http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351
Sección: Trabajos de fin de grado o máster
Educación Matemática en la Infancia

Problemas verbales de reparto igualatorio en la educación infantil

María Elena López de la Fuente
Barcelona, mariaelenalopezdelafuente@gmail.com

Fecha de recepción: 01-02-2015
Fecha de aceptación: 25-07-2015
Fecha de publicación: 30-12-2015

RESUMEN
Esta investigación plantea un taller de problemas aritméticos en educación infantil, compuesto por ocho problemas, en el que se introducen dos problemas de reparto igualatorio a niños de 5-6 años. Se trata de averiguar si los alumnos de estas edades son capaces de resolver los problemas de forma manipulativa y observar las estrategias que utilizan los niños. Los problemas de reparto igualatorio parten de dos cantidades, una mayor que la otra, y hay que conseguir igualar ambas cantidades sin añadir objetos externos. La incógnita en el primer problema planteado es la cantidad a igualar y en el segundo problema es la cantidad de contadores que cede el grupo que tiene más objetos al que tiene menos. Los niños resolvieron los problemas mediante diferentes variantes de la estrategia de modelización directa de redistribución.

Palabras clave: Educación infantil, resolución de problemas, modelización directa, estrategias de redistribución, problemas de reparto igualatorio.

Verbal problems of equitable redistribution in kindergarten

ABSTRACT
This research proposes a workshop on arithmetic problems in early childhood education, composed by eight problems, introducing two problems of equitable sharing of several steps for children of 5-6 years old. It aims to know if the students of these ages are capable of solving problems through manipulation and observing the strategies that children use. The problems of equitable sharing start with two quantities, one bigger than other and children have to get out even out quantities so both have the same amount without adding any external counters. The unknown in the first problem posed is the quantity to form even quantities and in the second problem solving is the quantity of counters that need to be transferred from the group with more objects to the group with less. Children solved the problems using direct modeling strategies of redistribution.

Keywords: Early childhood (Kindergarten), problem solving, direct modelling, strategies of redistribution, problems of equitable sharing.

1. Introducción

La resolución de problemas aritméticos verbales, y el papel que desempeña en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ha sido uno de los temas de investigación y estudio desde hace muchos años. Existe mucha literatura escrita al respecto que trata de entender los procedimientos y estrategias que utilizan los niños en la resolución de problemas. El enorme interés que despierta la resolución de problemas revela la gran importancia que tiene este contenido en el contexto escolar y en la vida diaria. La investigación aquí expuesta parte del análisis teórico de las diferentes aportaciones que investigadores y estudiosos han realizado sobre este tema. Junto con el estudio teórico, se presenta un taller compuesto por varias sesiones en el que se plantean problemas de diferentes tipos que demuestran lo que los niños de Educación Infantil son capaces de realizar en matemáticas.

1.1. Justificación

Los problemas de reparto igualatorio se han propuesto en los últimos cursos de primaria por ser necesario el conocimiento y dominio de varias operaciones aritméticas para la resolución de estos problemas. Ahora bien, ¿se pueden resolver los problemas de reparto igualatorio a través de otras estrategias? ¿Se pueden plantear en educación infantil cuando todavía los niños no han interiorizado el funcionamiento de las normas de las operaciones aritméticas?

Al analizar detenidamente los problemas de reparto igualatorio, pueden parecer complicados para estas edades por ser problemas de varios pasos, y por la necesidad de realizar varias operaciones aritméticas. Especialmente, debemos tener en cuenta que los niños de infantil todavía no dominan los algoritmos básicos, aunque estos problemas pueden ser resueltos a través de la manipulación. El propósito de esta investigación es averiguar si los niños de 5-6 años son capaces de resolverlos a través de la modelización directa, sin un aprendizaje formal de operaciones aritméticas, o mediante otras estrategias de conteo. Al permitir la manipulación de objetos se observarán las estrategias que utilizan los niños y se averiguará si estos problemas son apropiados para estas edades.

1.2. Objetivos

Los objetivos que me he planteado para este trabajo son los siguientes:

1.2.1. Objetivo general
Estudiar los problemas de reparto igualatorio y cómo resuelven niños de último curso de Educación Infantil (5-6 años) este tipo de problemas.

1.2.2. Objetivos específicos
1. Analizar, desde un punto de vista teórico, los problemas de reparto igualatorio.
2. Diseñar un taller de resolución de problemas, para un aula de 5-6 años, en que se introduzcan los problemas de reparto igualatorio.
3. Llevar a la práctica en un aula de 5-6 años el taller diseñado.
4. Analizar las estrategias que emplean los alumnos en los problemas del taller, poniendo una especial atención en los problemas de reparto igualatorio.
5. Abrir líneas futuras de investigación como continuación a este trabajo.

2. Marco teórico

Este apartado comenta la importancia de la resolución de problemas en el aprendizaje de matemáticas y continua con una revisión de los documentos curriculares y de los artículos publicados en PISA 2012 y los del MEC que nos sirven de referencia. Uno de los contenidos escolares que contribuye a la formación científica e intelectual de los alumnos es la resolución de problemas ya que ayuda a que los niños sean capaces de afrontar diferentes situaciones en las que aparezcan números y a establecer las relaciones entre ellos. La resolución de problemas debe tener un lugar relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje porque son muchas las capacidades básicas que se utilizan como: leer, reflexionar, pensar las estrategias y procedimientos que se van a emplear, revisar el proceso de resolución, hacer cambios, comprobar si la solución es correcta y explicar el procedimiento que se ha empleado (pp. 19386-7).

Uno de los objetivos que establece el currículo de Educación Primaria es "Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana (p. 19354).

Siguiendo las indicaciones que nos marca el informe PISA 2012, la resolución de problemas forma parte de la competencia matemática que deben adquirir los alumnos durante su etapa escolar, ya que intenta aplicar las matemáticas a las situaciones de la vida diaria. También nos recuerda que tener competencia matemática consiste en saber utilizar las matemáticas para solucionar problemas que están situados en un contexto determinado, aplicar razonamientos, conceptos, procedimientos matemáticos para obtener una solución. La elección de estrategias y representaciones matemáticas puede incluir cálculos, operar con expresiones algebraicas, analizar información y explicaciones matemáticas y utilizar herramientas matemáticas para resolver problemas. Asimismo invita a reflexionar sobre las soluciones o los resultados matemáticos obtenidos para determinar si son razonables o tienen sentido en la situación en la que se han planteado. Por este motivo es importante que el alumno sea capaz de establecer relaciones y adquiera un razonamiento matemático, un nivel de comprensión matemático y posea herramientas matemáticas para saber responder a problemas que forman parte de su entorno que le permitirán estar preparado para su vida diaria.

Según la legislación actual (RD 126/2014; Decreto 181/2008) la adquisición de las matemáticas es una herramienta que dotará al alumno de estrategias y de recursos para solucionar problemas, cercanos a su vida diaria, que le ayudará a conocer el entorno y a aproximarse a la realidad de una manera activa. También nos recuerda que la escuela debe ser uno de los lugares en los que se aseguren experiencias ricas que conduzcan aprendizajes y se planteen interrogantes para impulsar el aprendizaje. Por esta razón, este trabajo pretende tomar como referencia las enseñanzas mínimas de educación infantil que sugieren los actuales currículos del Estado Español y de la Comunidad Autónoma de Cataluña. Y realizar la parte práctica en un aula de un colegio de Cataluña.

2.1. La resolución de problemas en las primeras edades

A pesar de que el currículo de Educación Infantil hace referencia a la resolución de problemas en esta etapa educativa, en la práctica existe un enfoque aplicacionista o tradicional que se centra en enseñar primero las operaciones aritméticas y luego la resolución de problemas matemáticas. Son pocos los centros educativos que enseñan a resolver problemas matemáticos en educación infantil y los que se atreven a realizarlo, lo aplican de forma experimental, ya que lo habitual es plantearlos en primaria.

2.1.1. Distintos enfoques de la resolución de problemas

Los problemas aritméticos de enunciado verbal tuvieron un gran auge durante la década de 1980 a 1990 y se llegó a un acuerdo sobre la clasificación semántica de los problemas de estructura aditiva, problemas de cambio, combinación, comparación e igualación (Riley, 1981). Varias investigaciones analizaron el grado de dificultad de los problemas y las estrategias para resolverlos, en función de la categoría semántica y el lugar en el que se encuentra la incógnita en el enunciado del problema (Castro, 2008). En estos estudios, se exponía que para resolver adecuadamente un problema planteado, el paso previo era comprenderlo y crear una representación del enunciado del problema para decidir qué operación era la idónea para resolverlo. Estas investigaciones también indicaban que muchos alumnos buscaban palabras clave en los enunciados de los problemas para que les orientaran en la elección de la operación a realizar, saltándose el paso previo de representación-comprensión del problema (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Esta idea se refuerza en los estudios de Puig y Cerdán (1988, p.

116) al comentar que algunas estrategias que se enseñan actualmente sobre resolución de problemas se centran en encontrar palabras claves. Estos autores sugieren una comprensión y lectura global del enunciado del problema en vez de una lectura superficial enfocada a localizar palabras clave que sirvan de pista para elegir las operaciones a realizar. Según Fuson, Clements y Beckman (2009) hay que enseñar a los niños a comprender las situaciones que describen los enunciados de los problemas y no centrarse en buscar palabras clave que nos indiquen las operaciones a realizar (p. 49).

Al revisar la finalidad de los problemas dentro de la enseñanza, Verschaffel et al. (2007, p. 528) nos recuerdan que, históricamente, los alumnos tenían que aprender las operaciones aritméticas formales y aplicarlas en los problemas de la vida diaria. La función de los problemas consistía en aplicar los conocimientos adquiridos. Esta finalidad todavía se mantiene en el currículo español junto a otras. Este enfoque tradicional que Baroody (2003) llamará enfoque de destrezas, se centra en memorizar las destrezas básicas y en la repetición de reglas, fórmulas y procedimientos. Según esta corriente, el alumno es como un recipiente vacío que no comprende gran parte de las matemáticas. El docente es el encargado de enseñarle los procedimientos y hacerle que practique hasta la saciedad sin preocuparse de si ha habido o no comprensión. La enseñanza y la práctica se alejan del contexto del alumno que no tiene en cuenta sus intereses. Las actividades resultan poco o nada significativas para el alumno que no acaba de encontrar el sentido a tanta práctica, pero a través de la mecanización consigue una gran habilidad y rapidez en la realización de procedimientos cometiendo pocos errores y llega a resolver problemas de forma automática.

Según el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y ciencia [MEC], 2006) el criterio de evaluación para el primer ciclo consiste en "Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta y utilizando los algoritmos básicos correspondientes…" (p. 43098). Según el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Infantil (Ministerio de Educación y ciencia [MEC], 2008) y revisando el currículo actual de educación infantil se establece que los niños deben desarrollar la capacidad "para resolver sencillos problemas matemáticos de su vida cotidiana" (p. 1025) y sugiere que al experimentar con objetos y materiales les ayuda a conocer la realidad a través de una perspectiva lógico-matemática.

El *enfoque conceptual* se basa en el aprendizaje de los procedimientos a través de la comprensión. Según este enfoque, el alumno es capaz de hacer matemáticas enseñándole el funcionamiento de los procedimientos. Las actividades están contextualizadas y se utilizan materiales manipulativos o dibujos para facilitar el aprendizaje. De una manera significativa, el niño aprende reglas, fórmulas y procedimientos con comprensión. Esta perspectiva constructivista se aleja del enfoque aplicacionista tradicional o de destrezas, que establece una rígida relación entre problemas y operaciones aritméticas, e intenta potenciar la lectura global con comprensión y evitar la búsqueda de palabras clave asociadas a determinadas operaciones aritméticas. Además, sugiere enseñar a resolver problemas en educación infantil centrándose en el razonamiento de cantidades y las relaciones que se establecen entre ellas y no tanto en las operaciones con números. El *enfoque de resolución de problemas* se opone al enfoque de destrezas. Se basa en desarrollar el pensamiento matemático mediante el razonamiento y la resolución de problemas tratando a las matemáticas como un proceso de investigación, una manera de pensar o búsqueda de regularidades para resolver problemas. El aprendizaje de procedimientos pasa a segundo plano. Este enfoque tiene en cuenta que los conocimientos de los niños son incompletos, pero poco a poco pueden ir construyéndolos y comprender las matemáticas mediante la resolución de problemas reales. El profesor hace de guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje sin dirigirlo. El *enfoque investigativo* mezcla el enfoque conceptual y el de resolución de problemas. Las matemáticas se perciben como una red de conceptos, procedimientos y procesos de investigación. Los alumnos construyen su conocimiento activamente mientras el profesor hace de guía y propone actividades previamente planificadas e investigativas (Baroody, 2003).

Siguiendo los criterios constructivistas, este trabajo final de grado elabora un plan de actuación alejándose del enfoque de destrezas o del método tradicional y se centra en la resolución de problemas de reparto igualatorio. Ofrece oportunidades a los alumnos para que los resuelvan antes del aprendizaje formal de las operaciones aritméticas, mediante sencillas acciones de repartir objetos manipulativamente y al conocimiento adquirido sobre el conteo en esta etapa educativa.

2.1.2. Problemas de reparto igualatorio

Los problemas de reparto igualatorio son problemas de varios pasos según la clasificación de Castro (2008), Castro y Frías (2013) y de Nesher (1999). Partiendo del enunciado: "Pedro tiene 8 caramelos y Juan 2. ¿Cuántos caramelos tendrá cada uno, si Pedro le da algunos a Juan para que tengan igual número de caramelos?" comprobamos que las operaciones a realizar para resolver el problema son las siguientes: 8+2=10; 10÷2=5; 8-5=3. Es un problema de 3 operaciones que combina la estructura aditiva y multiplicativa.

Según la metodología tradicional, los problemas de reparto igualatorio son problemas de dos o tres pasos que requieren utilizar 2 o 3 operaciones como la suma, la resta o la división para resolverlos. Este tipo de problemas resulta adecuado plantearlo a niños de cuarto de primaria en adelante que dominan estas operaciones aritméticas. Martínez y Sánchez (2013) llevan tiempo trabajando con los problemas de reparto igualatorio en primaria. Han creado los algoritmos abiertos ABN para resolver estos problemas y tienen dos ventajas. En primer lugar permiten que cada alumno los utilice a su ritmo y en segundo lugar hacen desaparecer las llevadas.

Los problemas de reparto igualatorio son dinámicos, por haber diferentes situaciones temporales y dos o tres acciones distintas. En estos problemas existe una situación inicial en la que hay dos cantidades que podemos conocer los datos de ambas o solamente una, a continuación hay una segunda situación, que puede ser la última del problema si la incógnita del enunciado se centra en preguntar por la cantidad de igualación. En esta segunda situación, la cantidad mayor cede parte de sus contadores a la cantidad menor y así se alcanza la igualación. Pero el problema puede llegar a tener una tercera situación cuando nos preguntan por la cantidad de objetos que tenía al principio la cantidad mayor y no nos la daban como dato.

La categoría de reparto igualatorio se resuelven mediante una, dos o incluso más operaciones. El reparto igualatorio no implica situaciones de igualación, donde una de las cantidades permanece fija y la otra es la que varía. En el reparto igualatorio las dos cantidades cambian y lo hacen de una manera simultánea y a la vez inversa. En este tipo de problemas no se requieren elementos externos que se incorporan o añaden, simplemente hay que igualar cantidades en algún momento para que desaparezcan las diferencias y con este paso previo se llegará a la solución del problema.

Los problemas de reparto igualatorio se resuelven mediante una suma, una resta e incluso el uso simultáneo de suma y resta. La suma que se utiliza en los problemas de reparto igualatorio es una suma truncada o interrumpida y existen diferencias con respecto a la suma tradicional. Por un lado, en la suma tradicional hay dos sumandos, uno se añade al otro hasta que se agota o desaparece el que se está añadiendo. Este procedimiento también se realiza en el reparto igualatorio hasta que los dos sumandos llegan al mismo cardinal, en este caso los dos sumandos no se agotan, se igualan. Por otro lado, en la suma tradicional el resultado final es el cardinal del sumando al que se le ha añadido la otra cantidad, mientras que en la situación de reparto igualatorio puede ser esa la solución si es la que nos piden, pero también puede ser que el resultado final sea la suma de las agregaciones que se han añadido hasta que se han igualado ambos sumandos. Es decir, que podemos tener dos soluciones. Si tenemos una suma simple como por ejemplo 18 + 12, se van acumulando los 12 elementos del segundo sumando, por ser la cantidad más pequeña, en el primero. Esto se realizará hasta que se agote el sumando 12, y el resultado será el total de la acumulación (30).

En la operación de reparto igualatorio se hace un trasvase desde la cantidad mayor a la menor, hasta que se igualan los dos sumandos. En este caso, cuando se traspasan 3, ambos sumandos se quedan con 15. El resultado que se obtiene no es la acumulación de uno de los dos sumandos, sino que puede ser la parte que se ha traspasado desde el sumando mayor al menor o la igualación.

Dentro de la categoría de reparto igualatorio existen 12 tipos de problemas diferentes en función del lugar en el que se coloque la incógnita y se pueden clasificar en dos tipos. Los primeros son los problemas de una etapa y los segundos son los problemas de dos o más etapas. Los problemas de una etapa son aquellos que se pueden resolver con una sola operación mientras que los de dos o más etapas requieren la aplicación de varias operaciones. Para resolver un problema de reparto igualatorio de dos etapas se pueden utilizar dos opciones diferentes. Para facilitar la comprensión de las operaciones se parte de un ejemplo en el que tenemos dos cantidades (18 y 12) y debemos intentar igualarlas. La primera opción consiste en: sumar las dos cantidades iniciales, a continuación dividirlas por dos para encontrar el punto de igualdad y después restar a la cantidad mayor ese resultado para averiguar el cardinal de traspaso. 3 hay que pasar a 12 para que ambas cantidades se igualen a 15, es decir haríamos la siguiente operación: 12 + 3 = 15.

Sumar las dos cantidades iniciales	18 + 12 = 30
Dividirlas por dos para encontrar el punto de igualdad	30 : 2 = 15
Restar a la cantidad mayor ese resultado para averiguar el cardinal de traspaso	18 – 15 = 3

La segunda opción consiste en: realizar la resta entre las dos cantidades que nos dan, a continuación esa diferencia se divide entre dos y así el resultado que se obtiene es más rápido, pero también es más difícil de conceptualizar ya que resulta más complicada su aplicación al compensar sobre todo si hay más de tres cantidades. Con el mismo ejemplo de 18 y 12 las operaciones a realizar son: 18-12=6; 6÷2=3 y dependiendo el lugar de la incógnita se realizarían estas operaciones 12+3=15 o 18–3=15.

Restar las dos cantidades iniciales	18 - 12 = 6
Dividirlas esa diferencia por dos para averiguar el cardinal de traspaso	6 : 2 = 3

Los problemas de reparto igualatorio son un tipo de problema que puede resultar difícil a simple vista porque ofrece sólo dos datos y puede comprender hasta tres operaciones aritméticas, pero la dificultad es menor si se resuelve de forma manipulativa.

2.1.3. Elementos que componen la categoría de los problemas de reparto igualatorio

La categoría está formada por cuatro elementos: dos cantidades desiguales, la cantidad que cede quien más tiene a quien menos tiene y la cantidad final igualada resultante. La cantidad mayor es la que va a disminuir durante el proceso de resolución del problema. En caso de varios sujetos puede haber más de una cantidad que disminuya para que se produzca la igualación. La cantidad menor es la que va a aumentar hasta que se iguale con la otra cantidad. Puede ser que más de una cantidad aumente para que se realice la igualación. La cantidad igualadora es la que se resta de la cantidad mayor y que se incrementa en la cantidad menor y así ambas cantidades se igualan. La cantidad igualada es a la que han llegado los sujetos para que se produzca la igualdad.

2.1.4. Tipos de problemas de la categoría de reparto igualatorio

En función de las cantidades mencionadas siempre conoceremos dos datos y el resto serán incógnitas. Y aunque no sé pregunte por una de ellas directamente, será necesario averiguarla para poder dar con la solución al problema. Para facilitar la comprensión de los diferentes tipos de problemas de reparto igualatorio se adjunta la tabla 3 en la que se exponen diferentes ejemplos de enunciados junto a su resolución aritmética especificando cuáles son los datos y las incógnitas. Partiremos siempre de este enunciado: Pedro tiene 8 caramelos (cantidad mayor) y Juan 2 (cantidad menor). Si Pedro le da a Juan 3 caramelos (cantidad igualadora), ambos tendrán 5 caramelos (cantidad igualada).

Tabla 3. *Diferentes tipos de problemas de reparto igualatorio*

Tipo de problema	**cm** 2	**CM** 8	**ci** 3	**CI** 5	**Ejemplo de enunciado y resolución aritmética**
Reparto igualatorio 1 RI 1	2	8	¿?	---	Pedro tiene 8 caramelos y Juan 2. ¿Cuántos caramelos tiene que dar Pedro a Juan para que tengan igual número de caramelos? 8+2=10; 10:2=5; 8-5=3. Problema de 3 operaciones, combinando estructura aditiva y multiplicativa.
Reparto igualatorio 2 RI 2	2	8	---	¿?	Pedro tiene 8 caramelos y Juan 2. ¿Cuántos caramelos tendrá cada uno, si Pedro le da algunos a Juan para que tengan igual número de caramelos? 8+2=10; 10:2=5; 8-5=3. Problema de 3 operaciones, combinando estructura aditiva y multiplicativa.
Reparto igualatorio 3 RI 3	¿?	8	3	---	Pedro tenía 8 caramelos. Le da 3 a Juan para que los dos tengan igual número de caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Juan? 8-3=5; 5-3=2. Problema de 2 operaciones, ambos de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 4 RI4	¿?	8	---	5	Pedro tenía 8 caramelos. Le da algunos caramelos a Juan, y ambos se quedan con 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Juan? 8-5=3; 5-3=2. Problema de 2 operaciones, ambos de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 5 RI 5	2	¿?	3	---	Juan tiene 2 caramelos. Si Pedro le da 3, ambos tendrán igual número de caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Pedro? 2+3=5; 5+3=8. Problema de 2 operaciones, ambos de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 6 RI 6	2	¿?	---	5	Juan tiene 2 caramelos. Pedro le da algunos más para que los dos tengan 5. ¿Cuántos tenía Pedro? *RI 6* 5-2=3; 5+3=8. Problema de 2 operaciones, ambos de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 7 RI 7	2	---	3	¿?	Juan tiene 2 caramelos. Si Pedro le da 3, ambos tendrán igual número de caramelos. ¿Cuántos caramelos tendrán los dos entonces? 2+3=5. Problema de 1 operación, de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 8 RI 8	2	---	¿?	5	Juan tiene 2 caramelos. Pedro le da algunos más para que los dos tengan 5. ¿Cuántos le da Pedro? 5-2=3. Problema de 1 operación, de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 9 RI9	¿?	---	3	5	Pedro da 3 caramelos a Juan para que los dos tengan 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Juan? 5-3=2. Problema de 1 operación, de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 10 - RI10	---	¿?	3	5	Pedro da 3 caramelos a Juan para que los dos tengan 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Pedro? 5-3=2. Problema de 1 operación, de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 11 - RI11	---	8	3	¿?	Pedro tenía 8 caramelos. Le da 3 a Juan para que los dos tengan igual número de caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen ahora cada uno? 8-3=5. Problema de 1 operación, de estructura aditiva.
Reparto igualatorio 12 - RI12	---	8	¿?	5	Pedro tenía 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos de tiene que dar a Juan para que ambos se queden con 5 caramelos cada uno? 8-5=3. Problema de 1 operación, de estructura aditiva.

* cm es la cantidad menor; CM, la cantidad mayor; ci, la cantidad igualadora; CI, la cantidad igualada.

3. Método

En este apartado, voy a explicar cómo he realizado el diseño del taller de resolución de problemas para abordar el estudio de los problemas de reparto igualatorio. Al diseño del taller, incluyendo las características de los problemas empleados, le seguirá una descripción detallada del desarrollo de las sesiones en las que detallaré las estrategias utilizadas por los niños en cada una de las sesiones.

3.1. Participantes y diseño del taller de resolución de problemas

Este taller de matemáticas se ha diseñado para el aula de P-5 de un centro escolar concertado, de una sola línea situado en Parets del Vallés, a unos 20 km. de Barcelona. Han participado 21 alumnos en total: 12 niñas y 9 niños. No había alumnos con necesidades educativas especiales.

La recogida de información de las sesiones ha consistido en la observación y toma de datos en las hojas de registro, entrevistas individuales a los niños y profesora y la realización de fotografías.

En un principio el número de sesiones que componían este taller de resolución de problemas era dieciséis, pero el proyecto era demasiado ambicioso. Por dificultades en el centro escolar para cuadrar horarios y por la limitación en la extensión del trabajo, decidí llevar a la práctica ocho sesiones en las que se incluían dos problemas de reparto igualatorio de varias etapas para averiguar cómo se enfrentaban los alumnos a estos problemas.

Como uno de los objetivos que persigue este taller era comprobar si los niños de P-5 eran capaces de resolver problemas de reparto igualatorio me planteé incluir previamente unas cuantas sesiones de problemas para que les sirvieran de entrenamiento y así los niños se fueran acostumbrando a trabajar la dinámica del taller y adquirieran experiencia para cuando llegaran estos problemas que quería estudiar. En un principio pensé hacer un taller con 3 problemas previos y después incluir los de reparto igualatorio intercalando otro problema completamente distinto, pero después de asistir a una sesión de matemáticas en P-5 para entrar en contacto con los alumnos y observar la dinámica que realizaban en el aula ordinaria, pensé que serían pocas sesiones y pocas oportunidades para que pudieran practicar y decidí que serían cinco los problemas previos para aumentar su bagaje. Hasta la sesión cinco los problemas son de entrenamiento, son problemas de una etapa de cambio creciente o decreciente, de combinación o de división agrupamiento. En la sesión seis, se plantea el primer problema de reparto igualatorio de dos etapas; en la sesión siete, el problema es de una etapa, de multiplicación; y en la sesión ocho, se propone el segundo problema de reparto igualatorio de tres etapas.

A la hora de diseñar el taller, he tratado de imaginar cómo resolverían los niños cada problema manipulativamente. He tenido en cuenta varios factores, entre ellos: los materiales a utilizar, las cantidades a manejar, el tipo de problema a plantear para que cada sesión fuera diferente a la anterior, la temporalización y cómo contextualizarlo para que motivara a los niños. En todo momento se ha pretendido que los niños tuvieran la máxima libertad en el uso de materiales y estrategias permitiendo que manipularan objetos muy diversos: ábacos, plastilina, palillos, tapones de botellas, piezas de construcción, fichas de dominó, papel, lápices, clips, banda numérica, regletas de Cuisenaire, etc. Al diseñar los enunciados se ha previsto que las cantidades con las que tenían que trabajar los niños no superaran el número 20 por ser la cantidad adecuada para niños entre 5 y 6 años. Aunque hay algunos niños que saben contar hasta más no todos logran este objetivo. Además, no se pretendía que el desconocimiento de la serie numérica fuera una de las dificultades que imposibilitara la realización del problema.

Todos los problemas planteados tienen la característica de ser completamente diferente al anterior, para evitar que se acostumbraran a la mecanización o la rutina y para que no utilizaran las mismas estrategias al resolverlo. Y también tienen una progresión, se empieza por los más fáciles de una operación aditiva hasta llegar a los que resultan más complicados por tener que realizar varios pasos como son los problemas de reparto igualatorio. Cada semana se plantean dos problemas y siempre el de reparto igualatorio es el segundo de la semana para que el primer problema semanal sirva de entrenamiento.

Para conseguir que los niños se implicaran en la realización de cada problema, necesitaba contextualizar los problemas y recurrí al uso de cuentos populares o contemporáneos para elaborar los enunciados de los problemas por ser un material atrayente y cercano para ellos. Esta idea la comparte De Castro, Walsh y otros (2009). Además al incluir la literatura infantil y plantear los problemas a través de un medio de comunicación como son las cartas que nos envían algunos personajes solicitando ayuda a los niños se fomenta la interdisciplinariedad por exigir a los niños el esfuerzo de explicar con sus palabras y dibujos las estrategias utilizadas, tal y como nos sugieren De Castro y Escorial (2007). A continuación se describen las ocho sesiones que se han realizado en el aula.

3.2. Desarrollo de las sesiones del taller

La duración de cada taller es de hora y media. Cada martes y jueves se realiza en horario de 9.00 a 10.30 h. Las etapas de cada sesión son las siguientes: lectura del cuento varias veces, visionado del cuento y planteamiento del problema a través de la recepción de una carta postal, realización del trabajo individual de cada niño para resolver el problema, puesta en común y consenso sobre la estrategia utilizada y el resultado para finalizar con la escritura de la carta como respuesta a la petición de ayuda.
Previamente a cada sesión se han realizado varias lecturas del cuento en el aula para que los niños se familiarizaran con los personajes que serán los protagonistas del enunciado del problema y así favorecer la comprensión del problema. Después del visionado del cuento en la pizarra digital, la profesora empieza la lectura de la carta en la que algún personaje pide ayuda a Tinet, un viejecito que es la mascota de la clase, y a los niños de P-5 para resolver un problema planteado en el cuento que se acaba de leer. A continuación empieza el trabajo individual de cada niño que consiste en intentar resolver el problema utilizando cualquier tipo de materiales de la clase y de estrategias. A los niños que acaban pronto, se les invita a que utilicen otros materiales y que hagan un dibujo en el que reflejen las diferentes acciones que aparecen en el problema o que ayuden a algún compañero. La profesora elige a varios alumnos que han resuelto el problema mediante materiales o estrategias diversas para que expliquen al resto de la clase cómo han llegado a estas cantidades y se pedirá a los niños que lleguen a un acuerdo sobre la solución que deben escribir para responder a la carta que solicitaba su ayuda.

3.2.1. Desarrollo de la sesión 1

Los niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de "juntar todos", consistente en representar la cantidad inicial (6 golosinas de Hansel), añadir la cantidad de cambio (5 golosinas que le da Gretel) y contar la cantidad final (las golosinas que tiene ahora Hansel). A la hora de contar los objetos ha habido niños que han decidido unir físicamente ambas cantidades y otros que han preferido no hacerlo. Estas variantes las voy a describir a continuación.

La sesión comienza con el visionado del cuento de Hansel y Gretel en la pizarra digital. Al finalizar el relato, la mascota de la clase, Tinet, tiene un sobre que ha recibido y que va dirigido a los niños y niñas de P-5 de la Escuela Acesco de Parets del Vallés en Barcelona. Al abrir el sobre hay una carta que Hansel y Gretel escriben a Tinet y a los niños pidiéndoles ayuda para resolver un problema que tienen. El problema que plantean es el siguiente: "Hansel tiene 6 golosinas y Gretel le da 5. ¿Cuántas golosinas tiene ahora Hansel?"

El enunciado del problema se ha repetido varias veces y se ha comentado a los niños que podían utilizar cualquier tipo de material, pero como no sabían qué hacer, la profesora ha preferido poner diferentes materiales en cada mesa: plastilina, palillos, ábacos, cubos encajables de construcción, tapones, vasos de plástico, papel, lápices y una banda numérica para cada alumno.

En el momento que han visto que tenían muchos objetos y materiales han empezado a jugar con ellos porque les llamaba la atención tanto colorido. Se les ha dejado unos minutos para que manipularan los diferentes materiales y a continuación se les ha vuelto a repetir el enunciado del problema y animándoles a que buscaran una respuesta. Varios niños han intentado resolver el problema con los dedos, pero han desistido por la dificultad del tamaño de las cantidades. Y han optado por elegir materiales para poder solucionarlo.

Estrategia de juntar todo uniendo físicamente ambas cantidades para contarlas
Montse ha formado dos conjuntos uno con 6 bolitas de plastilina y otro con 5. A continuación los ha colocado en fila, ha contado el total y ha dicho que la solución era 11 (Figura 1). Sonia ha resuelto el problema con cubos, y en su dibujo ha marcado la silueta de los cubos, pero se ha equivocado en el conjunto inicial ya que ha colocado 7 cubos, ha tachado el que le sobraba. En la fila de abajo ha dibujado el segundo grupo con 5 objetos y al final ha puesto los 11 objetos en fila para poder contar el total (Figura 2).

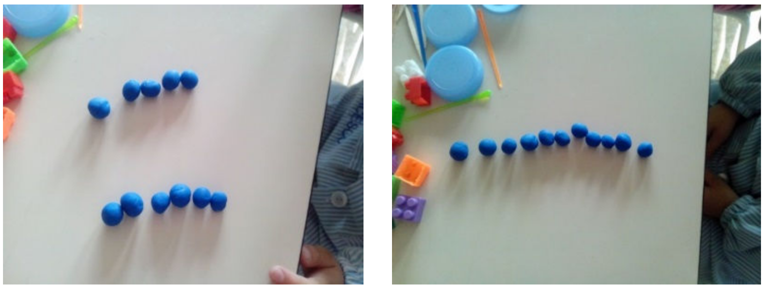

Figura 1. Estrategia de Montse

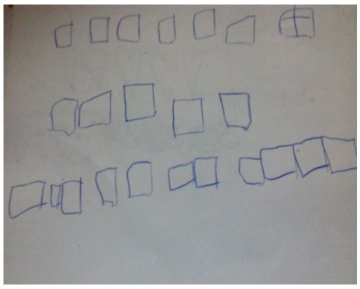

Figura 2. Estrategia Sonia

Sandra ha utilizado tapones de diferentes colores y una pieza de construcción por no tener tapones suficientes para formar el primer grupo de 6 objetos. Después ha cogido 5 tapones para representar el segundo grupo y los ha ordenado uno detrás de otro hasta llegar al extremo del papel, como no le cabían los 11 tapones en fila por superar los límites del papel, 2 de ellos los ha puesto en la parte superior. Los ha distribuido de esta forma para poder contar todos los tapones (Figura 3).

Figura 3. Estrategia de Sandra

Estrategia de juntar todo sin unir físicamente las cantidades para contarlas

Eva ha formado dos grupos con bolitas de plastilina, en uno ha puesto 6 bolitas y en el otro 5. Ha contado el total de los objetos sin unirlos físicamente y ha respondido 11 (Figura 4). Elsa ha decidido representar el primer grupo con tapones de color amarillo, pero como le faltaba un objeto ha cogido una regleta de Cuisenaire amarilla, así ha completado el primer grupo con 6 objetos. Para el segundo grupo ha cogido 5 tapones de color rojo más pequeños y los ha puesto en fila. Después ha contado los 11 objetos (Figura 5).

Figura 4. Estrategia de Eva

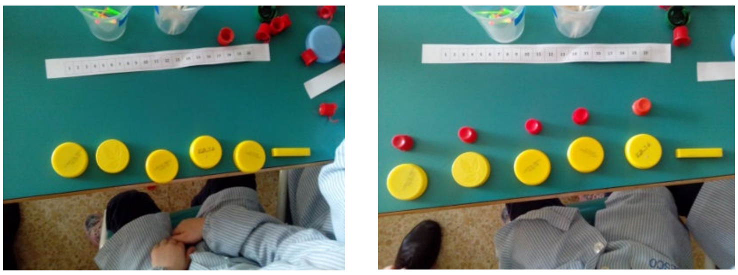

Figura 5. Estrategia de Elsa

Marta ha elegido cubos encajables de construcción (Figura 6) en un grupo ha colocado 6 objetos y en otro ha colocado 5 objetos. Los ha contado, ha respondido 11 y ha colocado un trozo de plastilina para marcar en la banda numérica el número total de objetos. En su dibujo ha representado una serie con 5 golosinas y otra serie con 6 golosinas. Ha escrito 11. Carmen ha dibujado un conjunto con 6 redondas y otro con 5. Ha escrito 11. Ambas respuestas son gráficas y numéricas (Figura 7).

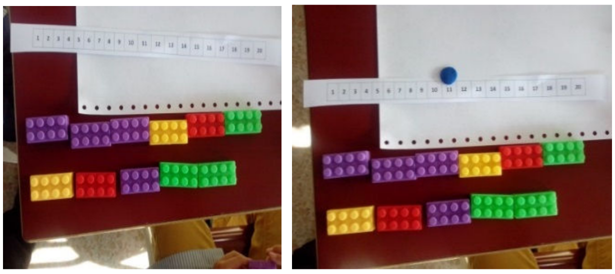

Figura 6. Estrategia de Marta

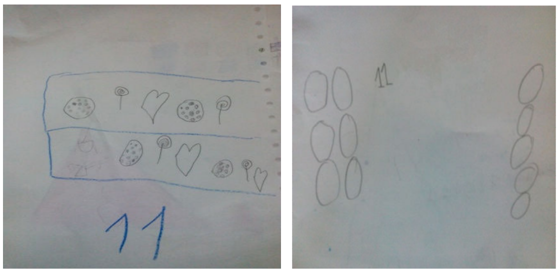

Figura 7. Dibujo de Carmen

Pol ha utilizado los dedos, pero como las cantidades eran grandes se ha dado cuenta de que no tenía suficientes dedos para expresar las dos cantidades y ha decidido cambiar de estrategia (Figura 8). Ha contado el primer grupo de seis objetos y en la otra mano ha puesto cinco dedos de golpe y ha continuado la serie numérica a partir del seis hasta llegar al número once. Después se le ha invitado a que utilizara otro material, y ha decidido usar la banda numérica y no ha necesitado el uso de otros objetos para llegar a la comprensión del problema. Pol ha hecho un dibujo de la casita de cholocate y ha colocado al lado a Hansel y a Gretel. Hansel tiene en un brazo las seis chucherías y en el otro tiene las cinco que le da Gretel. Las ha contado y ha escrito 11.

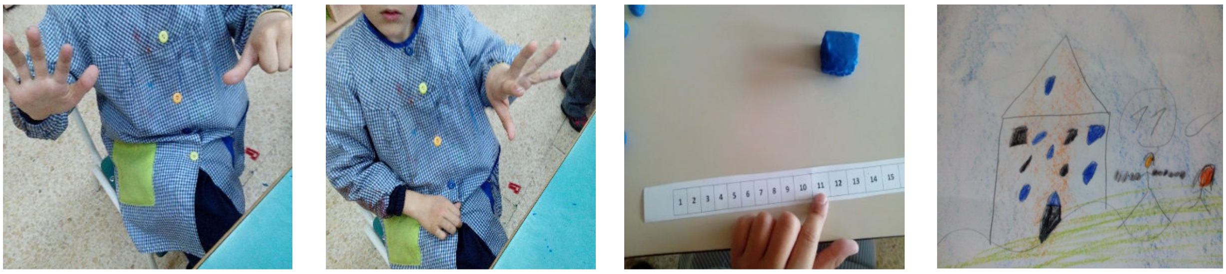

Figura 8. Estrategia de Pol

De los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, 5 niños han estado jugando con el material y no han intentado resolverlo. 16 alumnos han sabido resolver el problema, pero 5 de ellos han necesitado la ayuda de sus compañeros. 7 niños han utilizado la estrategia de modelización directa de objetos uniendo ambas cantidades físicamente para contarlas y 5 no han tenido necesidad de unirlas.

3.2.2. Desarrollo de la sesión 2

Los niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de "quitar", consistente en representar la cantidad inicial (las 12 maderas), quitar la cantidad de cambio (3 maderas que coge Gretel) y contar la cantidad final (las maderas que quedan en el cesto). Esto se ha hecho con distintas variantes que voy a describir a continuación. La sesión comienza con el visionado del cuento de Hansel y Gretel en la pizarra digital. La profesora recuerda la historia y muestra el sobre de Tinet con el enunciado del problema que es el siguiente: "En un cesto había 12 maderas. Gretel coge 3. ¿Cuántas maderas quedan en el cesto?".

Varios niños han intentado solucionar el problema con los dedos, pero han desistido por la dificultad de representar 12 unidades con las manos. Y han optado por elegir materiales para su resolución. La primera solución de los niños ha sido la de sumar las dos cantidades, coger 12 objetos y luego 3 más para llegar a 15. Al no ser correcta la estrategia utilizada, se les ha vuelto a leer el enunciado e invitado a que lo pensaran de nuevo. Pol ha cogido el ábaco y ha colocado las diez bolas rojas a un lado para formar una decena, y en la línea de abajo ha movido dos bolas amarillas para las unidades. Al juntar las 12 bolas ha representado las maderas que tenía el cesto al principio. Ha desplazado 3 bolas rojas, las maderas que había cogido Gretel, y ha contado el total de bolas que le quedaban y ha contestado 9 (Figura 9). Después ha pintado 12 maderas verdes y marrones, ha tachado 3. Ha escrito 9 como respuesta.

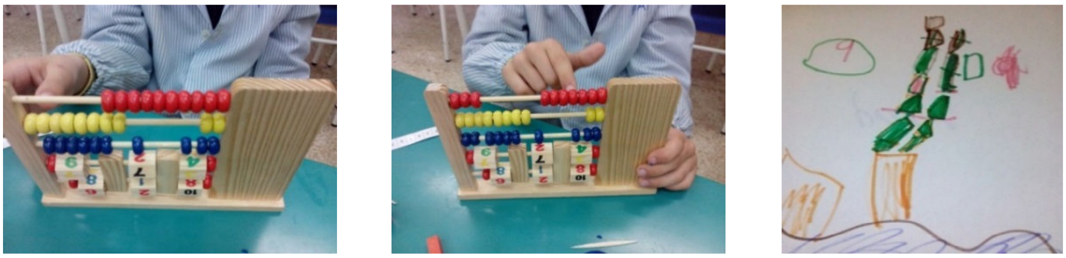

Figura 9. Estrategia de Pol

Irene ha representado la primera situación del enunciado con 12 bolitas de plastilina. Después ha cogido tres en la mano, ha contado las que quedaban en la mesa y ha dicho 9. Ha dibujado 12 redondas, ha escrito esa cantidad en un círculo que era la cantidad inicial y ha tachado 3 redondas que son las maderas que coge Gretel. Se le ha olvidado indicar que la respuesta era 9. La solución al problema ha quedado representada gráficamente, pero no de forma numérica (Figura 10). Juan ha cogido una bola de plastilina y ha clavado 12 palillos. Ha quitado 3 y ha contado el número de palillos que le quedaban clavados y ha contestado 9. También ha pintado una redonda con 12 palillos clavados y ha tachado 3. La solución al problema está representada gráficamente, pero no de forma numérica (Figura 11).

Figura 10. Estrategia de Irene

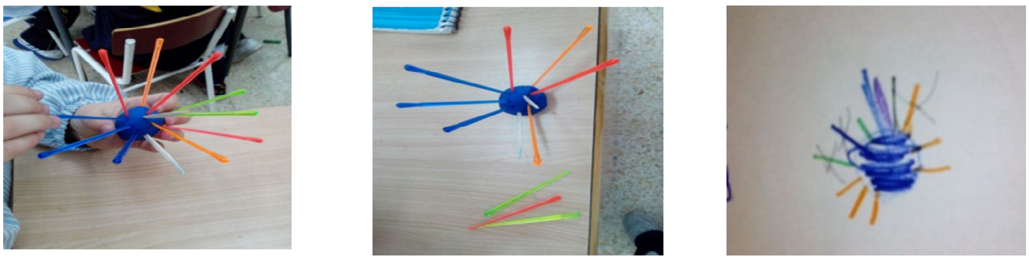

Figura 11. Estrategia de Juan

Julia ha utilizado tapones para representar las 12 maderas que tiene el cesto y los ha colocado encima de la banda numérica, pero no ha hecho una correspondencia entre el número de la banda numérica y los tapones, después ha apartado tres y ha contado el número de tapones que le quedaban y ha respondido 9. Después ha hecho un dibujo de trozos de madera, pero se ha equivocado porque ha puesto 13 en vez de 12. Ha seleccionado un conjunto con las 3 maderas que coge Gretel y ha escrito al lado 9, porque se acordaba de la respuesta, aunque no ha comprobado que le quedaban 10. Su respuesta gráfica es errónea, pero la numérica es correcta (Figura 12).

Figura 12. Estrategia de Julia

Montse ha utilizado palillos de plástico, pinzas de colores y la banda numérica. Ha colocado 12 objetos y ha hecho una correspondencia uno a uno entre el objeto y el número de la banda numérica. Ha quitado 3 objetos y su respuesta ha sido 9. Esta estrategia está entre medias de la estrategia de modelización con objetos y la modelización directa de numerales de la banda numérica. En su dibujo ha grafiado 12 redondas y ha escrito 12, después ha tachado 3 y ha escrito 9. Ha dado una respuesta gráfica y numérica (Figura 13).

Figura 13. Estrategia de Montse

Sandra y Sonia han utilizado piezas de construcción. Primero han colocado 12 objetos y luego han cogido tres y han respondido 15. Se les ha pedido que volvieran a pensarlo y después de varios intentos y decirles que no era 15. Sandra ha preguntado que de dónde cogía Gretel las maderas y se le ha contestado que del cesto. Entonces han vuelto a colocar los 12 objetos y han quitado 3 y han respondido 9. Sonia en su dibujo ha hecho 12 redondas y ha tachado 3. La solución al problema ha quedado representada gráficamente, pero no de forma numérica (Figura 14).

Figura 14. Estrategia de Sandra y de Sonia

De los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, 14 alumnos han resuelto el problema mediante la estrategia de quitar explicada al principio, 3 niñas lo han intentado, pero se han equivocado de estrategia y 5 niños han estado jugando con el material y no han intentado resolverlo.

3.2.3. Desarrollo de la sesión 3

Los niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de "añadir hasta", consistente en representar la cantidad inicial (las 4 maderas), añadir hasta llegar a la cantidad final (las 11 maderas) y contar la cantidad de cambio (el número de objetos añadidos). Esto se ha hecho con distintas variantes que voy a describir a continuación. La sesión ha comenzado con el visionado del cuento de Hansel y Gretel. A continuación la profesora ha leído la carta que enviaban Hansel y Gretel a los niños. El enunciado del problema dice lo siguiente: "Gretel tiene 4 maderas. ¿Cuántas maderas debe coger para tener 11?".

Los niños han empezado a decir números al azar: 11, 14, 8. Se les ha pedido que pensaran el resultado antes de decir una solución y que utilizaran material para encontrar la respuesta. Julia ha cogido tapones del mismo color. Ha formado dos grupos, el primero con cuatro tapones y para representar el segundo grupo ha ido añadiendo objetos hasta llegar al número 11. Después ha contado los 7 objetos que había añadido y ha dicho que la respuesta era 7 (Figura 15). Sonia ha utilizado piezas de construcción para representar el primer grupo de cuatro objetos y para formar el segundo grupo ha ido añadiendo tapones de plástico hasta llegar al número 11. Después ha contado el número de tapones y ha respondido 7 (Figura 16). Nuria ha cogido tapones de rotuladores y ha formado un grupo con 4 tapones y en el otro grupo ha colocado más tapones hasta llegar a 11. Después ha contado el número de objetos para asegurarse de que había 11 objetos y luego ha contado los objetos que había colocado en el segundo grupo y su respuesta ha sido 7. En su dibujo podemos ver un primer grupo de cuatro redondas y un segundo con 7 corazones y ha escrito 7. Su respuesta es gráfica y numérica (Figura 17).

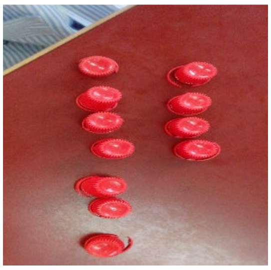

Figura 15. Estrategia de Julia

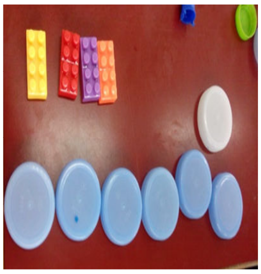

Figura 16. Estrategia de Sonia

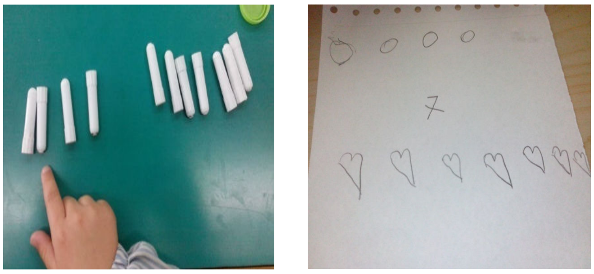

Figura 17. Estrategia de Nuria

Eva ha decido utilizar tapones de diferentes medidas y colores. En el primer grupo ha colocado 4 objetos y en el segundo grupo ha ido poniendo tapones hasta llegar al número 11. Después los ha contado y ha respondido 7. Como ha terminado muy rápido se le ha pedido que utilizara otro material y ha elegido palillos de madera. En una mano ha colocado el primer grupo de 4 objetos y en la otra mano el resto, hasta llegar a 11 (Figura 18).

Irene utiliza vasos, coloca cuatro en un lado y el resto en el otro grupo hasta llegar a los 11 objetos. Después cuenta el número de vasos del segundo grupo, y responde 7 (Figura 19). Andrés ha utilizado pinzas de la ropa. El primer grupo de 4 elementos lo ha formado con pinzas de color azul y rojo, y el segundo grupo lo ha formado con pinzas de color amarillo y verde hasta llegar al número 11. Ha puesto las cuatro pinzas, las ha contado y después ha continuado colocando pinzas: 5-6-7-8-9-10-11. Finalmente, ha contado el total de pinzas de color amarillo y verde y ha dicho 7. Ha cogido 7 (Figura 20).

Figura 18. Estrategia de Eva

Figura 19. Estrategia de Irene

Figura 20. Estrategia de Andrés

Nuria ha querido ayudar a Miguel y le ha prestado los tapones de rotulador a Miguel. Han cogido una bandeja y han colocado 4 tapones de rotulador blanco para formar el primer grupo. A continuación han añadido tapones de diferentes colores y medidas fuera de la bandeja para formar el segundo grupo y llegar a 11. Luego han contado los tapones añadidos y Miguel ha dicho 7 (Figura 21). Carmen ha utilizado piezas de construcción y las ha ido colocando una encima de la otra. Primero ha formado el primer grupo de 4 piezas y ha ido añadiendo hasta llegar a 11. Después ha contado las piezas añadidas (Figura 22). Juan ha preferido hacer un dibujo. Ha dibujado 4 trozos de madera sin pintar para representar el primer grupo y otros 7 de color negro para formar el segundo grupo, los ha contado para comprobar que tenía 11. Ha contado los trozos que había pintado y ha escrito 7 en su dibujo. Ha dado una respuesta gráfica y numérica (Figura 23).

Figura 21. Estrategia de Miguel

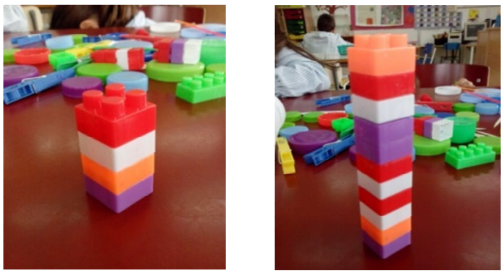

Figura 22. Estrategia de Carmen

Figura 23. Estrategia de Juan

Sandra al escuchar el problema ha utilizado la estrategia de modelización directa con los dedos de añadir hasta (Figura 24). Primero ha puesto cuatro dedos en una mano y después ha querido llegar a once, pero le faltaba un dedo y ha decidido hacerlo de otra manera. Ha utilizado la estrategia de conteo *contar hasta*. Y ha contado a partir del 4 en adelante hasta llegar al 11. Ha recitado la serie numérica a partir del 4 (5, 6, 7, 8, 9, 10, 11). Cada vez que decía la serie: 5 levantaba un dedo, 6 levantaba otro dedo, así hasta llegar a 11. Después ha contado los dedos que tenía levantados y ha dicho, 7. A continuación ha hecho un dibujo y ha representado el primer grupo de 4 objetos con redondas y el segundo grupo con corazones. Ha contado los corazones y ha escrito 7. Sandra está pasando de la modelización directa al conteo, esta situación es bastante significativa a esta edad y es un indicador de que va más avanzada que el resto de sus compañeros.

Figura 24. Estrategia de Sandra

De los 20 alumnos que asistieron a esta sesión, 15 alumnos han resuelto el problema mediante la estrategia de "añadir hasta", 3 de ellos han necesitado ayuda de sus compañeros para encontrar la solución. 5 niños han intentado resolverlo, pero no han conseguido encontrar la solución.

3.2.4. Desarrollo de la sesión 4

Varios niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de "quitar", consistente en representar la cantidad inicial (l0s 13 churros), quitar la cantidad de cambio (5 churros normales) y contar la cantidad final (los churros geniales). Otros en cambio lo han resuelto mediante la estrategia de modelización directa de "*añadir hasta*", consistente en representar la cantidad inicial (los 5 churros), añadir hasta llegar a la cantidad final (los 13 churros) y contar el número de objetos añadidos (los churros geniales). A continuación se describen las distintas variantes. La sesión comienza con el visionado del cuento de *El diario de Kim* en la pizarra digital. La profesora recuerda la historia y muestra el sobre de Tinet con el enunciado del problema que es el siguiente: "Kim hace 15 churros. 5 son churros normales ¿Cuántas churros geniales ha hecho?". La mayoría de niños al escuchar el enunciado del problema han cogido directamente las dos cantidades (13 y 5) y las han sumado. Después de repetir el enunciado varias ocasiones se les ha invitado a que pensaran el problema.

Estrategia de quitar

Elsa ha utilizado 13 piezas de dominó para formar el primer grupo. Después ha quitado 5 y ha contado el número de piezas que le quedaban. Ha respondido 8 (Figura 25). Montse ha utilizado palillos de plástico y de madera para crear el primer grupo de 13 objetos, después ha apartado 5 objetos y ha contado los que le quedaban. Ha contestado 8 (Figura 26).

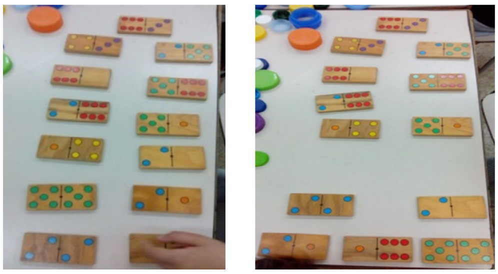

Figura 25. Estrategia de Elsa

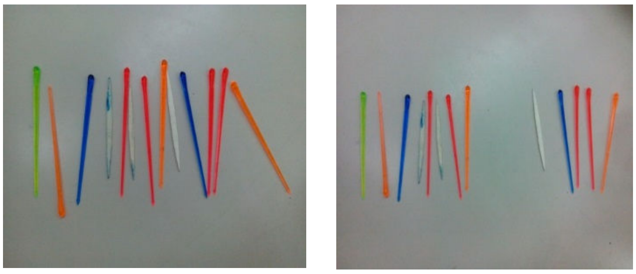

Figura 26. Estrategia de Montse

Pol ha colocado 13 tapones de diferentes colores y medidas. Ha separado 5 objetos para formar un grupo y para contar el resto los ha ordenado y ha respondido, 8 (Figura 27). Carmen ha cogido 13 piezas de construcción y las ha puesto en fila. A continuación ha apartado 5 y ha contado las que le quedaban y ha respondido 8 (Figura 28).

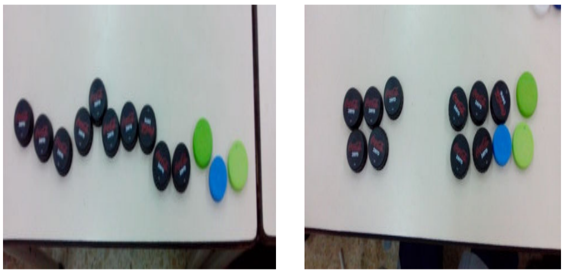

Figura 27. Estrategia de Pol

Figura 28. Estrategia de Carmen

Figura 29. Estrategia de Juan

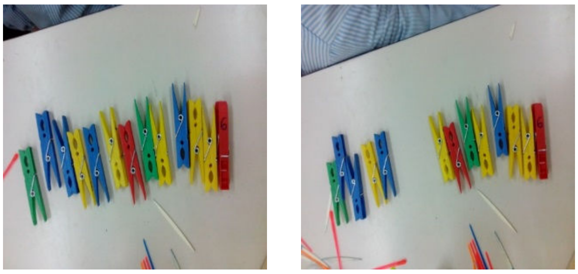

Figura 30. Estrategia de Miguel

Juan ha utilizado tapones de diferentes colores y medidas. Ha formado un primer grupo de 13 tapones y a continuación ha cogido 5. Después ha contado el número de tapones que le quedaban y ha respondido que 8 (Figura 29). Miguel ha utilizado pinzas para crear el primer grupo formado por 13 objetos y a continuación ha quitado 5 objetos. Ha dicho que la respuesta era 8 (Figura 30).

Estrategia de añadir hasta

Esther ha creado un primer conjunto con 5 objetos, después ha seguido poniendo cubos al lado hasta llegar a los 13 objetos. Luego ha contado los cubos que había añadido en este segundo conjunto y ha respondido 8 (Figura 31). Sonia ha utilizado palillos de plástico y de madera. Ha colocado 5 palillos de plástico y después ha seguido poniendo palillos de madera hasta llegar al número 13. Después los ha puesto todos juntos para contarlos. Ha respondido hay 13. Sí, pero eso ya lo sabíamos, 5 eran de un tipo, pero ¿cuántos son del otro? 8, ha sido su respuesta (Figura 32).

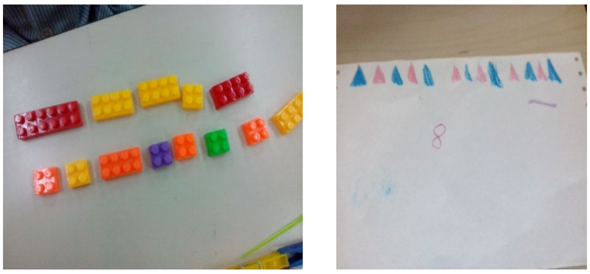

Figura 31. Estrategia de Esther

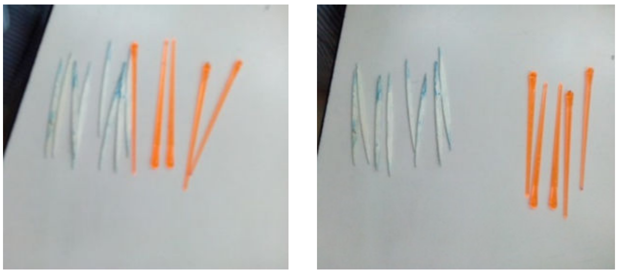

Figura 32. Estrategia de Sonia

Sandra ha cogido 5 cubos para representar los churros normales. A continuación ha puesto una pieza más grande para separar los dos tipos de churros y ha añadido cubos hasta llegar a los 13. Ha dibujado 13 churros y ha tachado 5. Ha escrito 8 en un círculo. Su respuesta es gráfica y numérica (Figura 33).

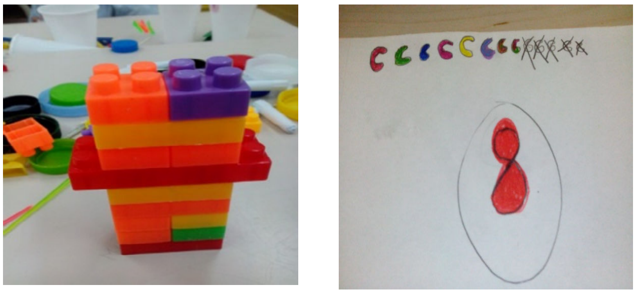

Figura 33. Estrategia de Sandra

Ambas estrategias

Nuria ha colocado 13 tapones en fila. Después ha quitado 5 y ha contado el número de tapones restante. Ha respondido 8. Ha hecho un dibujo con 5 redondas en un lado y 8 en el otro. Ha escrito 8. Ha utilizado la estrategia de quitar al usar tapones y la estrategia de añadir hasta en su dibujo (Figura 34).

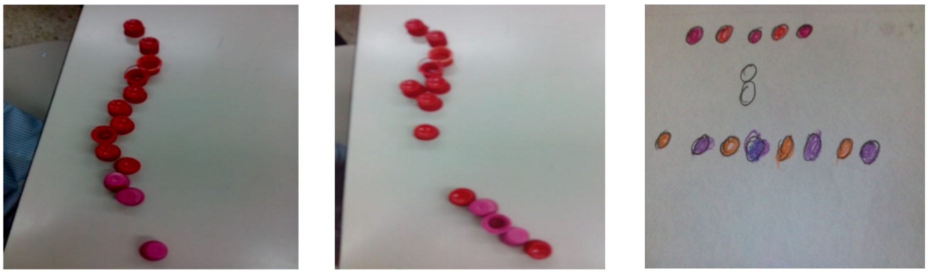

Figura 34. Estrategia de Nuria

Eva ha utilizado la banda numérica, ha contado hasta el número 13 y ha colocado un clip. Desde el 13 ha contado 5 y se ha quedado en el 8 y ha colocado un clip en ese número. Y ha dicho que la respuesta era 8. A continuación ha cogido 13 clips haciendo una correspondencia entre el objeto y el número de la serie numérica, ha retirado 5 objetos y el último clip se ha quedado en el 8 (Figura 35). Después ha retirado la banda numérica y ha empezado a contar clips hasta representar los 13 churros de la cantidad inicial, ha apartado a un lado 5 para distinguir los churros normales de los otros y ha contado los 8 que le quedaban, ha contestado que 8 eran los churros geniales. Ha pintado 13 corazones de color rojo y azul y ha escrito 13, después ha quitado 5 corazones rojos y ha contado los que le quedaban y ha escrito 8. La estrategia que ha utilizado está entre medias de la modelización directa con objetos y la modelización directa con numerales de la banda numérica (Figura 36). En primer lugar ha utilizado los numerales de la banda numérica sin emplear objetos, el clip colocado en los números 11 y 8 es un marcador. Después ha empleado la modelización directa apoyándose de objetos y usando la banda numérica. Ha finalizado contando los objetos sin la ayuda de la banda numérica.

Figura 35. Estrategia de Eva

Figura 36. Estrategia de Eva

De los 20 alumnos que asistieron a esta sesión, 8 alumnos han resuelto el problema mediante la estrategia de quitar y 3 alumnos lo han resuelto mediante la estrategia de añadir hasta. Una alumna ha utilizado ambas estrategias para resolver el problema. 8 niños no han sabido resolverlo.

3.2.5. Desarrollo de la sesión 5

Los niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de "medida", consistente en representar la cantidad inicial (l0s 12 churros), ir quitando la cantidad de cambio (3 churros en cada bolsa) y contar la cantidad final (el número de grupos obtenidos). A continuación se describen las distintas variantes. La sesión ha comenzado con el visionado del cuento del Diario de Kim. A continuación se ha abierto el sobre que tenía Tinet con el enunciado del nuevo problema que es el siguiente: Kim tiene 12 churros. Pone 3 churros en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas puede llenar?

Sandra ha cogido 12 objetos para representar el total de churros que tiene Kim, ha separado 3 objetos para formar el primer grupo, ha cogido otros 3 para formar el siguiente y así hasta que se le han acabado los objetos. Ha contestado que son 4 bolsas con 3 churros en cada bolsa. Ha dibujado en la parte superior 12 churros de diferentes colores que correspondería a la primera situación del enunciado del problema y 4 bolsas en la parte inferior que representaría la segunda situación. Ha distribuido mediante líneas los churros que van en cada bolsa. No hay una respuesta numérica, pero si gráfica que demuestra la comprensión del problema (Figura 37).

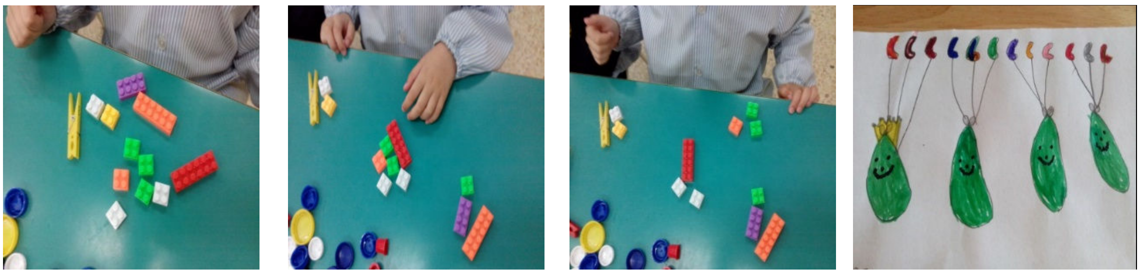

Figura 37. Estrategia de Sandra

Montse ha colocado 12 pinzas en fila para representar los 12 churros que tenía Kim. Para formar los diferentes grupos o bolsas ha ido repartiendo 3 objetos en cada grupo, hasta agotar el número de objetos a repartir. Ha respondido 4 bolsas con 3 churros cada una (Figura 38).

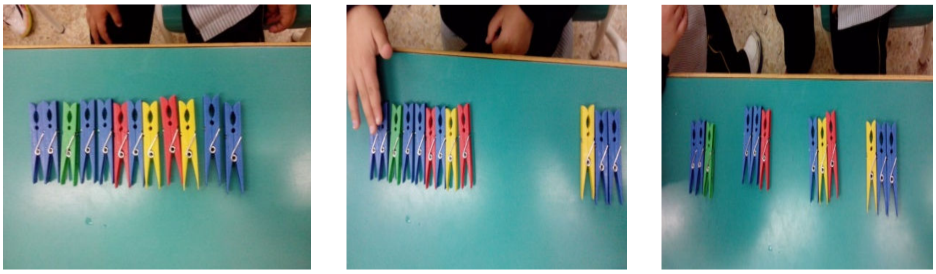

Figura 38. Estrategia de Montse

Irene ha utilizado 12 triángulos de diferentes medidas y formas. Ha separado un primer grupo de tres triángulos y ha continuado haciendo las agrupaciones hasta que ha agotado los triángulos. Ha contado el número de grupos y ha respondido 4 (Figura 39).

Figura 39. Estrategia de Irene

Marta ha utilizado palillos de plástico y de madera. Ha colocado los 12 palillos en fila y ha utilizado 4 tapones de rotuladores para ir formando los grupos de 3 objetos, de esta manera ha representado las 4 bolsas de churros con 3 churros en cada bolsa. En su dibujo ha representado 12 corazones y los ha agrupado de tres en tres. Su respuesta ha sido gráfica, pero no numérica (Figura 40).

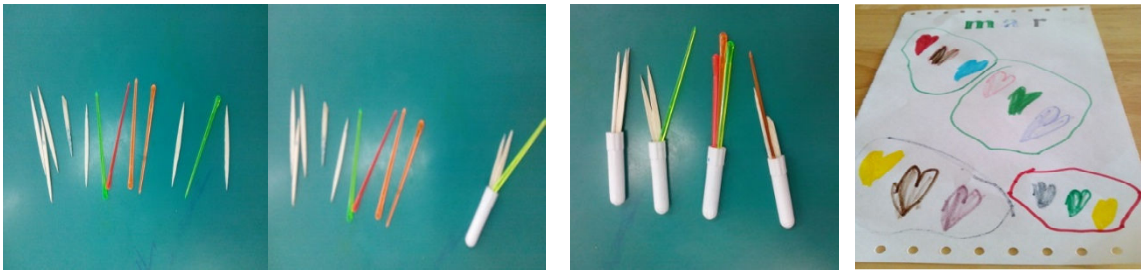

Figura 40. Estrategia de Marta

Carmen ha cogido 12 tapones de diferentes colores. Ha formado grupos de tres objetos. Ha contado el número de grupos y ha respondido 4. Su dibujo no representa la primera parte del enunciado, da la solución al problema. Ha dibujado 4 grupos con 3 objetos en cada uno. No hay una respuesta numérica, pero si gráfica (Figura 41). Irene ha dibujado 12 corazones, los ha pintado y ha escrito 12. Después los ha distribuido en grupos de tres y ha formado 4 grupos. Incluso ha dibujado el asa de las bolsas. No ha dado una respuesta numérica, pero si gráfica (Figura 42).

Figura 41. Estrategia de Carmen

Figura 42. Estrategia de Irene

Sonia ha utilizado el ábaco. Ha desplazado las 10 bolas rojas de la línea de arriba y luego 2 de la segunda fila, para representar los 12 churros que tenía Kim. Después ha ido agrupando 3 bolas rojas para formar la primera bolsa, otras 3 bolas rojas para la segunda bolsa y ha seguido hasta formar las 4 bolsas. Su respuesta ha sido 4 (Figura 43).

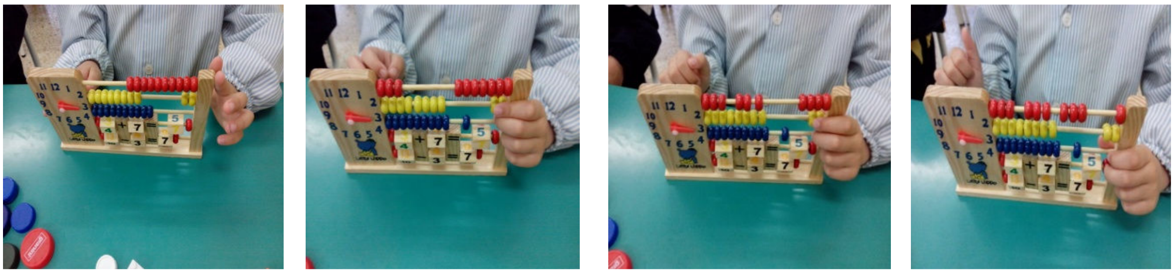

Figura 43. Estrategia de Sonia

De los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, todos han resuelto el problema mediante la estrategia de medida. 6 han necesitado ayuda o se han fijado en cómo lo realizaban sus compañeros y no han comprendido el problema.

3.2.6. Desarrollo de la sesión 6

La sesión ha comenzado con el visionado del cuento El Cerezo que habla. A continuación se ha abierto el sobre con el enunciado del nuevo problema: "El asno tiene 10 peras. Tinet tiene 6 peras. El asno le da varias a Tinet para que los dos tengan las mismas. ¿Cuántas peras tendrá cada uno?" Los niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de "redistribución", que consiste en ir pasando objetos del grupo que tiene más cantidad al que tiene menos hasta conseguir la igualación. La solución a este problema se obtiene al indicar la cantidad de igualdad. Al colocar los objetos, ha habido alumnos que han ordenado los materiales realizando una correspondencia uno a uno y otros que no lo han hecho. A continuación se describen las distintas variantes.

Estrategia de redistribución por unidades con correspondencia uno a uno

Sandra ha cogido 10 tapones para representar las peras que tiene el asno y 6 tapones para representar las que tiene Tinet. Las ha colocado en fila y ha empezado a pasar objetos del grupo que tenía más al que tenía menos. Ha cogido un objeto, lo ha puesto en el grupo más pequeño y ha contado el número de objetos en cada grupo, ha dicho 7 y 9. Ha cogido otro objeto del grupo mayor y lo ha puesto en el otro grupo. Ha contado el número de objetos de cada grupo y ha dicho 8 y 8. Ha respondido: los dos tienen 8. Sandra ha dibujado caras de muñecos. Ha representado un primer grupo de 10 objetos y el segundo grupo está formado por 6 objetos. A continuación ha pasado dos objetos del grupo que tenía más, los ha tachado y se los ha dibujado al que tenía menos. Su representación gráfica tiene además una flecha indicando la dirección del traspaso de objetos. También ha redondeado la solución (Figura 44).

Figura 44. Estrategia de Sandra en la que se aprecia la secuencia del paso de objetos de un grupo al otro

Nuria ha utilizado pinzas para representar el grupo más grande de 10 objetos y tapones para el grupo más pequeño de 6 objetos. Ha pasado un objeto del grupo mayor y ha contado el número de objetos de cada grupo. Ha cogido otro objeto del grupo mayor y lo ha puesto en el grupo menor. Ha contado el número de objetos y ha dicho 8 (Figura 45). Montse ha utilizado palillos. Ha colocado un primer grupo con 10 y el otro con 6. Ha ido pasando objetos del grupo que tenía más al que tenía menos hasta que ha conseguido que se igualaran. Ha respondido 8 (Figura 46).

Figura 45. Estrategia de Nuria

Figura 46. Estrategia de Montse

Juan ha utilizado piezas de construcción para representar los dos grupos de 10 y 6 objetos. Ha hecho dos torres y ha ido pasando piezas de un grupo a otro hasta que los dos tenían la misma altura. No ha necesitado contar los objetos cada vez que pasaba piezas porque la altura no coincidía. Cuando ya ha conseguido la igualación de los objetos ha contado los de un grupo y ha respondido 8 (Figura 47).

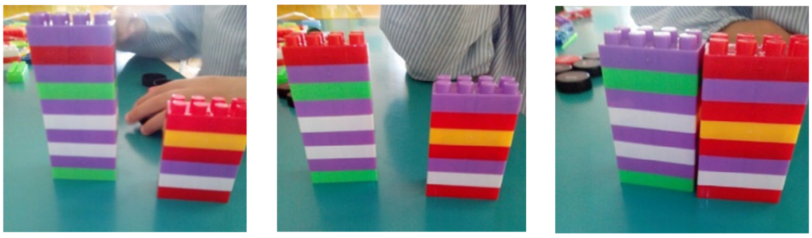

Figura 47. Estrategia de Juan

Estrategia de redistribución por unidades sin correspondencia uno a uno
Eva ha intentado resolverlo a través del ábaco, ha colocado el grupo de más objetos arriba y el de menos abajo, pero no sabía cómo hacerlo. Se le ha invitado a que utilizara otro material y ha cogido piezas de construcción. Ha colocado un grupo de 10 objetos y otro de 6. Ha ido desplazando objetos del grupo mayor al que tenía menos, ha contado el número de objetos de cada grupo y ha seguido moviendo objetos hasta que ha conseguido igualar los dos grupos y ha respondido 8 (Figura 48).

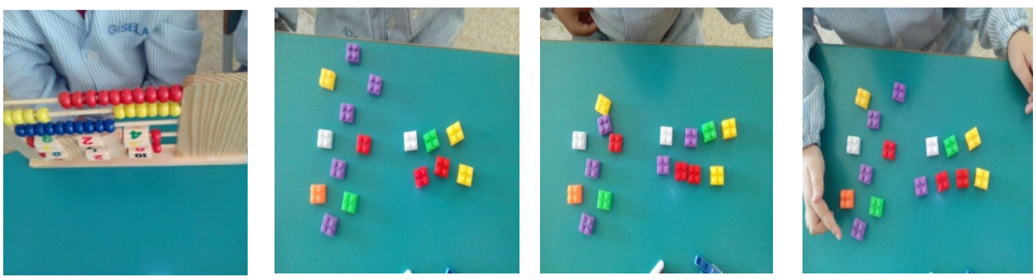

Figura 48. Estrategia de Eva

Julia ha utilizado palillos de colores y de madera, el grupo de 10 objetos lo ha colocado en vertical y el de 6 lo ha puesto en horizontal. Ha pasado dos objetos del grupo vertical que tenía más al horizontal y ha contado el número de objetos hasta igualar ambos grupos. Ha respondido 8. También ha hecho un dibujo y ha representado un primer conjunto con 10 palillos y otro con 6. Luego ha tachado dos palillos del grupo que tenía más objetos y los ha colocado en el que tenía menos. La respuesta de su dibujo ha sido gráfica, pero no numérica (Figura 49). Elsa ha colocado 10 tapones en un grupo y 6 en el otro grupo, ha ido pasando objetos uno a uno y contado el número de objetos hasta conseguir igualar ambos grupos. Ha respondido 8 (Figura 50).

Figura 49. Estrategia de Julia

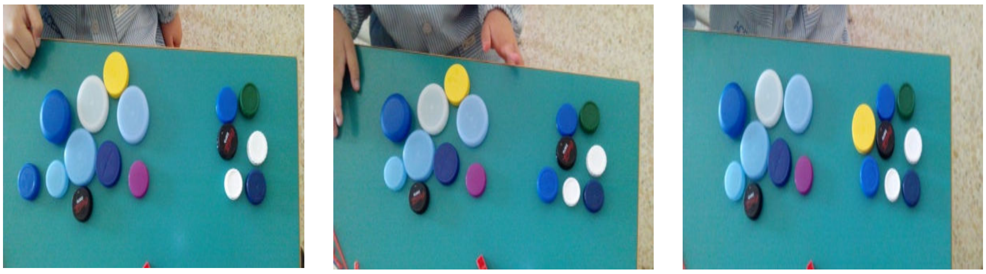

Figura 50. Estrategia de Elsa

Irene ha utilizado tapones para crear el grupo más grande de 10 objetos y palillos para crear el grupo de 6 objetos. Después ha pasado directamente 2 objetos al otro grupo. Ha contado la cantidad de objetos en cada grupo y ha respondido 8. A continuación ha hecho un dibujo, ha puesto 10 redondas marrones para representar el primer grupo y 6 rojas para representar el segundo, después ha tachado dos redondas del grupo mayor, pero se le ha olvidado añadirlas al grupo más pequeño. A su dibujo le falta la representación de la última parte de la acción que es añadir al grupo más pequeño los objetos que ha tachado. Tampoco hay solución numérica (Figura 51). Carmen ha dibujado corazones, los del grupo de 10 son de color marrón y los de color verde son de 6 objetos. Ha tachado dos corazones del grupo mayor y los ha puesto en el grupo menor. Ha contado el número de objetos y ha redondeado la solución (Figura 52).

Figura 51. Estrategia de Irene

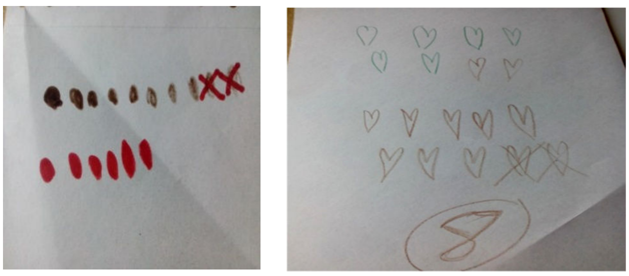

Figura 52. Estrategia de Carmen

Sonia ha hecho un dibujo con 10 caras para representar un grupo y otra con 6 para representar el otro grupo. Después ha tachado los dos objetos del grupo de mayor cantidad y los ha colocado en el que tenía menos. Además ha indicado con flechas el traspaso de los objetos de un grupo a otro (Figura 53). En el dibujo de Nuria hay una representación de dos grupos. Al principio había grafiado un primer grupo con 10 niños y otro con 6 (niños y corazones). Después ha tachado dos niños del grupo de arriba que es el que tenía más cantidad y los ha colocado en el que tenía menos y así ha conseguido igualar los dos grupos. Ha dado una respuesta gráfica, pero no numérica (Figura 54).

Marta ha dibujado estrellas grises para el grupo de 10 objetos y corazones rojos para el grupo de 6 objetos. Ha tachado dos estrellas con color marrón y ha añadido dos corazones de color marrón para conseguir igualar ambos grupos. Ha dado una respuesta gráfica, pero no numérica (Figura 55). Javier ha dibujado 10 redondas para representar el primer grupo y 6 para el segundo grupo. Para separarlos ha hecho una línea. A continuación ha tachado dos redondas y las ha dibujado en el grupo más pequeño. No ha dado una solución numérica (Figura 56).


Figura 53. Estrategia de Sonia


Figura 54. Estrategia de Nuria


Figura 55. Estrategia de Marta

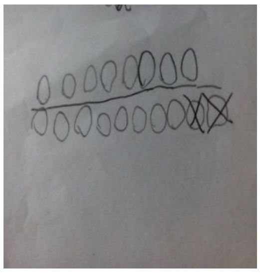
Figura 56. Estrategia de Javier

De los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, todos han resuelto el problema mediante la estrategia de medida. 6 han necesitado ayuda o se han fijado en cómo lo realizaban sus compañeros y no han comprendido el problema.

3.2.7. Desarrollo de la sesión 7

La sesión ha comenzado con el visionado del cuento El Cerezo que habla. A continuación se ha abierto el sobre con el enunciado del nuevo problema: “Tinet ha cogido 5 ramilletes de cerezas y cada ramillete tiene 2 cerezas. ¿Cuántas cerezas ha cogido Tinet? Los niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de “agrupamiento”, consistente en formar 5 grupos con 2 objetos en cada grupo. Ha habido niños que han colocado los objetos de dos en dos y otros que han formado primero los cinco grupos con un solo objeto y luego han añadido uno más en cada grupo par que tuviera los dos objetos. La solución es el número total de objetos. A continuación se describen las distintas variantes. Al principio los niños decían 7, porque sumaban las dos cantidades. Se ha vuelto a leer el enunciado del problema y se les ha invitado a que pensaran y utilizaran material para representar el problema.

Colocación de dos en dos
Marta ha utilizado tapones. Ha colocado primero los tapones de dos en dos para formar los 5 grupos. Ha contado el número de tapones y ha respondido 10. En su dibujo ha pintado cinco ramilletes de dos cerezas cada uno. Ha dado una solución gráfica, pero no numérica (Figura 57).


Figura 57. Estrategia de Marta

Sandra ha utilizado diferentes materiales para representar los cinco grupos. Ha cogido dos tapones para representar un grupo, dos piezas de construcción para el segundo grupo, dos pinzas para el tercer grupo, dos tapones de rotulador para el cuarto grupo y dos palillos para el quinto grupo. Ha contado el número de objetos y ha respondido 10 (Figura 58).

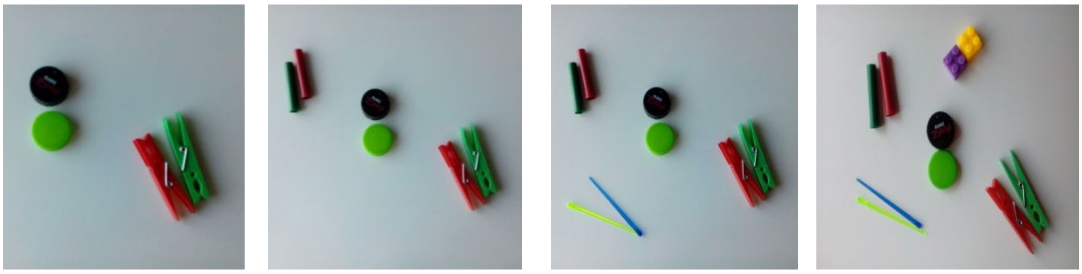

Figura 59. Estrategia de Sandra

Javier ha utilizado palillos y los ha ido colocando de dos en dos hasta formar los 5 grupos. Después ha contado el número de objetos y ha respondido 10. En su dibujo ha representado los 5 ramilletes de dos cerezas. Ha dado una respuesta gráfica, pero no numérica (Figura 60).

Figura 60. Estrategia de Javier

Eva ha utilizado el ábaco. Lo primero que ha hecho ha sido representar el primer grupo de dos objetos desplazando dos bolas. A continuación, ha ido moviendo más bolas para ir formando el resto de grupos y así hasta conseguir los cinco grupos con dos objetos en cada uno. Después ha contado el número de objetos y ha respondido 10. Su estrategia es de modelización directa de agrupamiento (Figura 61).

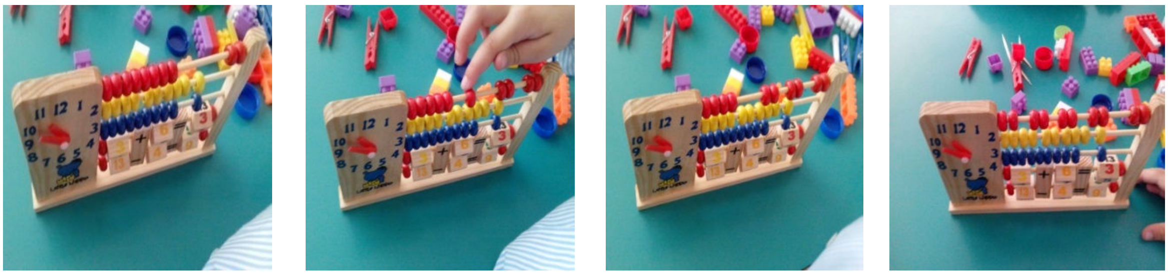

Figura 61. Estrategia de Eva

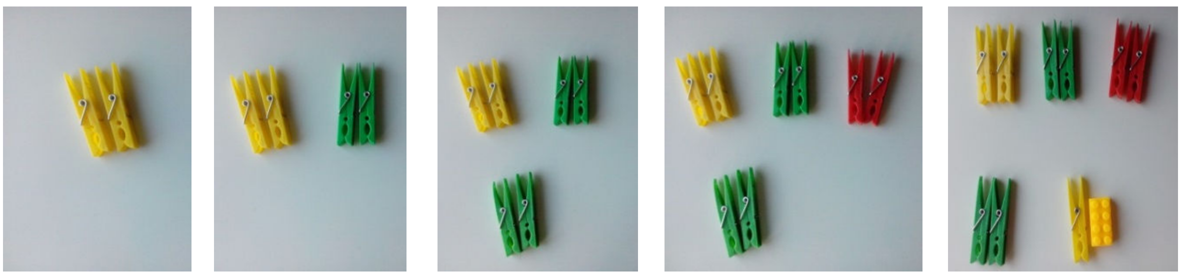

Figura 62. Estrategia de Sergio

Sergio ha utilizado pinzas y una pieza de construcción. Ha colocado los objetos de dos en dos para representar los diferentes grupos. Ha contado el número de objetos y ha respondido 10. Se ha fijado en sus compañeros (Figura 62).

Colocación 1 a 1
Pol ha utilizado piezas de construcción. Primero ha cogido 5 para representar los 5 grupos y cuando ya estaban definidos los grupos, a cada uno le ha añadido otra pieza para representar los dos objetos por grupo. A continuación ha contado el número de objetos y ha respondido 10. Su estrategia ha sido de modelización directa de agrupamiento y ha realizado una correspondencia uno a uno. En su dibujo se ven definidos cinco grupos y cada uno de ellos tiene dos objetos que están unidos entre sí. Ha dado una respuesta gráfica, pero no numérica (Figura 63).

Figura 63. Estrategia de Pol

Juan ha utilizado tapones y piezas de construcción. Ha colocado 5 objetos para representar los 5 grupos y no entendía que cada grupo tenía 2 objetos. Se ha fijado en sus compañeros y a continuación ha ido colocando un objeto más por grupo hasta completar los 2 objetos por grupo. Ha contado el número total de objetos y ha respondido 10. Ha dibujado corazones para representar los 10 objetos, pero sin agruparlos. Su respuesta es gráfica, pero no numérica. Ha necesitado ayuda (Figura 64).

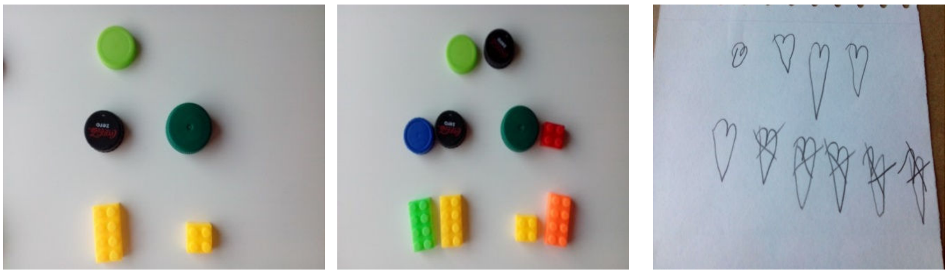

Figura 64. Estrategia de Juan

De los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, todos han resuelto el problema mediante la estrategia de medida. 6 han necesitado ayuda o se han fijado en cómo lo realizaban sus compañeros y no han comprendido el problema.

3.2.8. Desarrollo de la sesión 8
Los niños han resuelto el problema mediante la estrategia de *modelización directa* de “redistribución”, consistente en ir pasando objetos del grupo que tiene más cantidad al que tiene menos hasta conseguir que los dos grupos se igualen. La solución a este problema se obtiene igualando ambos conjuntos y contando el número de objetos que le ha cedido el grupo con mayor cantidad al que tenía menos. Algunos alumnos han realizado la correspondencia uno a uno y otros que no lo han hecho. La mayoría de los niños ha conseguido llegar sin dificultades hasta la igualación de los dos grupos, pero ha sido necesario recordarles la pregunta del enunciado para que dieran la respuesta adecuada. A continuación se describen las distintas variantes.

La sesión ha comenzado con el visionado del cuento El Ratoncito de los dientes. Se ha abierto el sobre con el enunciado del nuevo problema: "Yo tengo 8 dientes y el ratoncito tiene 2. ¿Cuántos dientes tengo que dar al ratoncito para que los dos tengamos el mismo número de dientes?". Lo primero que han contestado los niños ha sido 10 porque sumaban las dos cantidades. Se ha vuelto a leer el enunciado del problema y se les ha invitado a que pensaran de nuevo el resultado y utilizaran material para representar el problema.

Sandra ha utilizado la estrategia de modelización directa con los dedos para representar el problema. Ha puesto 8 dedos para representar los dientes que tiene uno y luego los otros 2. Ha extendido los 10 dedos. En seguida se ha dado cuenta de que para que los dos tuvieran la misma cantidad debían tener 5 dientes cada uno. Ha respondido: me parece que son 3. Para que confirmara su respuesta, se le ha pedido que utilizara materiales (Figura 65).

Figura 65. Estrategia de Sandra

Alumnos que han utilizado diferente material o color para cada grupo y han realizado una correspondencia uno a uno

Carmen ha utilizado palitos de madera de color verde y naranja. Ha colocado en la parte superior 8 palitos de color verde y en la parte inferior ha colocado 2 de color naranja. Ha empezado a pasar palitos del grupo con más objetos al que tenía menos y los ha ido colocando haciendo una correspondencia uno a uno. Cuando ha visto que había conseguido igualar el grupo ha dicho que ya estaba que eran 5. Pero al recordarle la pregunta del enunciado al mirar el grupo que tenía los palitos de color naranja ha respondido 3 y los ha desplazado para separarlos. Al elegir dos colores diferentes le ha resultado muy fácil visualizar la respuesta (Figura 66).

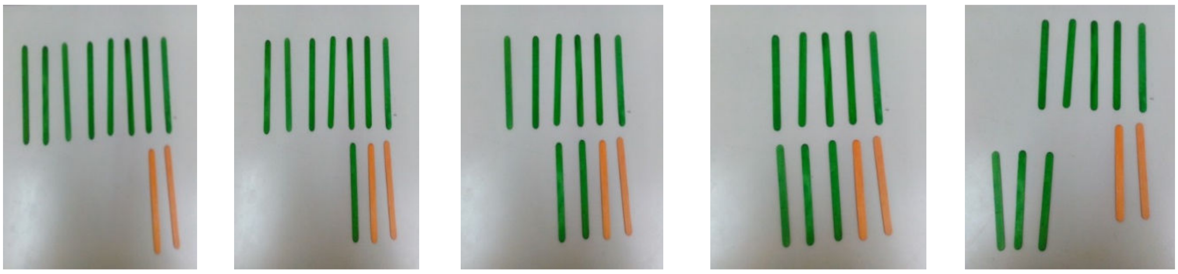

Figura 66. Estrategia de Carmen

Julia ha utilizado tapones y piezas de construcción. Con los tapones ha formado el grupo de 8 objetos y con las piezas el grupo de 2 objetos. Ha ido pasando uno a uno tapones del grupo con mayor cantidad al que tenía menos hasta conseguir la igualación a 5 objetos. Ha contado el número de tapones que había en el grupo de las piezas de construcción y ha respondido 3. Al haber utilizado diferente material para representar los dos grupos le ha sido más fácil dar con la respuesta al enunciado al ver claramente que tenía 2 piezas de construcción al principio y que los tapones añadidos eran 3. Julia ha dibujado 10 corazones rojos. Ha pintado el primer grupo con 8 corazones y el segundo grupo con 2 corazones. Ha tachado 3 corazones del grupo que tenía mayor cantidad y ha indicado con flechas que esos corazones pasaban al grupo que tenía menos. De esta manera ha conseguido igualar a 5 ambos conjuntos y ha escrito 3 como respuesta al problema. Su respuesta ha sido numérica y gráfica (Figura 67).

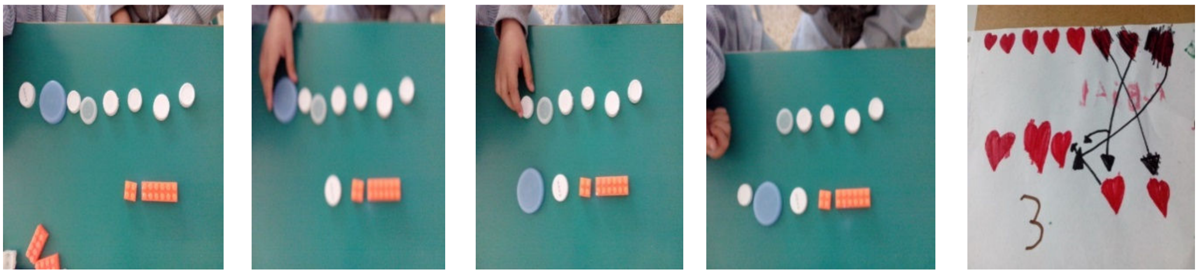

Figura 67. Estrategia de Julia

Esther ha cogido tapones de color verde claro y oscuro. Ha formado un grupo con 8 tapones de color verde claro y otro con 2 tapones de color verde oscuro. Ha pasado objetos del grupo con más cantidad al que tenía menos. Ha contado el número de tapones y ha seguido pasando objetos y contando, así hasta conseguir igualar los dos grupos a 5 objetos en cada grupo. Ha respondido 5. Pero al leerle el enunciado del problema ha respondido 3 son los dientes que le ha dado la ratoncita al ratoncito. Al haber elegido diferentes colores para cada grupo le ha resultado más fácil visualizar la respuesta porque recordaba que los dos tapones de color oscuro eran los que había al principio y los de color claro eran los añadidos. En su dibujo no ha representado la situación inicial de 8 y 2 objetos, se ha centrado en dibujar con caramelos la igualación de los dos grupos a 5 objetos cada uno. Ha dado una respuesta numérica y ha escrito 3 (Figura 68).

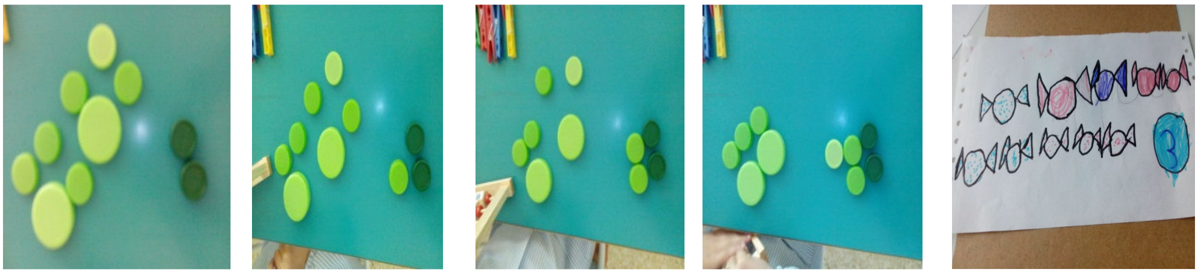

Figura 68. Estrategia de Esther

Andrés ha utilizado piezas de construcción y ha formado dos torres una con 8 piezas y otro con 2 piezas. A continuación ha ido quitando piezas del grupo que tenía más elementos y los ha añadido al que tenía menos. Así hasta igualar ambas torres a 5 objetos. Su respuesta ha sido 5. No ha sabido continuar con el problema. Ha necesitado ayuda (Figura 69). Elsa ha dibujado 8 dientes para formar un primer grupo y otros 2 dientes para formar el segundo grupo. A continuación ha tachado 3 dientes del grupo con mayor cantidad y con una flecha ha indicado que se desplazaban al otro grupo con 2 dientes. De esta manera, ha grafiado la igualación a 5 objetos. Además ha escrito un 3 indicando que esa era la cantidad de dientes que le había cedido la ratoncita al ratoncito. Ha dado una respuesta gráfica en la que ha grafiado todas las situaciones del enunciado del problema y además ha dado una respuesta numérica (Figura 70).

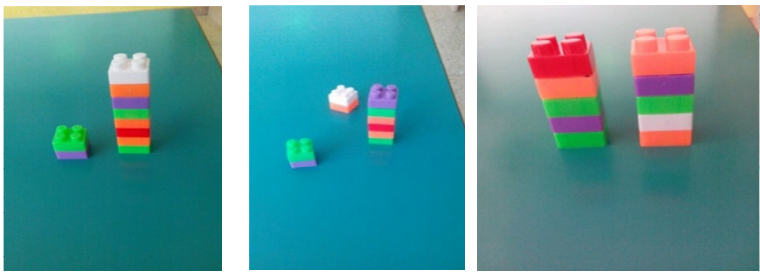

Figura 69. Estrategia de Andrés

Figura 70. Estrategia de Elsa

Alumnos que han utilizado el mismo material para cada grupo y no han realizado una correspondencia uno a uno

Sandra ha cogido 10 tapones de diferentes medidas y colores y ha formado los dos grupos de 10 y 2 objetos cada uno. Ha mirado el grupo que tenía 2 objetos y ha cogido 3 tapones del grupo que tenía más cantidad y se los ha pasado al otro grupo. Y ha dicho hay 5 en cada grupo. Y al preguntarle por el número de dientes que le tiene que dar la ratoncita al ratoncito ha respondido 3. Y los ha separado del grupo para que se vieran los que le daba. No le ha costado mucho dar con la respuesta porque al principio los elementos del grupo que tenía menor cantidad eran iguales y los objetos que se han añadido eran de diferente color, y con un simple vistazo ha distinguido los objetos añadidos. Ha utilizado la estrategia de modelización directa con material. Sandra ha dibujado bolitas de color marrón para representar el primer grupo con 8 objetos y bolitas verdes para representar el segundo grupo de 2 objetos, se había equivocado y ha tachado un objeto. De las últimas bolas del grupo con mayor cantidad ha dibujado flechas indicando que esos tres objetos pasaban al grupo que tenía menor cantidad. Así igualaba a 5 el número de objetos por grupo. Ha escrito 3 como respuesta al problema. Su respuesta ha sido numérica y gráfica (Figura 71).

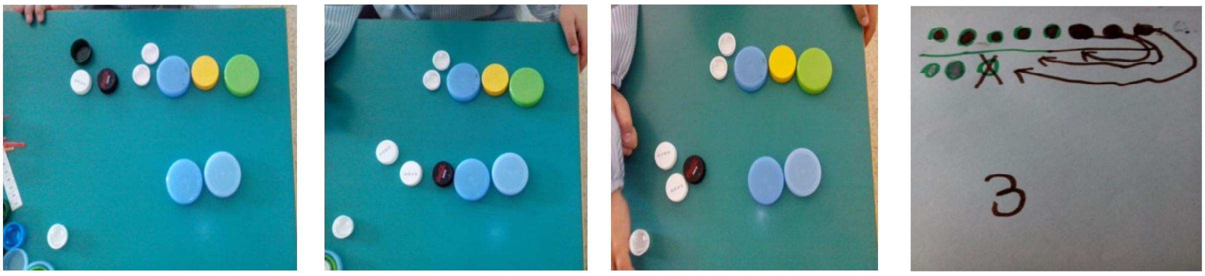

Figura 71. Estrategia de Sandra

Marta ha cogido 10 objetos y ha formado dos grupos uno de 8 elementos y el otro de 2. Ha pasado tres objetos del grupo con mayor cantidad al que tenía menos y ha igualado ambos grupos. No ha sabido continuar el problema (Figura 72). Nuria ha representado la situación inicial con 8 y 2 objetos, después ha tachado 3 objetos del grupo que tenía mayor cantidad y los ha dibujado en el grupo que tenía menos. De esta manera ha conseguido igualar los dos grupos a 5 elementos. Ha escrito con número un 3 (en espejo). Ha dado una respuesta gráfica y numérica (Figura 73).

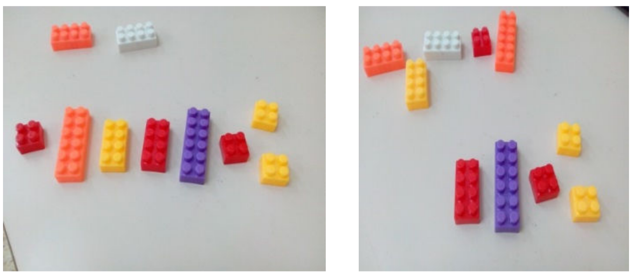

Figura 72. Estrategia de Marta

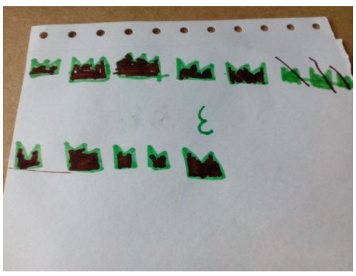

Figura 73. Estrategia de Nuria

Irene ha utilizado palillos de plástico. Ha formado un grupo con 8 objetos y otro con 2 objetos. Ha cogido palillos del grupo que tenía más cantidad y ha pasado 1 palillo. Ha contado el número de objetos y ha visto que había 3 y 7. Ha cogido otro palillo del grupo que tenía más y se lo ha pasado al de menor cantidad. Ha contado y ha respondido 4 y 6. Ha cogido otro palillo del grupo con más objetos y se lo ha pasado al que tenía menos y ha contado los objetos de cada grupo. Ha respondido 5 y 5. Se le ha leído el enunciado del problema y ha respondido 3 (Figura 74).

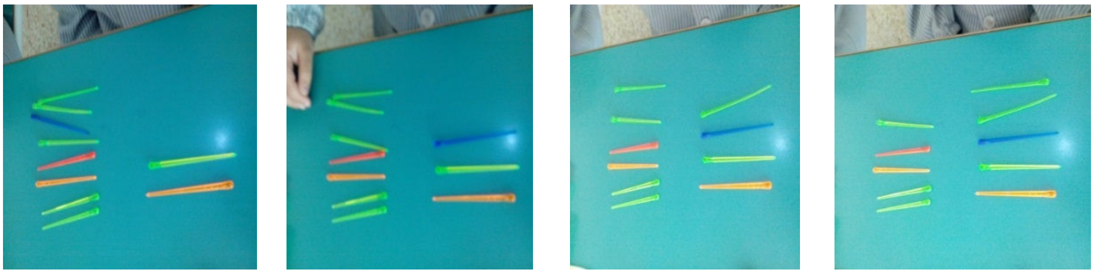

Figura 74. Estrategia de Irene

Javier ha utilizado palillos de madera. Ha formado un primer grupo con 8 objetos y otro con 2. Ha cogido uno a uno objetos del grupo que tenía más cantidad y se los ha pasado al que tenía menos. Así hasta igualar ambos grupos a 5 objetos cada uno. Son 5, pero se le ha leído la pregunta del enunciado y después de pensar un rato, dijo la ratoncita le dio 3 al ratoncito. En su dibujo ha separado los dos grupos con una línea horizontal. En la parte superior están los 8 objetos y en la parte inferior 2. Ha agrupado 3 objetos del conjunto de arriba y con una flecha ha indicado que esos elementos pasaban al conjunto de abajo y así iguala ambos grupos a 5 elementos. Al hacer un conjunto de 3 objetos ha dado la respuesta gráfica al problema, pero no numérica (Figura 75).

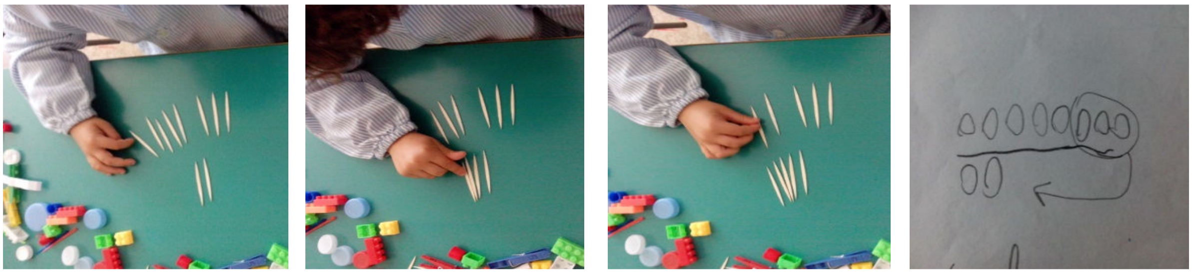

Figura 75. Estrategia de Javier

Pol cogió el ábaco. Y desplazó 8 bolas rojas para representar el primer grupo y dos para representar el segundo grupo. Después fue pasando bolas una a una hasta conseguir igualar los dos grupos y dijo ya está es 5. Pero al leerle el enunciado del problema se pensó la respuesta y respondió son 3 los dientes que le da la ratoncita al ratoncito (Figura 76).

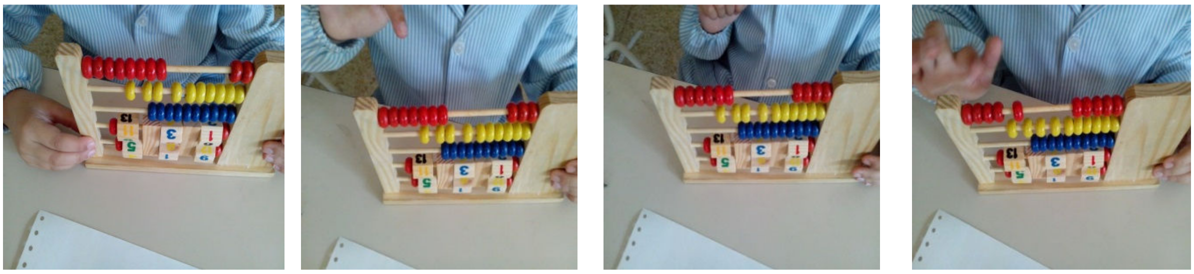

Figura 76. Estrategia de Pol

Sandra pidió ayuda a Esther para poder representar con los dedos el problema. Sandra puso 8 dedos con las manos e Esther puso 2. Sandra decía yo te doy una, ahora tú tienes 3 y yo tengo 2. Ahora te doy otra Esther y tú tienes 4 y yo 6. Te doy una más y ahora tú tienes 5 y yo tengo 5. Esther cerró la mano completa con los 5 dedos. Y le peguntó a Esther ¿cuántas te he dado? Esther respondió 3. La estrategia utilizada por ambas niñas es de modelización directa con los dedos en las que se aprecia la secuencia del traspaso de un objeto del primer conjunto al segundo conjunto. Estas niñas demuestran una comprensión completa de este problema de reparto igualatorio (Figura 77).

Figura 77. Estrategia de Sandra e Esther

De los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, todos han resuelto el problema mediante la estrategia de medida. 6 han necesitado ayuda o se han fijado en cómo lo realizaban sus compañeros y no han comprendido el problema.

4. Conclusiones

En el marco teórico de este trabajo, se ha revisado la literatura escrita sobre resolución de problemas aritméticos verbales que se plantean en las diferentes etapas educativas. También se ha analizado la clasificación semántica de los diferentes tipos de problemas y se han planteado las estrategias que suelen utilizar los niños en función de cada problema. La parte práctica de esta investigación se ha centrado en presentar detalladamente el diseño de las sesiones y analizar las estrategias, los errores y las representaciones de los alumnos en los problemas del taller, ofreciendo una especial atención a los problemas de reparto igualatorio.

4.1. Conclusiones del diseño y desarrollo del taller

Este taller manipulativo que se ha diseñado y que se ha llevado a la práctica en el aula de P-5 en el área de matemáticas, en el que se introducen los problemas de reparto igualatorio, demuestra cómo se puede trabajar la resolución de problemas para fundamentar el aprendizaje de contenidos curriculares. Esta investigación confirma que las capacidades infantiles se pueden desarrollar y potenciar ofreciendo oportunidades adecuadas y adaptadas a los intereses de los niños.

Con respecto al diseño del taller, ha resultado acertada la alternancia de problemas para evitar la mecanización. Al no haber dos problemas seguidos iguales, los alumnos han tenido que inventar diferentes estrategias para cada problema. En las primeras sesiones, los niños demostraban confusión e interferencias por la metodología tradicional impartida en el aula de matemáticas. La mayoría de los niños decían que había que sumar porque era la operación que habían trabajado en clase. Una niña comentó a la profesora: - Es que siempre hacemos problemas de añadir. La profesora respondió: - Ya, pero es que hay más tipos de problemas y no todos se resuelven siempre igual. No todos son de añadir (sumar). Ha sido necesario realizar dos o tres sesiones para que los niños entraran en la dinámica del taller, para poder hacer una investigación de este tipo y así poder comprobar que los niños de estas edades ya eran capaces de realizar problemas cada vez más complejos e incluir los de reparto igualatorio.

A algunos niños les ha costado entender el enunciado de la sesión 2 "En un cesto había 12 maderas y Gretel coge 3 ¿Cuántas maderas quedan en el cesto?" y pensaban que las 3 maderas que coge Gretel no las cogía del cesto, las podía coger de cualquier otro sitio como, por ejemplo, del bosque. Así, en vez de tomarlo como un problema de cambio decreciente, lo hacían como si fuera creciente. Al aclararles este punto lo han realizado correctamente. Esta observación me hace pensar que debo mejorar el enunciado del problema añadiendo que Gretel coge 3 maderas del cesto.

El uso de cuentos para contextualizar los enunciados de los problemas ha facilitado la comprensión a los alumnos ya que estaban previamente motivados y conocían a los personajes de los problemas. La diversidad de materiales permitidos en el aula ha favorecido que aparecieran estrategias muy diversas, ya que estos alumnos nunca antes habían tenido tanta libertad en el uso de materiales ni en el de estrategias y esto les ha permitido ser muy creativos y flexibles. Hay contenidos que no se enseñan en el aula y demuestran que los niños desde muy pequeños eligen objetos según su particular preferencia. Mientras que unos deciden hacer series completamente homogéneas como en la (Figura 17) otros en cambio se decantan por series heterogéneas (Figura 48). Incluso dentro de cada tipo de categorización existen diferentes grados. Hay series homogéneas al 100% ya que los niños han utilizado objetos de las mismas dimensiones y colores (Figura 15), y otros que han hecho series homogéneas con un % menor, al decantarse por el color, pero distinto tipo de objetos (Figura 5). E incluso dentro de las series heterogéneas hay diferentes escalas: las que han elegido diferentes objetos, las que han elegido diferentes colores y podríamos decir también aquellas que no tienen ningún tipo de relación entre ellos, es decir heterogeneidad al 100 % (Figura 59). Estos alumnos demuestran un nivel superior de abstracción ya que cada objeto les sirve para contar.

4.2. Conclusiones sobre los problemas de reparto igualatorio en educación infantil

Como hemos podido comprobar, es posible introducir problemas de reparto igualatorio en Educación Infantil, adaptando el tamaño de las cantidades del problema y explicándolos dentro de un contexto significativo para los alumnos. Los niños de 5-6 años son capaces de resolverlos a través de la modelización directa sin la necesidad de haber adquirido un aprendizaje formal de operaciones aritméticas o mediante otras estrategias de conteo. A través de la manipulación de objetos se ha podido observar que estos problemas son apropiados para estas edades.

Al plantear estos problemas se pensaba que los niños iban a usar estrategias de modelización directa, pero ha surgido un esquema de igualación en la estrategia de correspondencia uno a uno y es uno de los hallazgos más significativos de este trabajo. La utilización de diferentes materiales y la colocación ordenada de los objetos haciendo una correspondencia uno a uno entre los elementos de los diferentes grupos ha facilitado que los niños vieran a simple vista si había el mismo número de objetos o si faltaba alguno. También les ha resultado muy útil colocar los objetos en fila o uno encima de otro para comprobar si había la misma longitud o altura en ambos grupos.

Los alumnos que han utilizado los mismos objetos para formar los dos grupos o que no han realizado una correspondencia uno a uno, han necesitado contarlos y utilizar otras estrategias para llegar a la solución de los problemas. Al principio algún niño ha cogido contadores externos para igualar ambos grupos, rápidamente al corregirles han comprendido que en los problemas de reparto igualatorio se debe operar con las cantidades que nos daban sin utilizar elementos externos, y la igualación se obtiene pasando objetos del grupo que tiene más al que tiene menos.

Es asombrosa la cantidad de estrategias y representaciones tan distintas que utilizan los niños en la resolución de problemas y cómo utilizan objetos sin previa instrucción como es el ábaco o la banda numérica. Resulta interesante ver cómo piensan los niños y cómo plasman en un dibujo la comprensión del problema, es la síntesis de la sesión, la manera de explicar el resultado al que han llegado. En los problemas de reparto igualatorio, al haber dos situaciones algunos niños se han centrado en la solución mientras que otros dibujaban las diferentes acciones. A muchos de ellos les ha resultado complicado plasmar el paso de objetos de un grupo al otro.

5. Implicaciones

5.1. Futuras investigaciones sobre problemas de reparto igualatorio

Este estudio abre futuras líneas de investigación que permitirán continuar este trabajo. Como he explicado anteriormente eran dieciséis los problemas propuestos para este taller matemático, pero se han realizado ocho problemas. Además existen 12 tipos de problemas de reparto igualatorio: seis de una etapa y otros seis de dos o tres etapas. Este taller de matemáticas ha desarrollado dos problemas de reparto igualatorio, uno de dos etapas y otro de tres etapas. Mi siguiente investigación consistirá en realizar el resto del taller, las ocho sesiones restantes que no se ha podido hacer por limitación de tiempo, y que incluyen los cuatro problemas de reparto igualatorio de varias etapas junto a otros problemas.

Pero mi propuesta es más ambiciosa y desea comprobar en un futuro taller si los alumnos de P-5 son capaces de realizar los 12 tipos de problemas de reparto igualatorio (de una o varias etapas). Además creo que resultaría interesante plantear los problemas de reparto igualatorio en todos los cursos de primaria para analizar los resultados y comprobar el tipo de estrategias que utilizan los niños en cada edad, una vez que ya han aprendido las operaciones básicas y comprender el tipo de pensamiento matemático en cada etapa educativa. Esta línea de investigación me abre un gran abanico de posibilidades para realizar un estudio más exhaustivo y comparativo.

5.2. Implicaciones para el aula de infantil

La realización de este taller de resolución de problemas en el aula de P-5 ha sido una manera de llamar la atención sobre la metodología tradicional que se esta impartiendo en las escuelas que se basa en fichas y operaciones en papel. La variedad de problemas planteados en estas sesiones demuestra que los niños de educación infantil son capaces de realizar problemas aritméticos verbales de diferentes tipos. A través de este tipo de talleres se invita a la comprensión y reflexión. Se ofrecen oportunidades para que los niños sean los protagonistas de su propio aprendizaje y puedan experimentar e inventar estrategias, y poco a poco vayan adquiriendo un conocimiento matemático basado en situaciones cercanas que les permitirán aplicarlas en otros contextos.

5.3. Reflexiones personales

No quisiera acabar este trabajo sin hacer una breve reflexión personal y comentar que realizar este taller de matemáticas con niños de P-5 y tener que investigar sobre el tema me ha resultado muy interesante y gratificante enriqueciéndome como persona y como docente. Al principio, cuando me planteé el taller no pensaba que podría llegar tan lejos, ni que los niños fueran capaces de encontrar la solución a los problemas de reparto igualatorio. Pero a medida que las sesiones avanzaban se iban produciendo cambios, los niños entraban en la dinámica del taller y resultaba emocionante ver cómo, poco a poco, iban dejando a un lado la mecanización y empezaban a reflexionar y a aplicar la lógica al observar que cada problema era distinto al anterior y que tenían que pensar, porque no podían aplicar las mismas estrategias. Los niños iban razonado sus respuestas, inventado estrategias y comprobado que existían otros tipos de problemas, no sólo los de "suma" que eran los que estaban acostumbrados a realizar con la metodología tradicional.

Esta investigación me ha servido para darme cuenta de que todavía hay mucho que investigar pero, sobre todo, me ha hecho ver la gran responsabilidad que tenemos los docentes por ser los encargados de proporcionar oportunidades a los niños para que aprendan, y que somos los adultos los que subestimamos las capacidades infantiles y los que estamos limitando a los niños al no ofrecerles actividades que inviten a la reflexión.

Referencias

Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 1-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T.P. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19–32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E., Cañadas, M.C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia, 2*(2), 1-11.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Granada: Universidad de Granada.

Cataluña. Decret 181/2008, de 9 de septiembre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas de la Educación infantil. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, 16 de septiembre 2008, número 5216*.

Coloma, L. (2013/1894). *Ratoncito Pérez. El ratolinet de les dents*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Monografía IX)*, 23-48.

Díaz, I. (2013). *Amanda, la cuinera. Amanda, la cocinera*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Díaz, I. (2013). *Anem de festa! ¡Vamos de fiesta!* Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Díaz, I. (2013). *El cirerer que parla. El cerezo que habla*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Díaz, I. (2013). *El diari d'en Kim. El diario de Kim*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Díaz, I. (2013). *La família d'en Tinet. La familia de Tinet*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Frías, A. y Castro, E. (2013). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 379-406.

Fuson, K.C., Clements, D. H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with currriculum focal points*. Reston, VA/Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics & Naeyc.

Grimm, J. y Grimm, W. (2013/1812). *El zapatero y los duendes. El Sabater i els follets*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Grimm, J. y Grimm, W. (2013/1812). *Hansel y Gretel*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Grimm, J. y Grimm, W. (2013/1812). *Pulgarcito. En Patufet*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Martínez, J. y Sánchez, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid: Wolters Kluwer.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español. Resultados y contexto*. Madrid: MECD. Disponible en: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012.pdf?documentId=0901e72b8195d643

Ministerio de Educación y Ciencia (1992, 24 de marzo). Resolución de 5 de marzo de 1992, de la Secretaría de Estado de Educación, por la que se regula la elaboración de proyectos curriculares para la Educación Primaria y se establecen orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos. *BOE, 72*, 9594-9667.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, 31487-31566.

Ministerio de Educación y Ciencia (2008, 05 de enero). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación infantil. *BOE, 5*, 1016-1036.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, 19349-19420.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma, 31*, 19-26.

Núñez, C., De Castro, C., Del Pozo, A., Mendoza, C. y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Quintero, A.H. (1983). Conceptual understanding in solving two-step Word problems with a ratio. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 102-112.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Comares.

Riley, M.S. (1981). *Conceptual and procedural Knowledge in development*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Pittsburg, Estados Unidos.

Santos, L.M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Schmilovich, P. (2013). *Un dia a la masia. Un día en la masía*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Schmilovich, P. (2013). *Un dia al circ. Un día en el circo*. Barcelona: Grup Promotor/Santillana Educación, S.L.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.557-628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

María Elena López de la Fuente. Graduada en Maestro de Educación Infantil y en Maestro de Educación Primaria por la Universidad Internacional de la Rioja (UNIR). Máster Universitario en Psicopedagogía por la Universidad Internacional de la Rioja (UNIR). Arquitecto Técnico por la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC).

Email: mariaelenalopezdelafuente@gmail.com