

The background features a collage of mathematical content. On the left, there are several integral formulas:  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}| + C$ , and  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}| + C$ . In the center, there is a coordinate system with points  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , and  $C(x, y)$ , and a line segment  $AB$ . On the right, there is a diagram of a cone with height  $H$  and radius  $r$ .

# El significado del objeto personal función en las prácticas operativas y discursivas de estudiantes universitarios

The background features a collage of mathematical content. On the left, there is a diagram of a pyramid with vertices  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$  and a base  $ABCD$ . In the center, there are trigonometric formulas:  $x = p \cos \varphi$ ,  $y = p \sin \varphi$ ,  $|z| = p$ , and  $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ . On the right, there is a diagram of a cylinder with height  $h$  and radius  $r$ , and a volume formula:  $V = \pi r^2 h$ ,  $4r^2 + h^2 = 60$ ,  $r^2 = \frac{60 - h^2}{4}$ ,  $V = f(h) = \pi h \frac{60 - h^2}{4}$ , and  $h = 4$ .

Ana Beatriz Ramos P

# **El significado del objeto personal función en las prácticas operativas y discursivas de estudiantes universitarios**

## **Introducción**

Es lugar común, entre los docentes de la Cátedra “Introducción a la Matemática”, emitir comentarios referidos a la crisis conceptual, en cuanto al conocimiento sobre las funciones que expresa el alumnado en la unidad curricular referida a dicho contenido temático.

Los profesores suelen realizar expresiones de asombro sobre la pobreza conceptual que manipulan sus alumnos.

Al respecto dicen: “Los alumnos de la facultad como que viven en otro mundo, pues yo les explico y formulo el concepto en estos términos y, ellos escriben en sus respuestas, tal cantidad de barbaridades”.

Lo que está sucediendo como se observa en el comentario anterior, no es que el alumnado viva en otro mundo, lo que realmente sucede, es que hay una fisura, una brecha, que es importante disipar, entre el significado del objeto matemático introducido por el docente y el nuevo significado del objeto personal construido por el alumno.

En la medida que se pueda entender esta brecha y el porqué de la misma, será posible acercar el significado institucional pretendido e implementado al significado personal del alumnado.

## **Objeto personal e institucional**

Ahora bien, ¿qué se entiende por objeto personal y objeto institucional? En el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) se adopta un cierto pragmatismo puesto que se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado.

Dada su importancia, es necesario intentar precisar lo que se entiende por práctica. Una primera definición de práctica, en sentido amplio, es la siguiente: manipulación de ostensivos y del pensamiento que la acompaña. Las prácticas como las que se realizan en una institución escolar tienen un componente público (hay manipulación de ostensivos y, por tanto, observables) y un componente privado (manipulación de representaciones mentales no ostensivas y no observables). Si bien, en teoría, podríamos considerar prácticas que sólo tienen un componente -por ejemplo la manipulación inconsciente de ostensivos, o bien una persona que sólo piensa- lo normal es que dichas prácticas incorporen estos dos componentes. Aunque esta definición de práctica es muy general, cuando la contextualizamos en la actividad matemática permite definir las prácticas matemáticas de la manera siguiente (Godino y Batanero, 1994): "Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 334).

### Los objetos personales

La relación que hay entre las prácticas y los problemas que las suscitan lleva a considerar que lo que hay entre el estímulo -campo de problemas- y la respuesta -sistema de prácticas- no es una caja negra; muy al contrario, es en este lapso donde tiene lugar el proceso nada mecánico de simbolización por el que las experiencias se codifican significativamente, se procesan como signos, y éstos se manipulan y combinan, siguiendo reglas y métodos elaborados al efecto, para dar lugar a objetos matemáticos personales que, según Godino y Batanero (1994), son: "*emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas*"(p. 335). Estos objetos personales van cobrando forma -van emergiendo- en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

Es conveniente efectuar algunas matizaciones sobre el objeto personal. En primer lugar, un objeto personal es algo de lo que se tiene conciencia subjetiva. El hecho de que los individuos pueden hablar sobre sus objetos personales (realizar prácticas discursivas sobre los mismos), conduce a una vía de investigación en Didáctica de las Matemáticas de gran relevancia. Por otra parte, un objeto personal implica la generación, por medio de la intersubjetividad que facilita la clase de Matemáticas, de una regla de comportamiento en el sujeto. Es esta última dimensión, que se conoce con la denominación de máxima pragmática, la que se toma en consideración en Godino y Batanero (1994) para definir el significado de

un objeto personal  $O_p$ : *"Es el sistema de prácticas personales de una persona  $p$  para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto  $O_p$  en un momento dado"* (p. 341). Según tal definición, el objeto personal supone haber establecido una conexión entre acciones potenciales y fines, conexión que es inteligente y, por tanto, está mediada simbólicamente.

Asimismo conviene observar que, dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y también en aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares, dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. El hecho de considerar el objeto personal como un "emergente" y su significado de manera "holística" hacen que lo que realmente es relevante, es la existencia de prácticas (significativas) realizadas por el sujeto en las que interviene alguna representación del objeto. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen a lo largo de una interacción en el marco de una institución escolar. De lo dicho antes se podría pensar que la relación entre el objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante para su realización se considera una relación de causa-efecto en la que el objeto personal sería la causa eficiente (dicho en términos aristotélicos). Contrario a este punto de vista, se considera conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha. Puesto que para realizar una práctica primero hay que valorar y decidir lo que va a hacer, después se tiene que decidir qué acción es la más indicada y, por último, se ha de mantener la acción desde el inicio hasta el final.

### **Objetos institucionales**

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el sujeto en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tienen también un carácter colectivo, por tanto cualquier análisis que los abordara desde uno solo de estos aspectos resultaría reduccionista. Por este motivo en el EOS (Godino y Batanero, 1994) se introducen las instituciones, los objetos institucionales y los significados institucionales. Para Godino y Batanero una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas

prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Con relación al objeto institucional interesa resaltar los siguientes aspectos: (1) Las personas distinguen entre sus objetos personales y los objetos institucionales. Cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona, mientras que cuando hablan de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona. (2) Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. En Godino y Batanero (1994) también se recurre a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional  $O_I$ : "*Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge  $O_I$  en un momento dado*" (p. 340).

Para el EOS, la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, lo que, obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos. Para El EOS la relación entre los significados de los objetos personales y los institucionales hay que pensarla básicamente en términos de "ajuste". Se pretende que el significado de los objetos personales se ajuste lo más posible al significado de los objetos institucionales. Esta relación de ajuste es la que subyace (y por tanto posibilita) en "la evaluación de los conocimientos de los alumnos".

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en el EOS se consideran diferentes tipos de significados institucionales y personales: (1) *Significado institucional de referencia*, cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas"; acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas histórico-epistemológico-didáctico que se designa como significado institucional de referencia del objeto. (2) *Significado institucional pretendido*, sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional. (3) *Significado institucional implementado*, sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes. (4) *Significado institucional evaluado*, colección de tareas o

cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes.

## **Objetivos de la investigación**

### **Objetivo General:**

Analizar el objeto matemático personal función que se manifiestan en las prácticas operativas y discursivas de los alumnos cursantes de la asignatura “Introducción a la Matemática”

### **Objetivos específicos:**

1 Diseñar un instrumento para recopilar y categorizar el objeto personal matemático función que utilizan los alumnos en sus prácticas cuando validan el significado de su objeto matemático personal función.

2 Analizar las respuestas recopiladas en el instrumento para entender el significado del objeto matemático personal de función presente en el alumnado de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo.

## **Metodología**

La metodología utilizada para esta investigación se ubica dentro del modelo cualitativo, estudio de casos. Por otra parte, se le considera una investigación de campo a nivel descriptivo, puesto que proporciona una perspectiva completa para la recogida de datos y el posterior análisis de la información. También es semiótica pues estudia los significados de los objetos personales. Las características metodológicas se enmarcan dentro de una investigación de campo, ya que, según Cerda (2000) “se realizan en contacto directo con la comunidad, grupo o personas que son motivo de estudios (...) Prácticamente todo el proceso de recolección de datos a nivel social” (p.232). El nivel es descriptivo porque describe las características y detección de regularidades empíricas que se presentan en el fenómeno estudiado.

## **Instrumento para la recogida de la información aplicado al alumnado de la Cátedra**

Se elaboró un cuestionario constituido por seis (6) ítems. Los dos primeros ítems fueron seleccionados, con algunas variantes del estudio realizado por Ruiz Higuera (2000), quién a su vez realiza una selección de las investigaciones de Vinner y Dreyfus (1989) y Tall y Bakar (1992), de ejercicios y problemas incluidos en libros y planes de estudios. La investigadora consideró de vital importancia colocar un ítem que recopilase lo que los estudiantes entendían por función. Por ello, se le agrega una pregunta referida a la definición de función y se les solicita que introduzcan un ejemplo libre, concretamente se trata de la interrogante N° 3. Otras de las interrogantes tomadas en consideración en el cuestionario fueron los últimos tres ítems tomados y modificados del texto de Bujosa, Canadilla y Font (1997), el cual nos fue de mucha utilidad para otro aspecto de la investigación que por razones de espacio no analizamos en este artículo. Es importante aclarar que en este capítulo sólo se ha tomado el análisis de las tres primeras interrogantes.

Una vez aplicados los cuestionarios, se pasa a la revisión de los mismos. Por cada interrogante y según las respuestas se construyen unas categorías que permiten ir colocando las respuestas para abordar al final el significado del objeto personal función.

## **Características del cuestionario aplicado al alumnado para realizar una revisión del objeto personal función**

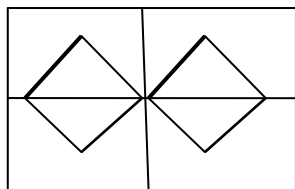
El cuestionario aplicado a los alumnos(as) fue construido en correspondencia con el programa de la asignatura. Consta de seis (6) ítems, de los cuales solo mostraré los tres primeros, que son los que vamos a analizar en este resumen de investigación. Dichos ítems se han distribuidos de la siguiente forma:

- Ítem número 1: contiene cuatro (4) gráficas para que los alumnos argumente en cada caso si es o no una función y el por qué de su respuesta.
- Ítem número 2: se presentan cinco expresiones algebraicas; en cada caso, debe argumentar si se trata de una función o no.
- Ítem número 3: esbozar según los conocimientos adquiridos la definición de función real y colocar un ejemplo, libre. Explicando el por qué de su respuesta.

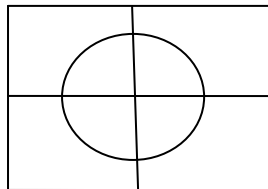
## Cuestionario

1. Te presentamos a continuación varias figuras. Debes decir, para cada una de ellas si se trata o no de la representación gráfica de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

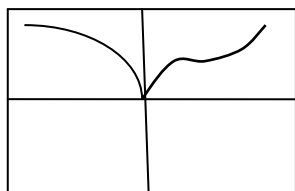
1A



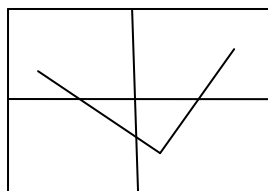
1B



1C



1D



2. Te presentamos varias expresiones algebraicas. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

$$2A) \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \in \mathbb{R}, x \leq 4 \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}, 4 < x < 6 \\ 2 & \text{si } x \in \mathbb{R}, x \geq 6 \end{cases}$$

$$2B) \quad x^2 + y^2 = 9$$

$$2C) \quad y^2 = 2x - 4$$

$$2D) \quad y = 5$$

$$2E) \quad y = 5/x + 1$$

3. Esbozar según los conocimientos adquiridos la definición de función real y colocar un ejemplo, libre.



A continuación, se presentan las características y las categorías establecidas para analizar cada uno de los ítems del instrumento.

*Interrogante 1:* Determinación de funciones a partir de diferentes gráficos. Estos ejercicios plantean casos de relaciones-funciones o de relaciones. El alumno puede visualizar fácilmente si se trata o no de una función, con el manejo del concepto de función más cómodo o más próximo a él. Puede hacer uso, del concepto de unicidad “una única imagen para cada elemento del dominio”, o bien puede utilizar otro concepto aprendido. El objetivo es conocer en cuáles categorías de la noción de función se ubican y si, además, son consistentes en el uso posterior de dicho concepto en problemas de funciones que impliquen gráficas u otras características.

### **Categorías establecidas en torno a esta interrogante nº 1 (1A, 1B, 1C, 1D)**

1.1: *Aplicación:* En esta categoría se ubican todo aquellos alumnos que asumen, al observar una gráfica dada, que dicha gráfica es una función o no lo es, considerando ésta como una correspondencia unívoca.

1.2: *Criterio de la Recta Vertical:* En esta categoría se reúnen todos los estudiantes que justifican sus respuestas frente a una gráfica dada utilizando el criterio de la recta vertical.

1.3: *No argumenta o No Explica:* En esta categoría se ubican todos aquellos alumnos que se limitaron a sólo afirmar o negar, según el caso si era o no una función la gráfica dada.

*Interrogante 2:* Determinación de funciones a partir de diferentes expresiones algebraicas. Este problema, consta de un ejercicio para identificar funciones a través de una expresión algebraica. Los alumnos deben identificar cada caso y, además, justificar sus respuestas. Nos interesa analizar el aspecto argumentativo que encierran sus respuestas. La idea es recoger de sus argumentaciones una parte muy importante de las concepciones que poseen sobre la noción que manejan de función en ejercicios de este tipo.

### Categorías establecidas en torno a la interrogante n° 2 (2A, 2B, 2C, 2D, 2E)

2.1: *Aplicación*: En esta categoría se agrupan todos aquellos estudiantes que utilizaron el criterio de unicidad para determinar si la expresión dada es o no es una función

2.2: *Expresión Algebraica*: Cuando los alumnos basan sus respuestas utilizando la forma de la expresión algebraica; es decir compara la expresión dada con una conocida por ellos como función o no, entonces se ubican en esta categoría.

2.3: *Dominio-Imagen*: Aquí se ubicaron a todos aquellos alumnos que justificaron sus respuestas argumentando la función sobre la posibilidad de darle valores a  $x$  para que valores tome la  $y$ .

2.4: *No Responde*: En esta categoría se ubican los alumnos que sólo afirman o niegan para cada caso, si la expresión algebraica estudiada es o no es una función. También se han colocado en esta categoría todos aquellos alumnos que no responden la interrogante planteada

*Interrogante 3*: expresar el concepto de función real. Con esta interrogante se pretende ubicar el concepto de función presente en los argumentos del alumnado. La idea de la interrogante n° 3, es rastrear la noción de función que manipula el estudiantado para así precisar el concepto implícito

### Categorías establecidas en torno a la interrogante n° 3

3.1: *Función como correspondencia entre elementos de dos conjuntos*. En esta categoría se ubican todos aquellos estudiantes quienes consideran a la función como una correspondencia entre elementos de conjuntos. Definiéndose, para ello, dos conjuntos: uno, llamado de partida y, el otro, de llegada.

3.2: *Función como pares ordenados*. En esta categoría se ubican todos aquellos alumnos(as) que consideran que una función es un conjunto de pares ordenados.

3.3: *Función como una relación entre elementos del dominio y sus imágenes rango*. En esta categoría se agrupan todos aquellos alumnos que utilizan la

definición de función como la relación entre elementos del dominio y sus imágenes en el rango.

3.4: *Función como expresión de una línea en el plano cuyos elementos del dominio le corresponden una imagen en el rango.* En esta categoría se sitúan todos aquellos alumnos(as) que consideran la función como el caso particular de una línea recta.

3.5: *Función como una expresión algebraica o gráfica.* En esta categoría se agrupan todos aquellos alumnos(as) que consideran que una función se define únicamente de forma gráfica o como una expresión algebraica.

3.6: *No responde.* En esta categoría se agrupan todos aquellos alumnos(as) que no dan respuesta alguna a la interrogante planteada

## **Análisis e Interpretación de los Resultados**

### ***En cuanto a la interrogante 1:***

El alumnado responden ubicándose mayoritariamente en la categoría 1.1: Aplicación. *“Las figuras 1A y 1B no son funciones, ya que al darle un valor a x se obtienen dos imágenes en el eje de las y”.*

Un grupo minoritario de alumnos(as) (10%) se ubicó en la categoría 1.2: Recta Vertical. *No son funciones las figuras 1A – 1B, “Porque si trazas una recta vertical al eje x obtienes dos imágenes”.*

Un (20%) del alumnado se ubicó en la categoría 1.3: No Responde. Ya que, no intentan resolver la interrogante o no argumentan sus respuestas.

### ***En cuanto a la interrogante 2:***

El 40% de los alumnos ubicó sus respuestas dentro de la categoría

- 2.1: Aplicación Ejemplo: *La Expresión algebraica “2B”:  $x^2 + y^2 = 9$ , no es una función, porque dará dos valores o imágenes para un mismo valor de x.*

- El 40% de los estudiantes se ubica en la categoría Dominio-imagen, porque sus respuestas se establecen como una especie de ábaco; es decir, le da valores a la  $x$  para obtener valores para la  $y$ . El 10% de los alumnos ubicó sus respuestas dentro de la categoría:
- 2.2 Expresión Algebraica. Ejemplo: La interrogante 2E es una función pues su fórmula  $y = 5$ , es la de una función constante.
- En el 10% se agruparon todos aquellos alumnos que no explican o no argumentan sus respuestas.

### ***En cuanto a la interrogante 3:***

Aproximadamente, un tercio (30%) de las respuestas del alumnado se concentró en la definición de función, como expresión de una línea recta en el plano (Categoría 3.4.). Un 24% de las respuestas del estudiantado se concentraron en la definición de función como una expresión algebraica o gráfica (3.5).

Un 20% de las argumentaciones de los alumnos definen función como una relación entre elementos del Dominio y sus imágenes (rango). En un porcentaje del 12% se ubicaron las respuestas en torno a las argumentaciones:

- a) Correspondencia entre elementos de dos conjuntos. Ejemplo: *Una función es una correspondencia entre dos conjuntos uno de partida y otro de llegada.*
- b) No responde.

En un índice menor (2%) se concentran las respuestas en la definición de función como par ordenado ( $x, y$ ).

## **Conclusiones**

Las argumentaciones expresadas por los estudiantes a los problemas del instrumento (cuestionario), ofrecen un perfil característico de estos alumnos, que sirven a la postre para *analizar el objeto función* presente en el repertorio cognitivo de dicho grupo desde el punto de vista de las destrezas, uso continuado de un criterio o argumento, dificultades frente a un tipo de problema, entre otras

consideraciones. A la vez que permite medir el grado de competencia que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas no del todo rutinarios. Los resultados obtenidos nos sirven para verificar que existe una brecha entre los objetos matemáticos presentados por el docente y los objetos matemáticos creados por el estudiante.

Resulta importante destacar que la interrogante basada en la definición de una función real se exaltó como la más valiosa del estudio, la misma, permitió indagar en profundidad muchas de las dificultades que presentan los alumnos en la construcción del objeto personal función que, a simple vista, no se puede percibir. El hecho de que las argumentaciones del alumnado presentaran tantas ambigüedades permite señalar que existen grandes limitantes frente al concepto función. Las respuestas mayoritarias se concentran en la argumentación de definir la función como expresión de una línea recta en el plano (30%). Es evidente, que esta relación línea recta-función es muy marcada y presenta una dificultad importante, al momento de poder trasladar o ampliar el concepto de función, lo cual indica que existe una restricción substancial de dicho concepto.

## Referencias

- Bujosa, J., Canadilla, M. y Font, V. (1997). *Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials I*. Barcelona: Castellnou.
- Cerda, H. (2000). *Los Elementos de la Investigación*. Bogotá: El Búho.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Ruiz Higuera, L. (2000). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Tall, D. y Bakar. (1992). Students` Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, 23, 1, 39-50.
- Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

## Ana Beatriz Ramos Pereira.

Doctora por la Universidad de Barcelona (UB), España. Título de la Tesis: “Objetos Personales Matemáticos y Didácticos del Profesorado y Cambios Institucionales. El Caso de la Contextualización de las Funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales”. Magister en Educación Superior por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) y Licenciada en Educación, mención Matemática por la Universidad de Carabobo (UC). Es Profesora Titular jubilada de la Universidad de Carabobo. Entre sus publicaciones están: 1) *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales* “*Revista de Educación*”, Número 338; y, 2) *Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica*. “*La Matematica e la sua didattica*”, Anno 20, n. 4. Ha presentado trabajos en eventos nacionales e internacionales.