos de dos alumnos por computadora, donde ambos interactuaron, enriqueciendo sus

experiencias. En este modelo, el papel del maestro siguió siendo prioritario, ya que su participación fue constante para que la interacción se diera positivamente y resaltara su naturaleza sociocultural, y es en esta parte de la metodología donde se pretende implementar un modelo de corte vigotskyano (Wertsch, 1993).

El tercer instrumento fue la *entrevista*. Se aplicó en dos momentos del estudio: la primera fue después del cuestionario inicial, haciendo exploraciones individuales a los tres alumnos, con la finalidad de determinar detalladamente cuáles eran las dificultades más fuertes en las nociones básicas de la Geometría Euclidiana y además para determinar el nivel de construcción de estos conceptos al estilo de la escala de Van Hiele. La segunda entrevista fue aplicada después del cuestionario final, también con exploraciones individuales, con la finalidad de determinar el avance que tuvieron los alumnos en las nociones básicas de la Geometría Euclidiana, después de haber trabajado con las hojas de actividades con la ayuda del software CABRI. En estas dos fases se usó la video grabación, para registrar el desempeño de los tres alumnos del estudio de casos.

El último instrumento que se utilizó fue el *cuestionario final*; el mismo que el cuestionario inicial, excepto que se le agregaron dos problemas más, con la finalidad de determinar el avance que tuvo el grupo con respecto a su etapa inicial, observando el nivel de construcción de los conceptos de Geometría Euclidiana en ese momento.

Para finalizar este estudio de campo, se llevará a cabo el análisis e interpretación de los protocolos de entrevistas, para analizar la construcción de los conceptos geométricos, en los tres casos. Finalmente se elabora el reporte de dicho análisis, en términos de los propósitos teóricos del estudio. La idea en esta parte de la metodología es construir el marco de análisis, desde el punto de vista de la Geometría Dinámica bajo el fundamento teórico de Balacheff y Kaput. Esta etapa se encuentra en proceso.

### **Validación del estudio**

La confrontación y la organización de los instrumentos metodológicos, obliga a ciertos procedimientos para la validación de la investigación con observaciones cruzadas. Aunque se les da, prioridad a los cuestionarios, la observación directa y las entrevistas, que juegan un papel importante para que la validación se dé por medio de una triangulación de todas las situaciones, cuyo contenidos geométricos fueran comunes y constatar por este medio los rasgos fundamentales de los casos.

### **Notas finales**

Actualmente nos encontramos al principio de la etapa de análisis de los resultados obtenidos en los diferentes instrumentos metodológicos, por lo que las conclusiones serán posteriores a esta etapa y en estas notas finales simplemente reporto los resultados previos al análisis.

Para empezar la fase experimental con CABRI, se inició con una etapa introductoria, que permitió a los alumnos conocer las diferentes funciones del programa computacional, realizando ejercicios de Geometría a través de las diferentes primitivas y a la vez para que fueran conociendo las funciones del menú principal del software. Tanto en esta etapa como en los resultados de los cuestionarios y entrevista, los alumnos encontraban gran dificultad con los conceptos básicos de la Geometría Euclidiana como: segmento, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, polígono regular e irregular.

En el cuestionario inicial manifestaron tener problemas para reconocer los símbolos como, triángulo ( $\Delta$ ) y ángulo ( $\sphericalangle$ ) además no pudieron identificar el ángulo por la secuencia de las letras ( $\sphericalangle$  ABC). También tuvieron dificultades para determinar: la altura de un triángulo, una mediatriz, la simetría, la escala, el área de una figura, el perímetro de una figura no convencional, entre cinco figuras determinar cuál no era un cuadrilátero, tan poco pudieron identificar el radio de un círculo. Estas dificultades conceptuales se manifestaron de una forma general en el grupo de estudio conformado por 38 alumnos de segundo grado de secundaria.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). "Computer-based learning Environment in Mathematics" in A.J. Bishop et al (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 469-501.
- Balacheff, N & Sutherland, R. (1994). "Epistemological Domain of Validity of Microworlds: the case of Logo and Cabri-géomètre" in E R. Lewis & p. Mendelsohn (eds) *Lessons from learning*, North-Holland/ Elsevier Science, Ámsterdam, IFIP Transactions A46, pp. 137-150.
- Bisquerra, R. (1989). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Ediciones CEAC, S.A. Barcelona. España.
- Hoyles, C. & Noss, R. (1987), "*Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a LOGO-based school mathematics*. Education around the World, Volume 3, University of Chicago Press.
- Paper, S. (1993), *The Children's Machine, Basic*, New York.
- Paper, S. (1987), "Microworlds: Transforming Education", in R. W. & Yasdani, M. (eds.). *Artificial Intelligence and Education*, Volumen 1: Learning Environments and Tutoring Systems, Ablex, Norwood, NJ, USA.
- Paper, S. (1981), *Desafío a la mente*. Galápagos. Buenos Aires, Argentina.
- Proyecto EMAT(1998-2003). Proyecto de Grupo CONACYT "*La Incorporación de Nuevas Tecnologías a la cultura escolar. La enseñanza de las ciencias y las matemáticas en la escuela secundaria*". México. D.F. Número de referencia. G263385.
- Ursini, L. S. y Orendain, T. M. (2000), *Geometría Dinámica*. Proyecto EMAT. Secretaría de Educación Pública. México.
- Van Hiele, P. PM. (1957). *El problema de la comprensión* (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (traducción al español de 1991).
- Vigotsky, L.S. (1978). *Mind in Society. The development of higher Psychological Processes*. Harvard University Press. USA. pp. 86- 90.
- Yábar, J. M. (2000). *El constructivismo en la práctica. La computadora en la enseñanza secundaria dentro de un enfoque constructivista del aprendizaje*. Ed. Grao Edición. España. pp. 133-142.
- Wertsch, J. (1993), *Voices of the Mind: A Sociocultural Approach Action*, Harvester. London.