EL APRENDIZAJE DESARROLLADOR COMO MARCO TEÓRICO PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES, EN EL NIVEL PREUNIVERSITARIO.

Mario Armando Gómez Hernández.

Instituto Superior Pedagógico "Rubén Martínez Villena" de La Habana. Cuba

ispvillena@rimed.cu

RESUMEN:

En las investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes, en los contenidos matemáticos de la escuela media, se ha podido determinar que muchas veces los alumnos poseen ciertos conocimientos y lo pueden usar solamente en situaciones formales o dirigidas. Sin embargo, este conocimiento no aparece cuando el contexto incluye mayores exigencias como la solución, en general, de un determinado problema.

Las propuestas teóricas para erradicar las deficiencias en el aprendizaje, que actualmente tienen los estudiantes, potencia como objetivo la apropiación activa y creadora de los conocimientos, que el proceso propicie el desarrollo de su autoperfeccionamiento constante, su autonomía y reflexión, y que el alumno ocupe el papel protagónico que le corresponde en el proceso de apropiación y aplicación de los conocimientos.

En este trabajo se muestra cómo es posible a través de un "aprendizaje desarrollador" de las funciones en el preuniversitario, lograr que los estudiantes pueden transferir los conocimientos aprendidos en estos contenidos a la solución de ejercicios y problemas, tanto de las otras asignaturas del currículo escolar, como vinculados a su vida cotidiana.

El marco teórico y metodológico en el que se fundamenta la propuesta es el Enfoque Histórico-Cultural, en lo relativo a la estructuración del conocimiento y a la resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las funciones reales de variable real en los currículos escolares es una herencia de la llamada "Matemática Moderna", introducida en Cuba en la década del 70 del siglo pasado; actualmente estos contenidos forman parte de los programas de Matemáticas de casi todos los países iberoamericanos - para muchos especialistas este es el concepto más importante del nivel preuniversitario en la enseñanza de la Matemática-. En su aprendizaje se han podido constatar múltiples deficiencias, algunas de las cuales tienen carácter general y son aplicables a cualquier contenido matemático; otras constituyen singularidades específicas de este complejo de materia.

Una evidencia de la situación que existía en Cuba con el estudio de este concepto, se pone de manifiesto en un análisis realizado por especialistas del Ministerio de Educación de este país sobre las características de la enseñanza de la Matemática, hasta la primera mitad del siglo XX, donde se plantea que "la resolución de ecuaciones se realizaba de una forma mecánica, utilizando procedimientos que enmascaraban la esencia del proceso y el concepto se impartía completamente desvinculado de otros temas, íntimamente relacionados a éste, en particular el de función"(Campistrous, 1984).

A partir de 1976 se introduce, en Cuba, la metodología de la enseñanza de la Matemática, basada en experiencias de la antigua República Democrática Alemana, donde se da un cambio radical en el tratamiento de los conceptos función y ecuación, pues se logra familiarizar, desde edades tempranas al escolar con las correspondencias y las igualdades con una o más variables, y se establecen las llamadas "Líneas Rectoras o Directrices" de la enseñanza de la Matemática, lo que trae consigo un trabajo sistemático[1] en cada una de las unidades de los diferentes grados de la Educación Primaria, formándose las bases para en la Enseñanza Media, definirlos de una manera rigurosa.

[1] Campistrous, Luis. Seminario Nacional a Dirigentes y Metodólogos del MINED. Ediciones del MINED. La Habana, 1984.

Sin embargo en la práctica se demostró que este currículo, para la enseñanza de la Matemática, no era el adecuado en correspondencia con las condiciones histórico culturales de nuestro país, los intereses económicos, y la preparación de maestros y profesores para enfrentar dichos programas escolares, lo cual tuvo como resultado la poca solidez en el aprendizaje de los escolares. Tales dificultades, entre otras, determinaron que se confeccionaran libros de textos y orientaciones metodológicas para la enseñanza de la Matemática, aprovechando las experiencias acumuladas por docentes de nuestro país.

Las principales características en los nuevos documentos, en relación con lo que anteriormente existía, respecto a los complejos de materias ecuaciones y funciones, fueron:

1. El estudio de las funciones potenciales fue trasladado del grado 9^{no} al 10^{mo} de la enseñanza general media.
2. El tratamiento del concepto función se mantuvo en 8^{vo} grado como correspondencia entre conjuntos, y en 10^{mo} grado como conjunto de pares ordenados.
3. El estudio en el nivel secundario de las ecuaciones de segundo grado antes de las funciones cuadráticas, por la posibilidad que ofrece de combinar el cálculo analítico de ceros, con la obtención de la gráfica.
4. Se desarrolló un algoritmo de discusión de la función cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$, $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ y } c \in \mathbb{R})$, donde se tomaron como aspectos principales: ceros (si existen), vértice, eje de simetría, así como el ploteo de puntos y sus simétricos con respecto a dicho eje.
5. Se imparten todas las ecuaciones antes que las funciones correspondientes según el tipo de cada una de ellas, es decir se calculan imágenes y después se estudian las funciones correspondientes.
6. Algunas propiedades ligadas a las funciones tales como monotonía, extremos, y ceros no se definen explícitamente para todas las clases de funciones, sino que se tratan de formar de una manera intuitiva.

A partir del curso 99/2000, se introdujeron modificaciones en los programas del nivel secundario, lo que trajo por consecuencia cambios en el currículo de la asignatura en el preuniversitario, a partir del siguiente curso escolar. Como consecuencia de esto, sólo se imparten en el nivel secundario las funciones y ecuaciones afines, en el dominio de los números reales, y se deja para el preuniversitario la enseñanza de todas las demás clases de ecuaciones y funciones. Sin embargo, a pesar de estos cambios curriculares, los conocimientos de los estudiantes no son sólidos, y lo que es más grave, los alumnos son incapaces de transferir lo discutido en el salón de clases a situaciones más abiertas como resolver problemas vinculados con la utilización de gráficos, y de relacionar estos con las propiedades de las funciones correspondientes.

DESARROLLO

En los trabajos de constatación de la investigación, para determinar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las funciones en el nivel preuniversitario, se ha podido precisar que estas dependen de múltiples factores, pero fundamentalmente de la creencia que tienen los profesores acerca de qué es la matemática, cómo enseñarla y para qué se aprenden estos contenidos en la escuela. Los resultados obtenidos apuntan hacia las afirmaciones siguientes, que caracterizan el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos contenidos en el preuniversitario.

- El papel protagónico lo juega el profesor, este trasmite conocimientos sin propiciar la búsqueda de estos por los estudiantes, lo que limita considerablemente la posibilidad de los alumnos para transferir estos conocimientos a otros contextos.
- Los alumnos tienen tendencia a la ejecución inmediata, si el ejercicio o problema hay que pensarlo más de 3 minutos renuncian a su solución, consideran no estar preparados para esa tarea.
- Creencia de los profesores sobre lo que significa saber Matemáticas, esto trae por consecuencia que sólo se debe enseñar lo que "explícitamente va a prueba de ingreso a la Educación Superior", y que predomine un tipo de instrucción que renuncia tácitamente a la teoría y absolutiza la resolución de ejercicios como única vía de aprendizaje de esta ciencia.
- Formalismo en la enseñanza de la Matemática, manifestado en el divorcio evidente que existe entre contenido y forma, o entre sintaxis y semántica en la enseñanza de estos contenidos, lo que repercute en su asimilación y la posibilidad posterior de aplicar los conocimientos a situaciones no discutidas en el salón de clases.
- No se domina el trabajo sistemático con el diagnóstico, y en los casos que este se realiza es formal, no se le da seguimiento y no constituye un instrumento de trabajo que permita armonizar la relación diagnóstico-pronóstico-resultados.
- Se imparten y evalúan sólo los contenidos del grado, y por lo tanto no se materializa el principio de la sistematicidad de los conocimientos.
- Las clases de ejercitación, que representan más del 80% de los programas de estudio, no son variadas de manera tal que incluyan ejercicios sin solución, con varias soluciones y con soluciones únicas, y el trabajo independiente dentro de este tipo de clases es prácticamente nulo, pues la intervención continua del profesor no lo permite.

Cabe preguntarse entonces si los contenidos que aparecen en el currículo son los que realmente necesitan los estudiantes para el desarrollo profesional o social, o si el problema radica en cómo se produce el proceso de aprendizaje. Esto ha motivado la investigación de nuevas dimensiones, es decir no sólo centrarse en lo que se debe estudiar, y cómo enseñarlo, sino en la forma en que se debe producir el aprendizaje.

En referencia a lo anterior (Greeno ,1991) afirma: “aprender el domino [*Matemáticas*] es semejante a aprender a vivir en un ambiente determinado, es aprender a moverse alrededor del medio, saber qué recursos son disponibles, y aprender a usar tales recursos al conducir actividades propias en forma productiva y placentera.”

El criterio actual en la didáctica de la Matemática es que los estudiantes pueden haber recibido un determinado contenido; pero si no son capaces de usar el conocimiento disponible, es decir, conceptos, teoremas, procedimientos y habilidades en la solución de nuevos problemas o situaciones anticipadas, entonces el contenido de referencia no ha sido “aprendido”, con lo que se destaca la importancia de la transferencia y la flexibilidad en el uso de estrategias para el aprendizaje de las Matemáticas. (Schoenfeld ,1994) sugiere que “para caracterizar lo que un estudiante sabe acerca de la Matemática, se debe poner atención a lo que ese estudiante puede hacer matemáticamente y no pedirle que recite un inventario de hechos y procedimientos.”

Por lo tanto, la enseñanza formal que predomina en nuestras aulas constituye un obstáculo para que los alumnos puedan aplicar los conocimientos aprendidos a situaciones no discutidas en el salón de clases, esto significa que es necesario lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador que facilite la comprensión y aplicación de los conocimientos a la solución de problemas en diferentes contextos.

El concepto “aprendizaje desarrollador”, es una teoría didáctica que ha sido desarrollada sistemáticamente en Cuba por el Dr. José Zilberstein Toruncha, la Dra. Margarita Silvestre y otros pedagogos.

Este proyecto, basado precisamente en la teoría del aprendizaje desarrollador, se caracteriza por que:

1. Centra su atención en el docente y en el alumno, por lo que su objeto de estudio lo constituye el proceso de enseñanza y aprendizaje.
2. Considera la dirección científica por parte del maestro de la actividad cognoscitiva, práctica y valorativa de los alumnos, teniendo en cuenta el nivel de desarrollo alcanzado por estos y sus potencialidades para lograrlo.
3. Asume que mediante procesos de socialización y comunicación se propicia la independencia cognoscitiva y la apropiación del contenido de enseñanza (conocimientos, habilidades, valores)
4. Garantiza que con su aplicación se forma un pensamiento reflexivo y creativo que permite al alumno “llegar a la esencia”, establecer nexos y relaciones, así como aplicar el contenido aprendido a la práctica social, de modo tal que solucione problemas no sólo del ámbito escolar, sino también familiar y de la sociedad en general.
5. Propicia la valoración personal de lo que se estudia, de modo que el contenido adquiera sentido y el alumno este interiorice su significado.
6. Estimula el desarrollo de estrategias que permiten regular los modos de pensar y actuar, que contribuyan a la formación de acciones de orientación, planificación valoración y control.

Ante la situación descrita y el interés que existe, tanto en Cuba como en el extranjero, por elevar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se toman diferentes alternativas didácticas que puedan contrarrestar las dificultades existentes, en este caso particular se diseñó y realizó un proyecto investigativo, cuya base teórica lo constituye el “aprendizaje desarrollador”, y que permitió experimentar las concepciones siguientes.

1. Para las funciones lineales (en Cuba se le llama así a las que en otros países se consideran afines), cuadráticas, fraccionarias y con radicales se discuten primero las ecuaciones y después las funciones correspondientes; pero para las funciones trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas), se invierte el orden, es decir, primero cada clase de funciones y después las ecuaciones correspondientes. En la totalidad de los currículos escolares de Iberoamérica el orden es funciones y después ecuaciones, excepto en Cuba, que es ecuaciones y después funciones

2. Las funciones lineales son discutidas en el salón de clases con todo el tiempo necesario a partir de un conjunto de actividades que se considera “minimal”, para su aprendizaje.
3. Se mantiene como invariante metodológica el conjunto “minimal” de actividades, para el aprendizaje de las restantes clases de funciones, y a partir de los cambios que es necesario introducir o no para el aprendizaje de las propiedades de las diferentes clases de funciones, se problematiza el contenido.
4. Se introduce cierta flexibilidad en el trazado de las gráficas a partir de la ecuación funcional y viceversa.
5. Se cambia sistemáticamente el uso de las variables que intervienen en la ecuación funcional, pues en la creencia de muchos estudiantes se mantiene el criterio que si no hay “x” y “y”, entonces la ecuación funcional no es una función.
6. Se aplica de manera continua el principio de la sistematización de los conocimientos matemáticos, lo que posibilita mantener activo en los alumnos el dominio de los contenidos que constituyen núcleos básicos, en el nivel preuniversitario.
7. La dirección del proceso de aprendizaje por parte del maestro se realiza a partir del diálogo heurístico, con la aplicación de las técnicas para formular preguntas.

Para finalizar, y con el objetivo de que se tenga una idea más clara de los resultados obtenidos, se mostrarán las estrategias seguidas en el proyecto, para que los alumnos pudieran transferir la definición de cero, que sobre funciones lineales ya poseen a la función *g* con $g(x) = sen\ x$.

ACTIVIDADES

Se les pregunta a los alumnos el concepto de “cero” de una función lineal. Estos deben responder que “si *f* con $f(x) = mx + n$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, es una función lineal, entonces x_o, es un cero de *f* si y sólo si $f(x_o) = 0$”.

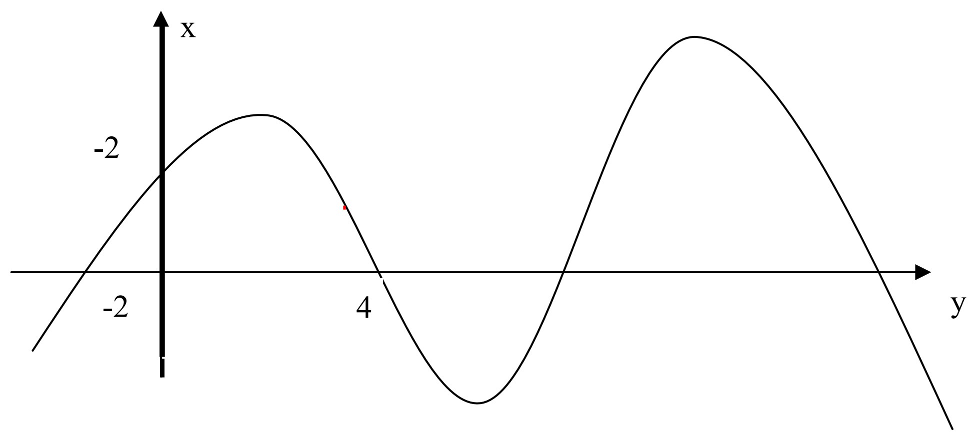
1.- ¿Cómo se puede hallar este valor?

La respuesta de los estudiantes debe ser $mx + n = 0$ de donde, $x = -\frac{n}{m}$. Con esto se concluye que el procedimiento es igualar la ecuación funcional a 0, pues los pares que pertenecen a la función tienen la forma (x;0).

2.- Se le pide a los alumnos que explican por qué las funciones lineales tienen a lo sumo, sólo un cero.

3.- Se propone a continuación el siguiente ejercicio con el objetivo de transferir el concepto de cero a cualquier gráfico.

“En el gráfico siguiente determine las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados señalados”



Obsérvese que hay puntos cuya segunda componente en el par es 0, hay otros que no; pero hay también puntos para los cuales no existe información que permita determinar sus coordenadas. También que el eje vertical es "x", y el horizontal es "y". Este tipo de actividad permite desarrollar el pensamiento "flexible y divergente" de los estudiantes.

4.- La discusión a partir del protagonismo de los estudiantes debe aportar la definición de cero, y el procedimiento de cálculo por reflexiones sobre el contenido para su determinación.

5. La evaluación del proceso permitirá a los alumnos valorar si el concepto de cero, para la función seno se adecua al concepto que se tenía para las funciones lineales, o si es necesario transformarlo.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos son alentadores pues se ha logrado una mayor independencia cognoscitiva por parte de los estudiantes y que ellos ocupen el papel protagónico que les corresponde en el proceso de aprendizaje.

Las principales dificultades del proyecto radican fundamentalmente en que todavía hay estudiantes desmotivados, así como la resistencia de algunos profesores para producir el cambio en los estilos de enseñanza, y el tiempo real de preparación de los docentes y alumnos para la búsqueda de información en el cumplimiento de las diferentes tareas docentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Campistrous, L. (2002). Didáctica y resolución de problemas. En *Memorias del II Congreso Internacional "Didácticas de las Ciencias"*, Cuba.

Campistrous, L. (1984). *Seminario Nacional a Dirigentes y Metodólogos del MINED. Ediciones del MINED*. La Habana.

Crespo, C. & Ponteville, Ch. (2002). "El concepto de función: su comprensión y análisis" en Delgado, J.R. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 16. Tomo I. Ciudad de La Habana, Cuba.

Santos, L. M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. Ciudad de México.

Zilberstein, J. (2002). *Aprendizaje desarrollador*. Editado por el IPLAC. La Habana.