Investigar en pensamiento matemático avanzado

Sabrina Garbin Dall´Alba

Investigar en pensamiento matemático avanzado

Introducción

Investigar en una determinada área, como en el llamado *Pensamiento Matemático Avanzado*, requiere situarse en el conjunto de la Educación Matemática.

Comenzamos el capítulo explicitando qué se entiende por Pensamiento Matemático Avanzado y sometiendo a discusión la existencia o no de una clara división entre el Pensamiento Matemático Elemental y el Avanzado, y qué diferencias les serían atribuibles.

Presentamos brevemente algunos modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos. Y damos a conocer algunos de los aspectos que toman en cuenta ciertas investigaciones en su línea de estudio, lo cual nos permite mostrar específicamente algunas de las aportaciones y prospectivas de investigaciones realizadas desde el interés de la Didáctica del Cálculo y Análisis.

Pensamiento matemático

Desde los años 80 hay interés en la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, en la forma de cómo piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas, es decir un interés por estudiar la psicología del pensamiento matemático. Los investigadores interpretan cómo entienden las personas un contenido específico matemático, caracterizan los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos. Freudenthal, Poincaré, Hadamard, han hecho estudios de tipo introspectivos al analizar su propia actividad personal como matemáticos o Polya a través de estudiar la producción de sus alumnos. De otra forma, también se reconoce el aporte de Piaget.

Existen algunas versiones sobre cómo se interpreta el desarrollo del pensamiento matemático. Puede entenderse como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; otra visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano en múltiples tareas y en un sentido moderno, que el pensamiento matemático incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos, y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis (Cantoral y otros, 2000).

En 1986 se reunieron Gontran Ervynck y David Tall para formar un grupo de estudio sobre Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y trabajar en un libro (Tall, 1991) con el mismo nombre, consideraron las matemáticas de secundaria y las de universidad, tratando de conectarlas con la manera de pensar de los matemáticos. Es decir, desde este comienzo, estarían incluidos bajo el nombre del PMA los últimos años de la escuela secundaria hasta el pensamiento formal axiomático basado en definiciones y demostraciones. Años después, en otras publicaciones, se ha debatido el significado de la frase Pensamiento Matemático Avanzado. ¿Debería el término "avanzado" referirse a las Matemáticas o al pensamiento o a ambos? Sternberg (1996) escribió en el último capítulo de su libro sobre la naturaleza del pensamiento matemático, "no existe un acuerdo sobre que es el Pensamiento Matemático". En este capítulo consideramos ambas perspectivas, como fue la intención de los fundadores del primer grupo de estudio (Harel, Selden, y Selden, 2006).

¿Existe una clara división entre el PME y el PMA?

Por etapa elemental se entiende normalmente aquella que tiene lugar hasta Secundaria y la etapa avanzada aquella que está relacionada con la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Pero entre ambas se puede ubicar una etapa de transición, que aparece en diferentes momentos y distintas duraciones, según el País y a veces según el área de Matemática que se está enseñando.

Delimitar ambas etapas y saber reconocer dicha transición ha sido de especial interés para algunos investigadores. Tall (1991) y Dreyfus (1990, 1991), han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado, y es el mismo Tall quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental (PME) se convierte en avanzado no se ha definido con precisión.

Los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de cuestiones que involucran conceptos matemáticos propios de la etapa avanzada, son procesos como el de representación, translación y abstracción entre otros.

Otra distinción entre una etapa y otra, está en relación con la característica y el nivel de los estudiantes como, por ejemplo, los cursos preuniversitarios o universitarios.

Al comparar el pensamiento avanzado con el elemental señalan:

- Se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
- Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- Se enseñan conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
- Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.
- Se evalúa a los estudiantes en tiempo cortos y se reducen las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante.

Bajos ciertos modelos de enseñanza y con otras palabras, en el siguiente cuadro (Calvo, 2001) aparecen las diferencias que podrían presentarse:

Cuadro 1
Diferencias entre PME y PMA

	Etapa Elemental	Etapa Avanzada
Estructura de las unidades didácticas	- Son cortas, y en ellas no se presentan diferenciación entre la teoría y la práctica	- Se presenta mucha información, en poco tiempo y sin ser precedida por una familiarización previa con las nociones que involucra; - Los espacios dedicados a la teoría y a la práctica se presentan diferenciados y a menudo, distanciados en el tiempo y dirigidos por profesores diferentes, donde el profesor más calificado (en el área matemática) suele encargarse de la teoría.
Estrategias utilizadas en el aula	- Basada en la resolución de problemas, entre los que están ausentes los pedidos de justificaciones; - Presenta una tendencia hacia la rutina de tareas, que convive con un rechazo ideológico a lo no creativo; - El uso de definiciones se restringe a la descripción de objetos ya conocidos.	- En las clases teóricas se trabaja sobre la base de exposiciones magistrales centradas en la presentación de definiciones, teoremas y aplicaciones; - La demostración formal sustituye plenamente a la explicación discursiva como método de validación; - Las definiciones ya no describen objetos conocidos sino que lo construyen formalmente; - En las clases prácticas, los problemas para resolver pasan a un segundo plano y son sustituidos en gran número por problemas para demostrar; - No se fomenta la rutina de tareas pero se exige implícitamente.
Dispositivos didácticos	- Libros de texto, fichas de trabajo, u otros materiales impresos que el profesor sigue literalmente, muy procesados para que estén “a punto” para ser usados por el alumno y conteniendo toda la información requerida.	- Aunque se sugieren libros de texto, el profesor no lo suele seguir estrictamente; - El alumno produce su propio material, el cual a menudo debe completar con búsqueda autónomas de información.
Roles del profesor y los alumnos	- Profesor: es el responsable del aprendizaje del alumno. - Alumnos: alcanza con que “sigan la clase” y hagan lo que el profesor les indica en cada momento.	- Alumnos: son responsables de su aprendizaje, por lo que: deben ampliar el horario de estudio más allá de la permanencia en el aula, deben poder justificar todo lo que afirman (la intuición es ahora insuficiente), deben encontrar el equilibrio entre sus conocimientos prácticos y teóricos, deben ser capaces de comunicar adecuadamente esos conocimientos y deben ser capaces de evaluar la corrección, relevancia o elegancia de esa formulación. - Profesor: guía una parte del proceso de estudio.

Cuadro 1 (cont.)

	Etapa Elemental	Etapa Avanzada
Evaluación	- Sobre la base de exámenes o pruebas parciales complementadas con aportaciones más globales que incluyen valoraciones de la participación en clase o del desempeño en tareas domiciliarias; - En las pruebas se piden mayoritariamente reproducir lo hecho en clase, con escasa exigencia de justificaciones; - Los mecanismos de evaluación ocupan cada vez más espacio en el proceso de enseñanza tendiendo a integrarse en él.	- Sobre la base de exámenes, donde se suele pedir la resolución de problemas poco rutinarios y donde la teoría, que ocupa la mayor parte del tiempo de clase, no tiene una presencia equivalente; - Distanciada del proceso de enseñanza en tiempo y también en espíritu desde que considera a las clases prácticas y teóricas impartidas como simple ayudas de un proceso de estudio que el alumno debe realizar por sí solo, siendo este proceso de estudio lo que se pretende evaluar.

Al detenerse en los contenidos del Cuadro 1 y en lo anterior expuesto, se puede decir, que entre el PME y el PMA debe suceder una etapa de transición, que en un primer momento debe ayudar a traspasar el aprendizaje del profesor al alumno, incrementar en frecuencia y relevancia la demostración y la definición, y favorecer los cambios del alumno sobre la manera de realizar sus tareas de rutina y el cómo trata la información y realiza los procesos matemáticos (Garbin, 2005).

Se podría decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 15-20 años aproximadamente (Garbin, 2005), son los que están en esta etapa de transición.

- Las matemáticas de la escuela elemental se consideran como un estado preliminar, como el primer nivel, del PMA. Es una etapa y un momento intelectual en que los contenidos matemáticos no requieren de un formalismo previo. Se trata fundamentalmente de la etapa en la que el Álgebra, Geometría y Aritmética, como afirma Tall (1995), se tratan a nivel icónico, operacional y proceptual.

- Aquellas materias que requieren de una reconstrucción cognitiva, por las dificultades que conllevan, como la geometría euclidiana, el cálculo y el álgebra, serían propias de la etapa de transición del PME al PMA.

Esquema conceptual y definición del concepto

Diferencia entre esquema conceptual y definición del concepto

Aunque no se puede establecer una distinción clara entre PME y PMA sí se pueden señalar rasgos distintivos. Las investigaciones cognitivas específicamente están interesadas en los procesos (abstraer, representar, conceptualizar, etc.) relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos. Es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógica formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática.

A finales de los 70 y principio de los 80 mientras algunos psicólogos estaban tratando de repensar la naturaleza y el desarrollo de los conceptos, otros miembros del PME centraron su atención en cómo son definidos los conceptos matemáticos y cómo los alumnos están más familiarizados con dichos conceptos por el uso diario que tienen de ellos. Vinner y Hershkowitz (1980) refiriéndose a la geometría introducen la distinción entre definición del concepto (*concept definition*) y *esquema conceptual* (*concept image)* y Tall y Vinner[1] (1981) respecto a límites y continuidad. Siguiendo a Tall y Vinner (1981), la definición de un concepto es una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Las definiciones formales son convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (suelen encontrarse en los libros). Las definiciones personales son las que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción, de una definición formal.

El esquema conceptual: estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales (imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto: gráfica, numérica, simbólica,…), las propiedades y los procesos asociados al concepto. La parte del esquema conceptual que es activado en un tiempo particular, es llamada esquema conceptual evocado. Varias veces, aparentemente las imágenes contrarias pueden ser evocadas. Sólo cuando los aspectos contradictorios son evocados simultáneamente, tiene que haber un conflicto o una confusión, en un sentido real.

En la recopilación y estudio que hacen de las investigaciones que se han presentado en los distintos PME del 1976 al 2006, Harel, Selden y Selden (2006)

[1]Este artículo fue seleccionado para formar parte de una recopilación de 17 clásicos de la investigación en educación matemática (Carpenter, Dossey y Koehler, 2004).

afirman que se ha hecho común al investigar las concepciones de los estudiantes y enmarcar la discusión en término de la diferencia entre la definición del concepto y esquema conceptual.

Evolución de la noción de esquema conceptual, nueva caracterización y esquema conceptual epistemológico[2]

Hasta el día de hoy el constructo esquema conceptual ha ido matizándose y caracterizándose de diferente manera a través de investigaciones empíricas, a modo de ejemplo: esquema conceptual formal, esquema conceptual informal, esquema conceptual embodied, met-before del mundo embodied y el simbolismo, esquema conceptual independiente. En función de la efectividad se distinguen esquema conceptual eficiente y esquema conceptual degenerado (Tall, 2001, 2004, 2005; Pinto y Tall, 1999, 2001; Przenioslo, 2004, 2005; Chin y Tall, 2000, 2001; Chae y Tall, 2005; Watson, Spyrou y Tall, 2004; Watson y Tall, 2002; Garbin, 2005; Valdivé, 2008y Valdivé y Garbin, 2008, 2011).

En Valdivé y Garbin (2008, 2010) se explicita una parte de la evolución que ha tenido este constructo y la caracterización de la acepción cognitiva del esquema conceptual. Cuando Garbin y Valdivé (2008, 2010, 2013) hablan de esquema conceptual se refieren a: (1) Las ideas que asocia el sujeto al concepto; (2) Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, problema o tarea; (3) Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva; (4) Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático; (5) El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico, no técnico) que el sujeto asocia ante la situación y (6) Los ejemplos y contraejemplos que el sujeto implementa para explicitar sus ideas.

Una distinción, luego de aceptar cierta proximidad entre el constructo esquema conceptual y de concepción, es la acepción epistemológica del esquema conceptual (Valdivé y Garbin 2008, 2010, 2013), puede referirse a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y ejemplos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto específico.

---

[2] Al final del capítulo se habla de la línea de investigación desarrollada en la USB y en la UCLA que dio por resultado estas caracterizaciones. Si se quiere profundizar en la evolución de la noción de esquema conceptual y la proximidad con la concepción revisar Valdivé (2008).

Adquisición del concepto

Dialéctica proceso objeto; procepto

Una razón para la complejidad del conocimiento matemático, radica en que muchas nociones pueden tomar el papel de procesos o de objetos, dependiendo de la situación problema y de la concepción del estudiante (hacer de un proceso un objeto).

Los elementos de la actividad humana como son la percepción, el pensamiento y la acción permiten considerar la hipótesis de que la actividad matemática se desarrolla como percibiendo objetos, pensando acerca de ellos y ejecutando acciones sobre ellos.

Las matemáticas elementales comienzan con, *percepciones de*, y, *acciones sobre*, objetos en el mundo externo. Estos objetos, al ser percibidos son analizados y sus propiedades son examinadas, luego son descritos verbalmente y clasificados, desarrollándose posteriormente pruebas verbales sistémicas (Van Hiele, 1959). Por otro lado, las acciones sobre objetos, en el mundo matemático se conceptualizan como *conceptos*. Por ejemplo, en el proceso de contar se usan palabras para los números y para los símbolos, los cuales se conceptualizan como *conceptos* numéricos.

La distinción entre proceso y objeto ha sido investigada por Dubinsky (1991) que habla de encapsulaciones, entendidas como la conversión de un proceso en un objeto matemático, y se expande a la teoría APOS (Harel, Selden, Selden, 2006). Las siglas APOS significan las acciones, los procesos, los objetos, y los esquemas, éstas son las construcciones mentales que, según esta teoría, un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión, etcétera (Dubinsky, 2000).

Por otro lado Gray y Tall (1994) introducen la noción de *procepto*, viendo al símbolo como un eje entre *proceso y concepto*. Algunos ejemplos de proceptos son:

$4 + 1$ proceso de adición, concepto suma

dy/dx proceso, concepto derivada

lim $1/x$ proceso tender al límite, concepto límite

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$, proceso de límite, concepto serie

Tall (1995) explica, que si el desarrollo comienza con objeto y acción, se podría decir que este desarrollo sigue con dos secuencias diferentes que ocurren simultáneamente. Una secuencia de desarrollo es la *visuo espacial,* la cual se convierte en verbal e induce a la prueba, y la otra secuencia de desarrollo usa símbolos conjuntamente con procesos y con conceptos, para hacer y pensar en lo que se hace; como por ejemplo hacer la multiplicación y pensar en el producto. Si bien estas secuencias de desarrollo pueden ocurrir independientemente (recordar que los griegos desarrollan una teoría geométrica sin ningún simbolismo para el álgebra y la aritmética) se han establecido muchas y útiles relaciones entre los métodos visuales y las manipulaciones simbólicas. Es ventajoso entonces tratar de desarrollar una aproximación versátil que tenga en cuenta las mejores ventajas de cada una de ellas.

La investigación en didáctica del cálculo y análisis matemático

El grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) conformado en los años 90, es dirigido por Ed Dubinsky y el propósito del análisis teórico que hacen es de proponer un modelo cognitivo, que consistiría en una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. El resultado del análisis se llama *descomposición genética del concepto* (APOE). Cabe destacar que el aporte de este grupo no se adscribe sólo en el área del cálculo sino abarca también el álgebra abstracta.

También, su acercamiento no es sólo cognitivo, y la naturaleza epistemológica no se reduce a la búsqueda de obstáculos epistemológicos. Se entiende como el estudio de las circunstancias que permite construir conocimiento, incluye aspectos sociales y culturales.

El ICME 7, realizado en Québec, en 1992, agrupó un número considerable de investigadores alrededor de la mesa de trabajo “Las dificultades de los estudiantes en el Cálculo” y el interés ha sido el contestar a las siguientes preguntas:

- *Objetivos y contenidos*: ¿cuáles son los objetivos de un curso de cálculo? ¿Cuál es su papel en el currículo de Matemáticas? ¿Cuáles son las relaciones entre los aspectos conceptuales y los aspectos técnicos de los contenidos del curso?
- *Dificultades de enseñanza y aprendizaje*: ¿Cuáles son las dificultades comunes a todos los aspectos del cálculo? ¿Cuáles son las dificultades

específicas de algunos aspectos? ¿Cuáles son las razones de tales dificultades?
- *Concepciones del Cálculo y su enseñanza que subyacen en las distintas experiencias*: ¿Qué problemas surgen a la hora de implementar secuencias de enseñanza? ¿Cuáles han sido los resultados?

Se han ido señalando un conjunto de dificultades, algunas esenciales en el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en procesos básicos de derivada e integral. Así como en el estudio de las funciones, en la notación de Leibniz, el concepto de infinito, y el uso y selección de las distintas representaciones.

En este sentido, un proyecto de investigación nace en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (España) en el año de 1996 liderado por la profesora Azcárate y del cual participa Garbin (1998, 2000); Garbin y Azcárate (2000, 2001, 2002) y se amplía más tarde a la Universidad de Salamanca (Modesto Sierra), La Laguna (Matías Camacho), Valladolid (Tomás Ortega) y Lleida (Mar Moreno). El proyecto responde a una línea de investigación que tiene como propósito profundizar en: a) los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar; procesos todos ellos que tienen una componente psicológica; b) el estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis; c) el papel que juegan los Programas de Cálculo Simbólico (PCS) y las calculadoras gráficas y simbólicas en la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos importantes del Análisis Matemático[3].

En el marco de esta línea de investigación, se sigue desarrollando una línea en el Departamento de Matemáticas de la USB (Garbin, 2003, 2005,2007) y (Garbin y Mireles, 2009) y en la UCLA por Valdivé (2008) y Valdivé y Garbin (2008, 2010, 2013), en la etapa de transición del PME al PMA y en el Pensamiento Matemático Avanzado, específicamente en el curso de Análisis Matemático. El interés ha sido el estudio de conceptos en que están involucrados procesos infinitos, tales como límites, dimensión, fractales, series, y considerando al infinito *pequeño*, a los infinitesimales. Como se ha mostrado en párrafos

[3] Una exposición más amplia del proyecto y sus resultados se encuentra en Azcárate y Camacho (2003)

anteriores, con las investigaciones realizadas se ha podido ofrecer un aporte teórico, al diferenciar dos acepciones en la noción de esquema conceptual: la cognitiva y la epistemológica. Las caracterizaciones epistemológicas aportan un conocimiento relevante que puede servir como marco de referencia para interpretar factores determinantes en los procesos de conceptualización de los infinitesimales por parte de los alumnos. En esta área del conocimiento PMA, empíricamente, se han encontrado y caracterizado rutas formales e informales de aprendizaje (Pinto, 1998; Pinto y Tall, 1999, 2001; Tall, 2001), sin embargo con la profundización empírica y estudio de caso realizado (Valdivé y Garbin, 2010), se caracteriza una nueva ruta de aprendizaje llamada *mixta*. Esta permite ver cómo el estudiante enriquece sus esquemas conceptuales, cuando no usa sólo una ruta netamente formal o netamente intuitiva. Queda seguir profundizando en cómo consolida el estudiante la conceptualización del objeto matemático comparando las distintas rutas de aprendizaje.

En estas investigaciones fundamentalmente los sujetos de estudio son los alumnos. Los métodos de recogida de datos son de tipo cualitativo. Son investigaciones donde el interés es el aprendizaje, el análisis de datos es inductivo ya que las interpretaciones se construyen a partir de la información obtenida, pueden ser cuestionarios elaborados por el docente investigador y/o entrevistas semi-abiertas grabadas. El foco de investigación es de carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Las investigaciones de tipo *histórico-epistemológicas* se realizan, con libros de texto, libros de autores clásicos de análisis matemáticos y libros de historia de las matemáticas. La estrategia de recogida de información es según sea el caso: a) el análisis de materiales escritos, llegados a ser considerados como instrumentos cuasi-observables que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador (Woods, 1987); b) el análisis de datos de tipo cualitativos, la información se analiza y se codifica de acuerdo con códigos y categorías, y se construyen la *Redes Sistémicas* y/o c) *Estudio de caso* de tipo interpretativo y descriptivo. Se van validando las formas de análisis metodológicos y de respuestas de los estudiantes, validando y triangulando los diferentes resultados y hallazgos.

Cabe afirmar que Harel, Sendel y Sendel (2006) afirman que en la etapa de transición del PME al PMA no se ha investigado aún lo suficiente, lo cual queda este período necesitado de mayor estudio y profundización.

Por otra parte, existe un grupo aún considerado no muy grande (Harel, Sendel y Sendel (2006) de investigadores que están interesados en cómo investigan los matemáticos de profesión, bajo el supuesto que esto puede dar buena información para el área de la Educación Matemática y específicamente para entender el desarrollo del PMA. También Tall (2013) se interesa de cómo se construye el pensamiento matemático, del matemático teórico al matemático formal, rompiendo así toda frontera y permaneciendo éste, en el pensamiento formal conjeturando y demostrando consecutivamente.

Finalmente, Garbin y Valdivé, expanden su línea de investigación desarrollando un nuevo Proyecto de investigación[4] y que abre nuevas perspectivas de investigación a futuro por lo incipiente que es el área. El trabajo pretende responder a la pregunta cómo cognitivamente, el matemático de profesión genera nuevos problemas, estudia posibilidades y estructura nuevas conjeturas, para llegar a una demostración matemática formal. Estudiar este proceso cognitivo de construcción matemática y de demostración, justificación, verificación y prueba, puede dar *luces* y nuevo entendimiento sobre el proceso de construcción matemática y de demostración que requiere hacer un estudiante de matemáticas a lo largo de su escolaridad y en la universidad.

Referencias

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X(2), 135-149.

Cantoral, R. y otros (2000). Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: Trillas.

Carpenter, T. P., Dossey, J. A., y Koehler, J. L. (Eds.). (2004). Classics in Mathematics Education Research (p. 226). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chae, S. y Tall, D. (2005). Student´s Concept Images for Period Doublings as Embodied Objets in Chaos Theory. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics (Vol2, pp. 121-132).

Chin, E. y Tall. D. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. En Nakara, T., y Koyama, M. (Eds.), Proceedings of the 24th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 2, pp.177-184). Utrecth, The Netherlands.

[4]Proyecto aprobado Nro. 004-AC-2015 por CDCHT de la UCLA

Chin, E. y Tall, D. (2001). Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. En Marja, V. (Ed.), Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (Vol 4, pp. 241-248). Utrecth, The Netherlands.

Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Tesis Doctoral: Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P y Kilpatrick, J. (Eds.), Mathematics and Cognition (pp. 113-134). Cambridge: University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, (pp.3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. Relime, 3 (1), 47-70.

Harel, G., Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. Some PME perspective. En Gutierrez, A. y Boero, O. (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp.147-172). The Netherlands: Sense Publishers.

Garbin, S. y Azcárate, C. (1998). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual. Educación Matemática, 12, 5-18.

Garbin, S. (2000). Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años. Tesis doctoral: Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual: Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. Suma, 38, 53-67.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito Actual e Inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las Ciencias, 20 (1), 87-113.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (2), 169-193.

Garbin, S. (2007). La Problemática Fractal: un punto de vista cognitivo con interés didáctico. Paradigma, XXIII, 79 - 108.

Garbin, S y Mireles, M. (2009). Un estudio sobre la noción de dimensión en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 27 (2), 223 – 240.

Pinto, M. (1998). Students' Understanding of Real Analysis. Tesis doctoral no publicada. University of Warwick, Inglaterra.

Pinto, M. y Tall, D. (1999).Students constructions of formal theory: living and extracting meaning. Proceedings of the 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (Vol. 2, pp. 41-48). Haifa, Israel.

Pinto, M. y Tall, D. (2001).Following students' development in a traditional university classroom. En Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Eds.), Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (Vol. 4, pp. 57-64). Utrecth, The Netherlands.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. Educational Studies in Mathematics 55 (1 y 3), 103-132.

Przenioslo, M. (2005).Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary shoool. Educational Studies in Mathematics, 60 (1), 71-93.

Sternberg, R. J.(1996). What is mathematical thinking? En R.J. Sternberg y Ben-Zeev (Eds.), The nature of mathematical thinking (pp. 303-318). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. (1991).The psicology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 3-21). Kluwer Academic Publisher: Dordrecht/Boston/London.

Tall, D. y Gray, E. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (2), 116-140.

Tall, D. (1995).Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Actas del PME 19,1. 61-75.

Tall, D. (2004).Thinking Through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 1-16). Bergen, Norway.

Tall, D. (2001).Natural and formal infinities. Educational Studies en Mathematics, 48 (2 y 3), 200-238.

Tall, D (2013).How Humans Learn to Think Mathematically. Cambridge University Press.

Valdive, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal, Relime, 11(3), 413-450.

Valdive, C. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de análisis matemático. Tesis doctoral: UCLA-UNEXPO-UPEL, Barquisimeto.

Valdive, C. y Garbin, S. (2010). Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: caso del alumno (2), Educare, 14 (3), 3 - 31.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2013). ¿Cómo piensan los estudiantes el infinitesimal antes de iniciar un curso de análisis matemático? Paradigma, 34(1), 117-144.

Van Hiele, P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. Bulletin de l'APMEP 198, 199-205. Traducido al español por Ricardo Barroso. Disponible en: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/aprgeorefer.html

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980). Concepts images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 177-184). Berkeley: University of California, Hall of Sciencie.

Watson, A. y Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 369-376). Norwich, UK.

Watson, A, Spyrou, P. y Tall, D. (2004). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. Educational Studies in Mathematics, 3, 1-24.

Woods, P. (1987). La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa. Barcelona: Paidós.

Sabrina Garbin D.

Doctora por la Universidad Autónoma de Barcelona, España (UAB), en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Magister en Matemáticas por la Universidad Simón Bolívar (USB). Profesor de Matemáticas, mención Matemáticas por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Instituto Pedagógico de Maracay. Actualmente es Profesora Titular a Dedicación Exclusiva de la Universidad Simón Bolívar del Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas. Ha sido miembro del grupo de investigación: “Procesos de Pensamiento Matemático Avanzado (Didáctica del Análisis)”dirigido por la Dra. Carmen Azcárate en la UAB (España). Trabaja en el área de Didáctica de las Matemáticas y del Análisis y en Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado. Tiene varias publicaciones en Revistas especializadas arbitradas. Asimismo, es árbitro de algunas revistas del ámbito de la educación matemática. Ha sido integrante del jurado de varios trabajos de postgrado. Ha dirigido trabajos de grado de Especialización y tesis de Doctorado. Participa en Congresos Nacionales e Internacionales.