

APROXIMACIÓN AL MARCO CONCEPTUAL Y PRINCIPALES ANTECEDENTES DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LAS PRIMERAS EDADES

APPROACH TO THE CONCEPTUAL FRAMEWORK AND BACKGROUND OF FUNCTIONAL THINKING IN EARLY YEARS

Cañadas, M. C. y Molina, M.
Universidad de Granada

Términos clave: álgebra escolar, *early algebra*, pensamiento funcional.

Keywords: early algebra, functional thinking, school algebra

Resumen. En este capítulo abordamos dos aspectos relacionados con el pensamiento funcional. En primer lugar, hacemos una aproximación al marco conceptual del pensamiento funcional. Consideramos este tipo de pensamiento como un modo de pensamiento algebraico dentro de la propuesta curricular *early algebra*. Para este enfoque, las funciones son el contenido matemático protagonista. En este marco, justificamos el interés de investigar sobre el pensamiento funcional en las primeras edades y particularizamos el interés al caso de España. En segundo lugar, presentamos y describimos los principales estudios desarrollados sobre pensamiento funcional en las primeras edades en los contextos internacional y español. Concluimos este capítulo con algunas reflexiones finales.

Abstract. In this chapter, we address two aspects concerning functional thinking. Firstly, we present an approach to the conceptual framework of functional thinking. We consider this kind of thinking as a way of algebraic thinking within the curricular proposal *early algebra*. From this perspective, functions are the protagonist mathematics topic. In this framework, we justify the interest of researching on functional thinking on early years, and we particularize this interest in the case of Spain. Secondly, we present and describe the main studies developed about functional

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

thinking in the early years in the international and Spanish contexts. We conclude this chapter with some final reflections.

INTRODUCCIÓN

La propuesta *early algebra* propugna integrar el pensamiento algebraico en los niveles educativos previos a la educación secundaria, como ocurre tradicionalmente. Surge en Estados Unidos, con base en el trabajo de Kaput (1998), si bien ya en 1985 Davis destacó el potencial del álgebra para proveer a los alumnos de educación primaria de oportunidades para desarrollar una comprensión profunda de las matemáticas y promover su creatividad. Esta propuesta parte de la evidencia mostrada en diversos estudios de que los niños de educación primaria tienen capacidades innatas para realizar razonamientos algebraicos así como de la consideración de una amplia concepción del álgebra, y del pensamiento algebraico, no restringida al uso de simbolismo (Molina, 2009).

Kaput (2008) reconoce que no es fácil definir el pensamiento algebraico, especialmente cuando nos centramos en los primeros cursos. Según este autor, este tipo de pensamiento considera las formas de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra como contenido matemático. Este contenido se considera caracterizado por la expresión de la generalidad, relativa a relaciones, la cual conduce a la descripción o captura de cierta estructura (Molina, 2006). Cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla del enfoque funcional del *early algebra*. En este enfoque el concepto de función, las relaciones entre las cantidades involucradas, y la variación conjunta entre cantidades son contenidos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos. No se trata de introducir las funciones en niveles educativos previos tal y como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general y el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos.

Desde el enfoque funcional se sugiere un estudio del álgebra centrado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real en las que relaciones cuantitativas pueden explicarse por medio de estos modelos (Heid, 1996). Esta aproximación es recomendada para los estudiantes de los

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

primeros cursos de educación primaria, ya que permite el uso del álgebra en situaciones concretas de una forma significativa (Drijvers, Dekker y Wijers, 2011).

En este contexto, surge como proceso cognitivo clave el pensamiento funcional, entendido como un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen.

En este trabajo recogemos ideas que justifican el interés del pensamiento funcional como tema de investigación, presentamos algunos elementos centrales de su marco conceptual que nos permiten caracterizarlo y sintetizamos los principales estudios llevados a cabo. Concluimos con algunas reflexiones finales.

JUSTIFICACIÓN DEL INTERÉS DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LAS PRIMERAS EDADES

Justificamos el interés de estudiar el pensamiento funcional en las primeras edades desde dos perspectivas: investigadora y curricular.

El trabajo con funciones depende de y aporta comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones. Las tablas, los gráficos y el simbolismo algebraico son sistemas de representación clave para este contenido matemático (Doorman y Drijvers, 2011). Las funciones se consideran una potente herramienta en matemáticas (además de en otras disciplinas) y pueden servir como una temática que conecta e incluso unifica contenidos en el currículo (Schwartz, 1990). Sin embargo, hasta hace menos de una década, su estudio —cuya comprensión se consideraba que requería un pensamiento formal y abstracto por parte del estudiante— estaba relegado a la educación secundaria.

En la últimas décadas, investigaciones en el marco de la propuesta *early algebra* ponen de manifiesto que los niños tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde antes de lo que se les suponía (e.g., Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015). El pensamiento funcional promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales. Esto hace que fomente el razonamiento inductivo y, como consecuencia, facilite herramientas a los estudiantes para la adquisición de conocimiento matemático (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

En la actualidad la propuesta early algebra está ya incluida en currículos de países tan diversos como Australia, Canadá, China, Corea, Estados Unidos o Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013a). En la mayoría de los casos mencionados, la inclusión se ha producido después del año 2000, por lo que se puede considerar reciente. El enfoque funcional, como presentamos al inicio, se enmarca dentro de esta propuesta pero se ha incluido posteriormente. En España ha sido en la última ley de educación (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, 2013) cuando se ha hecho explícita en el currículo la necesidad de desarrollar en esta etapa la capacidad de los escolares “de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (BOE, 2014, p. 193879).

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL

En este apartado describimos el pensamiento funcional como constructo cognitivo y presentamos los principales elementos con los que se relaciona.

La función, entendida como una relación de dependencia entre cantidades co-variantes, es el foco de contenido matemático en el que se centra el pensamiento funcional. Rico (2007) define este tipo de pensamiento como el acto de pensar en términos de y acerca de relaciones, destacándolo como una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían (Smith, 2008).

Freudenthal (1983) resalta la importancia fenomenológica de la función, considerando que es la relación entre algo que varía libremente y algo que varía bajo determinadas limitaciones (p. 496). Este autor destaca que el origen de la función está en enunciar, postular, producir y reproducir dependencia o conexiones entre variables que tienen lugar en y entre los mundos físico, social y mental.

Las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas, son elementos clave para el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros cursos. Este tipo de pensamiento implica la generalización de relaciones entre cantidades co-variantes, la representación de esas relaciones de diferentes formas utilizando el lenguaje natural, las expresiones

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

simbólicas, tablas y gráficos, y razonar de manera fluida con esas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Confrey y Smith (1991) proponen la resolución de problemas contextualizados para la enseñanza de las funciones, involucrando representaciones múltiples y transformaciones entre estas representaciones. Estos autores consideran dos aproximaciones para la enseñanza de las funciones para la educación secundaria: (a) co-variación y (b) correspondencia. Smith (2008) retoma esta estructura y propone tres ideas para clasificar el tipo de actividades que conectan con las relaciones implicadas en las funciones y que pueden realizar en los primeros niveles para fomentar el pensamiento funcional: (a) patrones recursivos, que implica encontrar el patrón de variación que se puede identificar en una secuencia de valores, (b) pensamiento covariacional, que se basa en el análisis de cómo dos cantidades varían simultáneamente y en cómo los cambios en los valores de una variable producen cambios en otra variable y (c) correspondencia de la relación, que se basa en la identificación de una correlación entre variables.

En la figura 1 recogemos los principales elementos relacionados con el pensamiento funcional señalados.



Figura 1. Mapa conceptual del pensamiento funcional

PRINCIPALES ESTUDIOS

Estudios previos, desarrollados en su mayoría en otros países, ponen en entredicho las limitaciones que tradicionalmente se han supuesto a la capacidad de los alumnos de educación primaria para el trabajo con elementos funcionales (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Martínez, 2012). El énfasis en la actualidad se centra en poner de manifiesto capacidades de dichos estudiantes para identificar y expresar relaciones entre variables, razonar sobre funciones, e incluso generalizar. Algunos estudios también buscan aportar evidencias de que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales contribuyen al aprendizaje formal posterior de estas nociones. En este apartado mencionamos las principales investigaciones realizadas sobre esta temática a nivel internacional y a nivel nacional.

Contexto internacional

En el contexto internacional, diversos estudios concluyen que los estudiantes de educación primaria pueden describir las relaciones recursivas, la covariación y la correspondencia de cantidades, y pueden llegar a utilizar diferentes sistemas de representación para razonar sobre funciones así como modelizar y resolver ecuaciones de cantidades desconocidas (e.g., Brizuela et al. 2000; Moss et al. 2008). Estudios como los de Mason, Stephens y Watson (2009) o Warren y Cooper (2005) evidencian la capacidad de estudiantes de educación primaria para identificar propiedades

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

generales a partir de situaciones particulares en las que existe una relación entre dos cantidades cambiantes. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) señalan cierta tendencia de los estudiantes de ocho años a pensar recursivamente sobre relaciones funcionales en tareas con figuras geométricas. Mediante un estudio longitudinal, Brizuela y Martínez (2012) confirman que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales son positivas a largo plazo. Las autoras concluyen que estos alumnos manejan un lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras para representar variables y cantidades generalizadas con fluidez.

Algunos estudios (Blanton y Kaput 2004; Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Alvarado, 2010) sugieren que el uso de diferentes representaciones puede servir como mediador y apoyo para el desarrollo del pensamiento funcional. Este es, por ejemplo, el caso del uso de la tabla que hacen los estudiantes de primero de educación primaria, que les permite establecer relaciones de correspondencia entre la cantidad y el numeral (Brizuela y Alvarado, 2010). Estas autoras constatan que estos estudiantes pueden crear tablas de valores como herramientas para organizar la covariación de los datos. Moss, Beatty, Shillolo y Barkin (2008) dan muestras de la capacidad de estudiantes de segundo de educación primaria para utilizar la tabla de forma transparente, pudiendo comprender y pensar sobre los datos que la tabla con valores de dos variables que contiene. En esta línea, Blanton y Kaput (2011) señalan que la representación tabular produce diferencias en los procesos cognitivos que producen los estudiantes de diferentes edades.

En relación con el uso de representaciones y evidencias sobre pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria, el proyecto *Early Algebra Project* es uno de los principales antecedentes de actualidad, liderado por Bárbara Brizuela y María Blanton en Estados Unidos. Este proyecto parte de investigaciones previas como la de Blanton y Kaput (2004), que destacan que los niños de 4 a 8 años son capaces de pasar de imágenes icónicas al lenguaje natural en educación infantil y llegan a utilizar sistemas de representación simbólicos en tercero de educación primaria (Blanton y Kaput, 2004).

Contexto español

El trabajo de Merino (2012) es el primer antecedente a nivel nacional que se centra en el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria. Este autor indaga sobre las estrategias y representaciones que utilizan estudiantes de 10-11 años cuando Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

abordan una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. Se observa que el tipo de representación más usado es la verbal, si bien en la mayoría de los casos estas representaciones aparecen acompañadas de los sistemas de representación pictórico y, puntualmente, el sistema de representación simbólico. La variedad de sistemas de representación y de patrones identificados por los estudiantes, pone de manifiesto que disponen de los conocimientos y las herramientas necesarias para que este tipo de tareas se trabajen en el aula de educación primaria. Así mismo, se observa que el tipo de estrategia empleada por los escolares en el trabajo con casos particulares condiciona su éxito en la generalización de la relación funcional (Merino, Cañadas y Molina, 2013a; 2013b).

Fuentes (2014) y Cañadas y Fuentes (2015) indagan sobre el pensamiento funcional de estudiantes de segundo de educación primaria en España. Estas autoras destacan las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes para representar la relación entre las variables de un problema contextualizado que involucra la relación funcional $f(x)=5x$. Entre las estrategias que les llevan a una relación correcta destaca el conteo de dibujos, la respuesta directa multiplicando por cinco el valor de la variable independiente o la asociación de elementos en grupos de cinco.

Estos trabajos marcan el inicio de la línea de investigación en la Universidad de Granada en la que en la actualidad, las autoras de este trabajo están liderando un proyecto de investigación I+D que aborda el pensamiento funcional como aproximación al pensamiento algebraico en los primeros niveles. Con este proyecto se pretende contribuir a la caracterización del pensamiento funcional de los estudiantes de los primeros niveles educativos en España, mostrar evidencias del pensamiento funcional que pone de manifiesto dicho alumnado y producir materiales que sean útiles para promover el pensamiento funcional en las aulas de educación primaria.

De este modo, con un enfoque de actualidad a nivel internacional, se da continuidad a investigaciones sobre las ideas de representaciones, generalización, patrones y *early algebra* en las que se viene trabajando en otros niveles educativos en el grupo de investigación FQM-193 “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (e.g., Cañadas, Castro y Castro, 2008; Castro, 1995; Castro, Cañadas y Molina, 2010; Molina, 2006; Trujillo, Castro y Molina, 2009).

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

REFLEXIONES FINALES

Los resultados de las investigaciones previas sugieren que los estudiantes de educación infantil establecen relaciones de covariación entre cantidades variables a partir de una relación aditiva. Además, son capaces de descubrir el patrón de la paridad entre esas cantidades. Los estudiantes de primero de primaria identifican y utilizan patrones basados en las relaciones aditivas y multiplicativas para predecir cantidades. También emplean estrategias como conteos sobre dibujos y utilizan diversos sistemas de representación predominando el pictórico y el simbólico (números) para dar respuesta a preguntas sobre cantidades variables, y verbal para expresar generalizaciones lejanas. Los antecedentes recogidos ponen de manifiesto que los estudiantes de educación primaria, son capaces de dar respuestas a tareas de pensamiento funcional. Además, coinciden en destacar la necesidad de profundizar en el pensamiento funcional de los estudiantes de primeras edades, particularmente en educación infantil y primero de educación primaria.

Así mismo, de la revisión de literatura presentada se desprende la actualidad de la investigación sobre pensamiento funcional en estas edades y la necesidad de llevar a cabo más estudios que, por un lado, clarifiquen los descriptores del pensamiento funcional y, por otro, muestren evidencias sobre son capaces de hacer los estudiantes de educación primaria en relación con este tipo de pensamiento. Esto aportaría información de utilidad para la toma de decisiones docentes en las aulas de este nivel educativo, y para la formación de maestros de primaria. Aunque hay diversos estudios a nivel internacional que se han preocupado por el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria, son escasas y necesarias más investigaciones que indaguen sobre este aspecto. Estos intereses se ven acentuados en el contexto español, donde variadas investigaciones ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes cuando abordan el estudio formal del álgebra en educación secundaria, y no se ha realizado hasta el momento ningún estudio que aborde la introducción del álgebra desde una aproximación funcional desde la etapa de educación primaria.

La incorporación del pensamiento funcional en el currículo de educación primaria recientemente hace que el interés por la investigación sobre pensamiento funcional se extienda al ámbito docente. Es deseable que los resultados puedan llegar a las aulas, aportando ideas sobre cómo promover este tipo de pensamiento en

educación primaria y guiando así la implantación de esta componente de las nuevas directrices curriculares.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 5-23). Nueva York, NY: Springer.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.
- Brizuela, B. M. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE Nueva Época*, 21, 37-44.
- Brizuela, B. M. y Martínez, M. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero y J. A. Castorina (Comps.), *Desarrollo cognitivo y educación [II]* (pp. 267-289). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Cañadas M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. *Investigación en Educación Matemática XIX*.
- Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th anual meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.
- Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.
- Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Master. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/6263/>
- Gobierno de España (2013). Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa. *BOE*, 295, 97858-97921.
- Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En A. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Kaput, J. J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.
- Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

- Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1926/>
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013a). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013b). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE*, 52, 19349-19420. Madrid, España: Autor.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/544/>
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Moss, J., Beatty, R., Shillolo, G. y Barkin, S. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build their understanding of patterns and functions on a collaborative database. En C. Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic thinking in school mathematics: the National Council of Teachers of Mathematics 70th Yearbook (2008)* (pp. 155-168). Reston, VA: NCTM.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.
- Trujillo, P., Castro, E. y Molina, M. (2009). El proceso de generalización: un estudio con futuros maestros de primaria. *Indivisa, Monografía XII*, 73-90.
- Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.