UNIVERSIDAD DE VALLADOLID’2016

Entre la intuición y el formalismo. El concepto de límite

Tomás Ortega
ortega@am.uva.es

Entre la intuición y el formalismo. El concepto de límite

Tomás Ortega

ortega@am.uva.es

Desde finales del siglo pasado, el concepto de límite ha sido objeto de numerosas investigaciones en el Área de Didáctica de la Matemática. En la Universidad de Valladolid llevamos varios años en el asunto y fruto de este trabajo es la creación de una definición que, teniendo el mismo rigor que la definición métrica, evita el formalismo ε-δ y hace más asequible su comprensión. Aquí se presenta parte de la investigación realizada, la definición construida y el uso de ésta para demostrar algunos teoremas tanto en sucesiones como en funciones reales.

Mis creencias previas sobre el concepto de límite

1. Las **dificultades** que conlleva el aprendizaje de la noción de límite en Educación Secundaria fue motivo de preocupación para mí desde mis inicios de Profesor de Matemáticas en Bachillerato, y en la década de los 80 construí un programa interactivo de ordenador para enseñar (facilitar los aprendizajes) de la conceptualización métrica.

2. Creencia de que límite es uno de los conceptos matemáticos más complicados (**más difíciles**) en todos los niveles educativos.

Mis creencias previas sobre el concepto de límite

3. Tras un período de inactividad (sin utilizar el concepto) los alumnos (y profesores) tienen serias dificultades para reproducir la definición conceptual métrico-analítica con absoluto rigor. Así lo corroboran varias consultas realizadas con alumnos egresados.

4. Los alumnos pueden ser capaces de memorizar la definición y, utilizando la mecánica de ciertas técnicas sencillas o no, también logran resolver problemas de cálculo de límites, pero pueden estar muy lejos de comprender la noción conceptual y de aplicarla en situaciones problema.

Antecedentes

Tall y Vinner (1981) indican que para los alumnos el límite secuencial es un **proceso sin fin, inacabado**, donde los términos de la sucesión se aproximan pero **no llegan al límite** (0,9, 0,99… no llega a uno). Los términos de la sucesión son distintos del límite. (los alumnos no consideran sucesiones como 0’9, 1, 0’99, 1,…)

Vinner (1991) constata los siguientes errores en alumnos de 18 años:

- Una sucesión no debe alcanzar su límite.
  - *1, 1, 1,…* y *0, 1, 0’9, 1, 0’99, 1, 0’999,…* no tendrían límite.
- Una sucesión convergente debe ser monótona
  - $1+(-1)^n/n,\ n \in N$ no tienen límite.
- El límite es el último término de una secuencia
  - ¿Cuál es en el último natural?
  - ¿Cuál es en el último término de $a_n=1/n$?

Antes y después

ANTES

Robinet (19839; Cornu (1991); Cotrill, Dubinski, Artigue (1997), Sierpinska (1985, 1987 y 1990), …, Delgado (1995), Espinoza (1998), Sánchez (1997)

DESPUÉS

Gray, Loud, Sokolowski (2005); Roh & Lee (2011)…

Universidad de Granada:

Coriat, Sánchez y Claros; Rico, Fernández y Ruiz

Universidad de Alicante:

Valls, Pons y Llinares

Universidad Autónoma de Barcelona:

Azcárate y Deulofeu

Análisis crítico de textos de análisis

Aparte de varios libros de Secundaria, se analizaron los siguientes textos de Universidad:

1. Spivak, M. (1981, 99 - 129)
2. Piskunov, (1983, 28-48)
3. Linés, E. (1983, 192-220)
4. Rudin, W. (1980, 89-91)
5. García A. y otros (1993, 196-200)
6. Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1998, 55-99)
7. Thomas G., Finney R. (1998, 51-86)

Además de múltiples incorrecciones, destaca el subjetivismo y la ausencia de intencionalidad didáctica.

Un ejemplo. El texto de Thomas & Finney I

1. Pone ejemplos de razones de cambio, lo que llevaría directamente al concepto de derivada

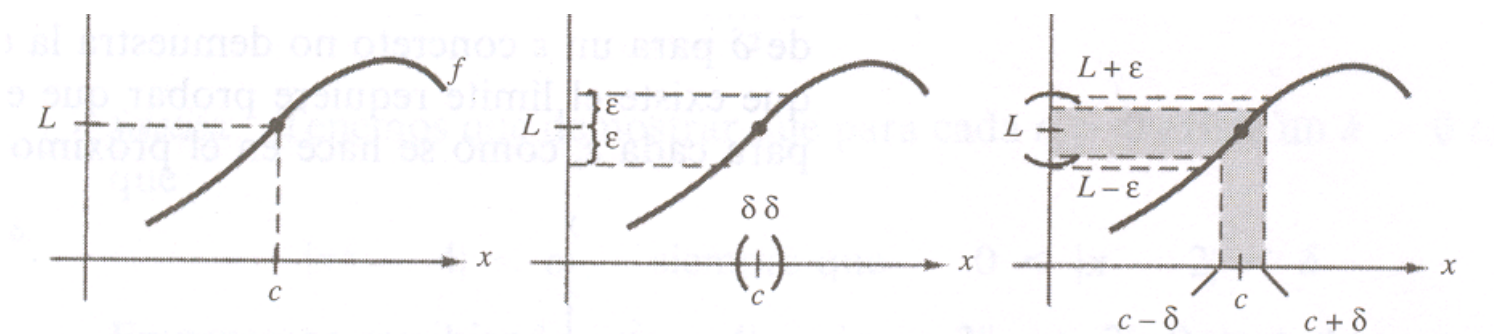
2. "Definición informal: "*Sea* f(x) *definida en un intervalo abierto alrededor de* x_0*, posiblemente excepto en* x_0*. Si* f(x) *se acerca de manera arbitraria a* L *para todo* x *suficientemente cerca de* x_0 *se dice…f(x) se aproxima al límite"…tanto como queramos.*

- Redacción confusa para los alumnos y restricción importante considerar un intervalo abierto.
- Parece que indica que se trata de un acercamiento al azar.
- ¿Cómo cuánto de cerca?
- ¿Es un rumor?
- Aunque lo explica después, no sólo es una aproximación.
- Subjetivismo.

Un ejemplo. El texto de Thomas & Finney II

3. <u>Definición formal: </u>*"...Decimos que* f(x) *tiende al límite* L *cuando* x *tiende a* x_0 *y escribimos:* $\lim_{x\to a} f(x)$ ***si,*** *para cada número ε>0 ...*

- Carácter subjetivo o de rumor.
- Debe ser si, y solo si. Tan interesante es ⇒ como ⇐.
- No se explica suficientemente la significación de "tiende"
- Parece que "para cada" indica una acotación unitaria en contraposición a "para cualquier", "para todo".



En las ilustraciones considera que el punto pertenece al dominio

Objetivo de la investigación

El problema de investigación se centra en el **diseño de una secuencia de enseñanza-aprendizaje** basada en una definición de límite adecuada tanto para sucesiones como para funciones.

Se desea aprovechar el hecho, ya señalado por muchos de los investigadores citados, de que los alumnos utilizan más las **concepciones que poseen** del concepto de límite que la propia definición formal, y que es la **concepción dinámica** la más potente en este sentido. Esta concepción está ligada a la aproximación y, por tanto, con las indicaciones del currículo, había que reconducir la definición métrica de límite hacia otra más "sencilla y rigurosa".

Así, se decidió destacar la propiedad que distingue al límite de una simple aproximación, esto es, el hecho de ser la mejor de las aproximaciones (la aproximación que no se puede mejorar).

Marcos teórico y metodológico

Marco teórico de integración:

1. Pensamiento matemático avanzado:
    a. Imagen y definición conceptual (Esquemas de Winner).
2. Modelo de comprensión de Sierpinska.
    a. Los cuatro actos de comprensión: Identificación, discriminación, generalización y síntesis.
    b. Obstáculos y actos de comprensión asociados en el concepto de límite.
3. Sistemas de representación.

Marco metodológico de Investigación-Acción

3 ciclos de investigación (exploración-confirmación-cierre).

Análisis epistemológico I

1. De Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII.

   El método de exhaución o exhausción. Métodos infinitesimales.

2. Segunda mitad del siglo XVIII. Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal.

   *Una cantidad es límite de otra cantidad, cuando una segunda cantidad puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, **sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima**; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable. (D'Alembert, Encyclopedie, 1751-1784).*

3. Siglo XIX y principios del siglo XX. Aritmetización del análisis

…., cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás (Cauchy, 1821).

Análisis epistemológico II

Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0<h<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm h)-L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces L es el límite de $f(x)$ para $x=x_0$ (Heine 1872).

4. Siglo XX. Generalización.

Concepciones topológicas.

El concepto de límite es uno de los más complicados y también uno de los más importantes de la matemática porque fundamenta el Análisis Matemático.

El hecho de que el concepto no se haya formalizado hasta el siglo pasado da cuenta de las dificultades que trae consigo dicha formalización.

Apuntes curriculares I

Se diseñaron unas **categorías de contenido matemático** para analizar el contenido curricular y evaluar la relación contenido-profesor en la secuencia didáctica que se implementó.

- El **límite secuencial** debe introducirse de forma numérica, discriminando tendencias finitas e infinitas, para facilitar el estudio de tendencias funcionales.
- En una segunda etapa se debe profundizar e incluir la aritmética como **preparación del límite funcional**.
- El alumno habrá ganado madurez y conocimientos para hacer frente al **límite funcional** que será el tercer paso y con él se fundamentarán la continuidad, la derivada y la integral.

Apuntes curriculares II

La definición de límite debe recoger el aspecto numérico y de aproximación óptima que le caracteriza y debe ser introducida después de fomentar el interés por el concepto mediante el establecimiento de su utilidad como herramienta para resolver ciertos problemas.

El concepto de límite no es sólo la definición, es mucho más rico y engloba un comportamiento funcional que no puede ser aislado.

> La unicidad del límite, el encaje, el signo, la aritmética,… son características funcionales de tipo local que están implícitas en el concepto y, por tanto, no pueden separarse de tal definición.

Hipótesis I

1. El tratamiento y estudio del límite secuencial en términos de aproximación óptima **mejora la comprensión** del límite funcional y es útil para establecer resultados sencillos.
2. El tratamiento del límite finito en un punto como aproximación óptima, y no como simple aproximación o aproximación subjetiva, es una **opción ventajosa** a los tratamientos existentes para que los alumnos comprendan el concepto y lo puedan aplicar a casos sencillos.
3. La definición del límite finito en un punto como aproximación óptima es una opción **más ventajosa** que la definición métrica por su simplicidad.

Hipótesis II

4. La noción de límite lleva consigo **graves dificultades** de comprensión, sea cual sea la presentación que se haga. Conocer dichas dificultades, junto con las creencias que los alumnos tiene sobre el límite es una herramienta eficaz para su enseñanza.

5. Es conveniente **discriminar los límites finitos** en un punto del resto de los límites, puesto que se utilizan en situaciones muy distintas: el primero es la base de cuestiones sobre continuidad y derivabilidad, mientras que el segundo aparece en el estudio de ramas infinitas y asíntotas de funciones.

6. La utilización de **distintos registros** (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora la comprensión del concepto.

Documentos de análisis

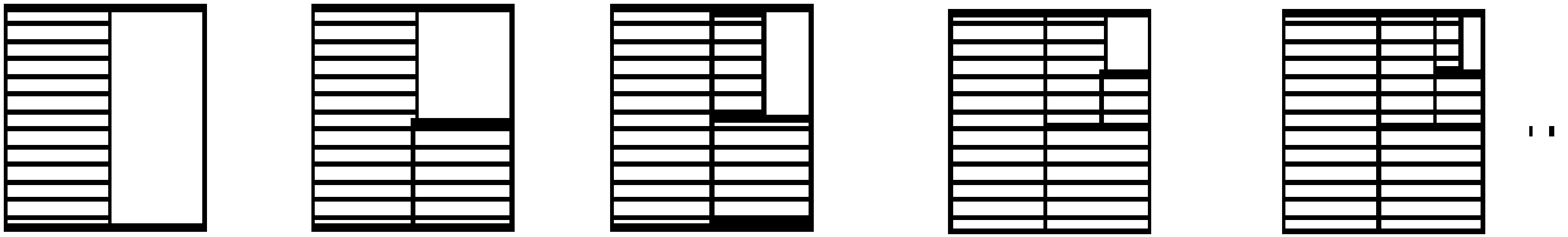
- Pretest (uno por cada ciclo).
- Cuadernillos de trabajo (uno por cada ciclo).
- Postest (uno por cada ciclo).
- Pruebas de evaluación.
- Grabaciones de audio.
- Entrevistas con alumnos.

Algunas actividades del pretest

1. Una planta crece en una habitación de 3 metros de altura. Las alturas que alcanza son sucesivamente 2´9, 2´99, 2´999, 2 ´9999,…

¿Llegaría la planta a tocar el techo de la habitación?

2.- Observa la siguiente secuencia:

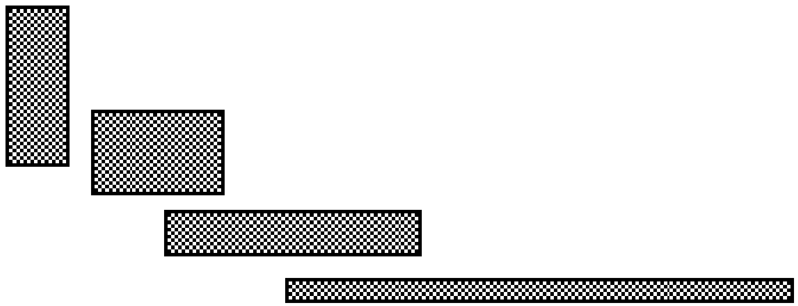


- Si la superficie del cuadrado inicial es 1 cm^2, ¿qué fracción rayada corresponde a cada elemento de la secuencia?
- Si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál será la parte rayada?

Algunas actividades del pretest

3. Los siguientes rectángulos tienen todos la misma superficie, pero la altura de cada uno es la mitad de la altura del anterior.

¿Qué relación hay entre la base y la altura? ¿Qué ocurre con la altura si continuamos el proceso indefinidamente? ¿Qué figura se obtiene? ¿Cuál es el valor del límite?



8. Dibuja funciones que cumplan:

8.1. Según se acerca la *x* a 3, sus imágenes se acercan a 2 tanto como sea preciso.

8.2. Según se acerca la *x* a 3, sus imágenes crecen indefinidamente, superando cualquier valor por muy grande que sea.

8.3. Según la *x* se hace más grande, sus imágenes se acercan más al 2.

8.4. Según *x* se hace más grande, sus imágenes crecen indefinidamente, superando cualquier valor por muy grande que sea.

Resultados sobre tendencias

Afirmaciones de los alumnos sobre la tendencia del producto							
$a_n \rightarrow$	$b_n \rightarrow$	$a_n \cdot b_n \rightarrow$		$a_n \rightarrow$	$b_n \rightarrow$	$a_n \cdot b_n \rightarrow$	
0	$+\infty$	0	68%	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	100%
0	$+\infty$	Indet	21,1%	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	89,5%
0	$+\infty$	$+\infty$	10,5%			Indet	10,5%

Cuando se trata de suma de sucesiones los resultados son positivos casi en el 100% de las respuestas, salvo en el caso de indeterminación $(\rightarrow +\infty) + (\rightarrow -\infty)$.

En general, se observa que los alumnos tienen la concepción del infinito como un número e intentan operar con él, incluso consideran productos infinitos sin plantearse su significado. Por esta razón, cuando la extensión de la operación aritmética es ambigua cometen muchos errores

Resultados sobre tendencias

Afirmaciones de los alumnos sobre la tendencia del cociente							
$a_n \to$	$b_n \to$	$a_n/b_n \to$		$a_n \to$	$b_n \to$	$a_n/b_n \to$	
K>0	0^-	Indet	42,15	$-\infty$	$-\infty$	Indet	41,1%
		$+\infty$	26,3%			$+\infty$	36,8%
		$-\infty$	10,5%			1	15,8%
		0	5,3%			$-\infty$	5,3%
		NC	5,3%	k	$-\infty$	0	63,2%
		-k	5,3%			$-\infty$	26,3%
		$\pm\infty$	5,3%			NC	5,3%
$+\infty$	K>0	$+\infty$	100%			Indet	5,3%
0	0	0	78,9%	k	$+\infty$	0	63,2%
		indet	21,1%			$+\infty$	26,3%
$-\infty$	K<0	$-\infty$	89,5%			NC	5,3%
		$+\infty$	10,5%			Indet	5,3%

Resultados sobre tendencias

<table>
<tr><th colspan="8">Afirmaciones de los alumnos sobre la tendencia del producto</th></tr>
<tr><th>$a_n \to$</th><th>$b_n \to$</th><th colspan="2">$a_n^{b_n} \to$</th><th>$a_n \to$</th><th>$b_n \to$</th><th colspan="2">$a_n^{b_n} \to$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">+∞</td><td>1</td><td>47´4%</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">k≠0</td><td>0</td><td>73´7%</td></tr>
<tr><td>Indet</td><td>47,4%</td><td>Indet</td><td>26´3%</td></tr>
<tr><td>+∞</td><td>5,2%</td><td rowspan="5">+∞</td><td rowspan="5">k<0</td><td>0</td><td>68´4%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">+∞</td><td>0</td><td>57´9%</td><td>+∞</td><td>10´5%</td></tr>
<tr><td>Indet</td><td>36,8%</td><td>NC</td><td>10´5%</td></tr>
<tr><td>+∞</td><td>5,3%</td><td>-∞</td><td>5´3%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">+∞</td><td rowspan="3">+∞</td><td>+∞</td><td>79%</td><td>Indet</td><td>5´3%</td></tr>
<tr><td>-∞</td><td>10´5%</td><td rowspan="4">+∞</td><td rowspan="4">0</td><td>1</td><td>73´7%</td></tr>
<tr><td>Indet</td><td>10´5%</td><td>+∞</td><td>15´8%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">+∞</td><td rowspan="3">-∞</td><td>0</td><td>68´4%</td><td>NC</td><td>5´3%</td></tr>
<tr><td>Indet</td><td>21´1%</td><td>Indet</td><td>5´3%</td></tr>
<tr><td>NC</td><td>10´5%</td><td>0</td><td>0</td><td>Indet</td><td>Resuelt</td></tr>
</table>

Actos de comprensión en aproximación

I
Identificación de la aproximación numérica de valores de "x".

II
Identificación de la aproximación numérica de valores de "y".

III
Discriminación de las aproximaciones numéricas de "x" y de "y".

IV
Síntesis: mejorar la aproximación al límite.

V
Discriminación de valores de "x" cuyas imágenes mejoran una aproximación.

VI
Síntesis de entorno del número al que se aproximan los valores de "x" al fijar K.

VII
Identificación de entorno reducido de un número.

VIII
Discriminación de entorno reducido de los valores de "x" que se aproximan.

IX
Síntesis de entorno reducido del número al que se aproximan los valores de "x".

X
Síntesis de entorno de valores "y" que son imagen y mejoran dicha aproximación

XI
Generalización de límite como valor cuyas aproximaciones (H≠L) se pueden mejorar con todas las imágenes de un entorno.

Discriminación entre aproximación y tendencia

¿Se aproxima 0´9, 0´99, 0´999,… a 10?

0´9, 0´99, 0´999,… , se aproxima a 1 más que cualquier aproximación fijada distinta de 1 (tiende a 1)

0´9, 0´99, 0´999,… , se aproxima a 2 pero no tiende a 2.

0´9, 0´99, 0´999,… se aproxima a 1 y tiende a 1

La definición informal $(a_n)_{n\in N}$ se aproxima a L cuando n tiende a infinito no sirve y puede inducir a error.

Se aproxima más si la distancia (resta positiva) es menor.

La tendencia de n a infinito es natural y no necesita mayor énfasis.

La sucesión $(a_n)_{n\in N}$ tiende a un número L si las aproximaciones de a_n a L mejoran (están más cercanas) que cualquier aproximación fijada.

Límite finito de una sucesión

Las definiciones, al igual que la secuencia didáctica de la experimentación, han evolucionado a lo largo de los tres ciclos, de manera que en el último de ellos se perfecciona y se enuncia tras discriminar aproximación y tendencia

El límite de una sucesión $(a_n)_{n\in N}$ es L si, y sólo si, para cualquier aproximación H de L ($H\neq L$) existe un índice $k\in N$ tal que a partir de él (para todo $p>k$) todos los términos a_p mejoran dicha aproximación.

El concepto de aproximación es muy intuitivo, pero conviene fijarlo: Un número *H* (*H*≠*L*) es mejor aproximación del número *L* que otro número *K* (*K*≠*L*) si, y solo si, la diferencia positiva entre *H* y *L* es menor que la diferencia positiva entre *L* y *K*.

Hacia la comprensión del concepto

La generación de tablas numéricas ayuda a comprender el concepto. Aquí, considerando la sucesión $1+\log(n^2+1)-\log(n^2)$, $n \in N$ y la tabla generada con GeoGebra, se trata de lo siguiente:

1. Conjeturar cuál puede ser el valor del límite. (el límite es 1)
2. Considerada una aproximación, por ejemplo 1,001, encontrar el entero *K* tal que a partir de él todos los términos de la sucesión que aparecen en la tabla mejoran la aproximación fijada.

n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n
2	1,22314	8	1,01550	14	1,00509	20	1,00250	26	1,00148	32	1,00098
3	1,10536	9	1,01227	15	1,00443	21	1,00227	27	1,00137	33	1,00092
4	1,06062	10	1,00995	16	1,00390	22	1,00206	28	1,00127	34	1,00086
5	1,03922	11	1,09823	17	1,00345	23	1,00189	29	1,00119	35	1,00082
6	1,02740	12	1,00692	18	1,00308	24	1,00173	30	1,00111	36	1,00077
7	1,02020	13	1,00590	19	1,00277	25	1,00160	31	1,00104	37	1,00073

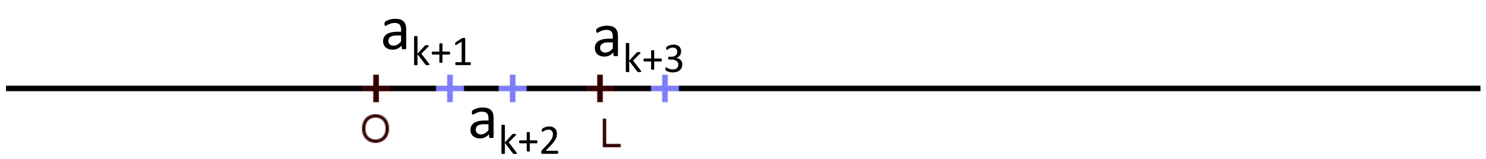
Un par de teoremas I

Teorema 1.

Si el límite de una sucesión $(a_n)_{n \in N}$ es $L>0$, existe un índice k tal que a partir de él (p>k) todos los términos a_p son positivos.

Demostración.

Considerando que 0 es una aproximación de L, existe un índice $k \in N$ tal que a partir de él (p>k) todos los términos de a_p mejoran dicha aproximación y, por tanto, serán positivos.



Un par de teoremas II

Teorema 2.

Toda sucesión $(a_n)_{n \in N}$ monótona, creciente y acotada superiormente tiene límite (Es suficiente con que la sucesión sea no decreciente).

Demostración.

Como $(a_n)_{n \in N}$ está acotada superiormente, tiene extremo superior. Sea L este extremo superior y sea H una aproximación de L (H<L). Por ser L el extremo superior, existirá un $k \in N$ tal que a_k estará más próximo a L que H, y por ser monótona creciente también estarán más cercanos todos los términos posteriores a a_k y, en consecuencia, L es su límite.

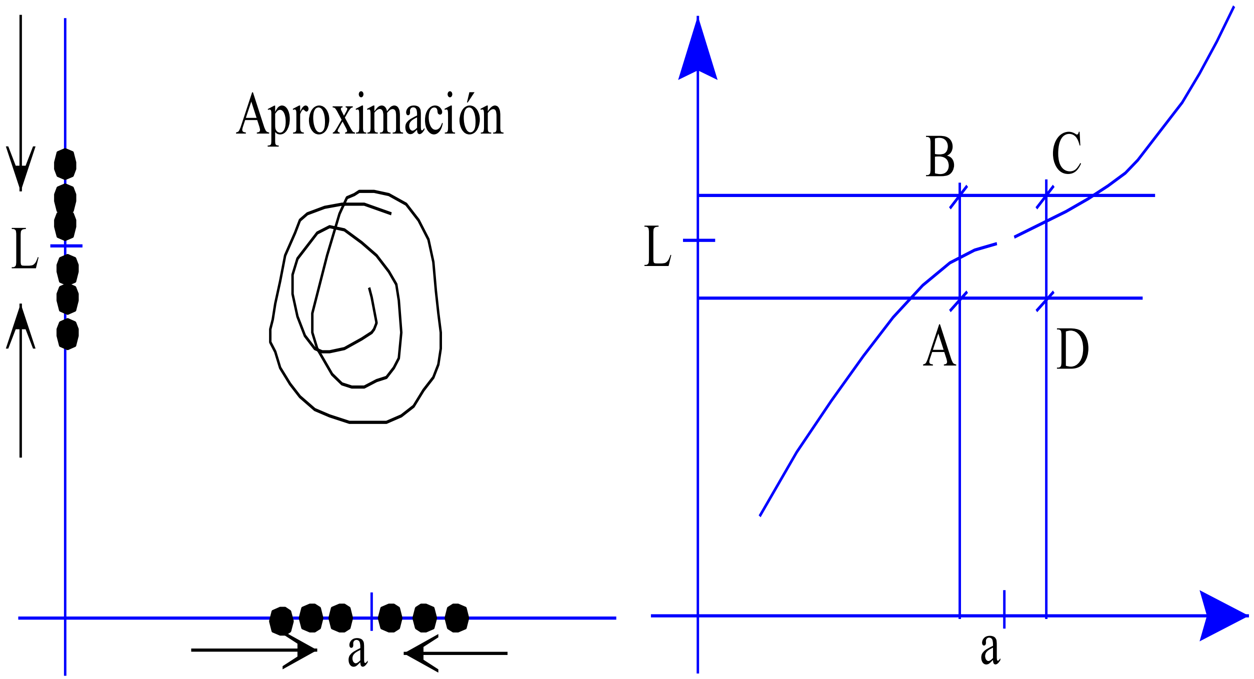
Límite finito de una función

Sea f *una función y* a *un número real, el número* L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x \to a} f(x)=L$*, sií para cualquier aproximación* H *de* L (H≠L) *existe otra aproximación* K *de* a *(K≠a) tal que las imágenes,* f(x)*, de todos los puntos, distintos de* a*, que mejoran esta aproximación, mejoran la aproximación* H *de* L

Sea* f *una función y* a *un número real, el número* L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x \to a} f(x)=L$*, sií para cualquier aproximación* H *de L* (H≠L) *existe un entorno reducido de* a *tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran la aproximación* H *de* L*.

El límite de una variable *x* en *x=a* es *a* porque fijada una aproximación *a*, existe un entorno reducido de *a* tal que todos los puntos del entorno mejoran dicha aproximación. (También se puede considerar la función identidad)

Hacia la comprensión del concepto I



Una aproximación K a L genera una banda horizontal (es el equivalente a L-ε, L-ε y el entorno reducido de a genera una banda vertical. Estas bandas determinan el rectángulo ADCB y L es el límite de f en A sií la gráfica de la función entra en el rectángulo por AB y sale de él exclusivamente por CD

Hacia la comprensión del concepto II

La generación de tablas numéricas ayuda a comprender el concepto. Aquí, considerando la función $f(x)=(1+x)/(1+sen^2(x))$ y la tabla generada con GeoGebra, se trata de lo siguiente:

1. Conjeturar cuál puede ser el valor del límite (x→0 y el límite es 1).
2. Considerada una aproximación del límite, por ejemplo 1,0005, encontrar el entorno reducido del límite de x tal que todas las imágenes de este entorno mejoran la aproximación fijada (-0'00044, 0'00039)

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
-0,1	0,89112	-0,00204	0,99796	-0,00059	0,99941	-0,00028	0,99972
0,025	1,02436	0,00156	1,00156	0,00051	1,00051	0,00025	1,00025
0,01111	0,98877	-0,00123	0,99876	-0,00044	0,99956	-00023	0,99977
0,00625	1,00621	0,001	1,001	0,00039	1,00039	0,00021	1,00021
-0,004	0,99598	-0,00083	0,99917	-0,00035	0,99965	-0,00019	0,00081
0,00278	1,00277	0,00069	1,00069	0,00031	1,00031	0,00017	1,00017

Un par de teoremas II

Teorema 1:

Si el límite de una función en un punto es positivo, entonces la función es positiva en un entorno reducido del punto.

Demostración:

Es idéntica que en sucesiones: 0 es una aproximación…

Teorema 2:

Si $f(x) \geq 0$ en un entorno de $x=a$ y tiene límite en a, entonces $lím_{x \to a} f(x) \geq 0$

Demostración :

Es una consecuencia directa del teorema 1. Suponiendo que $\text{lím}_{x \to a} f(x)=L<0$, como 0 es una aproximación de L, existirá un entorno reducido de x=a tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran dicha aproximación, es decir, serán negativas. Esto contradice la hipótesis y, por tanto, $lím_{x \to a} f(x) \geq 0$

Otro par de teoremas

Teorema 3:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones con límite en $x=a$ y $f(x) \geq g(x)$ en un entorno reducido de $x=a$, entonces $lím_{x \to a} f(x) \geq lím_{x \to a} g(x)$

Demostración :

Se considera la función diferencia $f(x)-g(x)$. Esta función es no negativa en un entorno reducido de a y, por tanto, $lím_{x \to a}(f(x)-g(x)) \geq 0$.

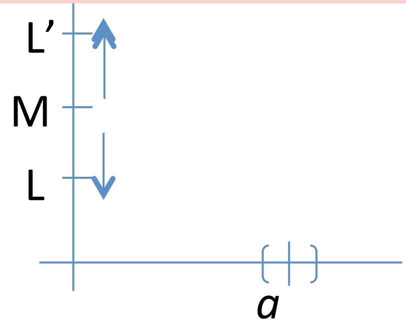
Aplicando ahora el teorema del límite de la suma $lím_{x \to a} f(x) - lím_{x \to a} g(x) \geq 0$ y, finalmente, $lím_{x \to a} f(x) \geq lím_{x \to a} g(x)$.

Una aplicación inmediata de este teorema es este otro:

Teorema 4:

Si $f(x)>g(x)>h(x)$ en un entorno reducido de a y $lím_{x \to a} f(x) = lím_{x \to a} h(x)$, el límite de $g(x)$ en $x=a$ es el mismo.

Un teoremas más



Teorema 5:

El límite de una función en un punto x=a, si existe, es único.

Demostración:

Suponiendo que L y L’ sean dos límites y que L<L’, M=(L+L’)/2 es una aproximación de L y de L’.

- Considerando que L es límite, existirá un entorno reducido de *a* tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran dicha aproximación y, por tanto, serán mayores que M.
- Considerando que L’ es límite, existirá un entorno reducido de *a* tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran dicha aproximación y, por tanto, serán menores que M.
- Las imágenes de todos los puntos del entorno intersección de ambos serán mayores y menores que M. Suceso imposible y, por tanto L’≤L.
- Análogamente se establece que L≤L’ y, por tanto, L=L’.

¿Se pueden probar todos los teoremas?

Una aproximación por un lado lleva asociada la misma aproximación por el otro y genera dos formas de controlar los errores de aproximación a L:

a. Mediante aproximaciones por la izquierda, L - K.
b. Mediante aproximaciones por la derecha, K - L.

Teorema: toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

Demostración métrica: por ser $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $k \in N$ tal que si $p>k$ y $q>k$, $|a_p - L| < \varepsilon/2$ y $|a_q - L| < \varepsilon/2$.

Por tanto, $|a_p - a_q| \leq |a_p - L| + |L - a_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Teorema: si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L'$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + L'$

La demostración es similar a la anterior y aparece en todos los manuales.

Estos teoremas también se pueden probar aplicando nuestra definición. En el primero, para cualquier aproximación por la izquierda, H, se considera otra, aproximación, K, también por la izquierda, tal que L-K sea menor o igual que (L-H)/2… Por ejemplo, K=(H+L)/2.

La definición métrica es más difícil que la definición como aproximación óptima

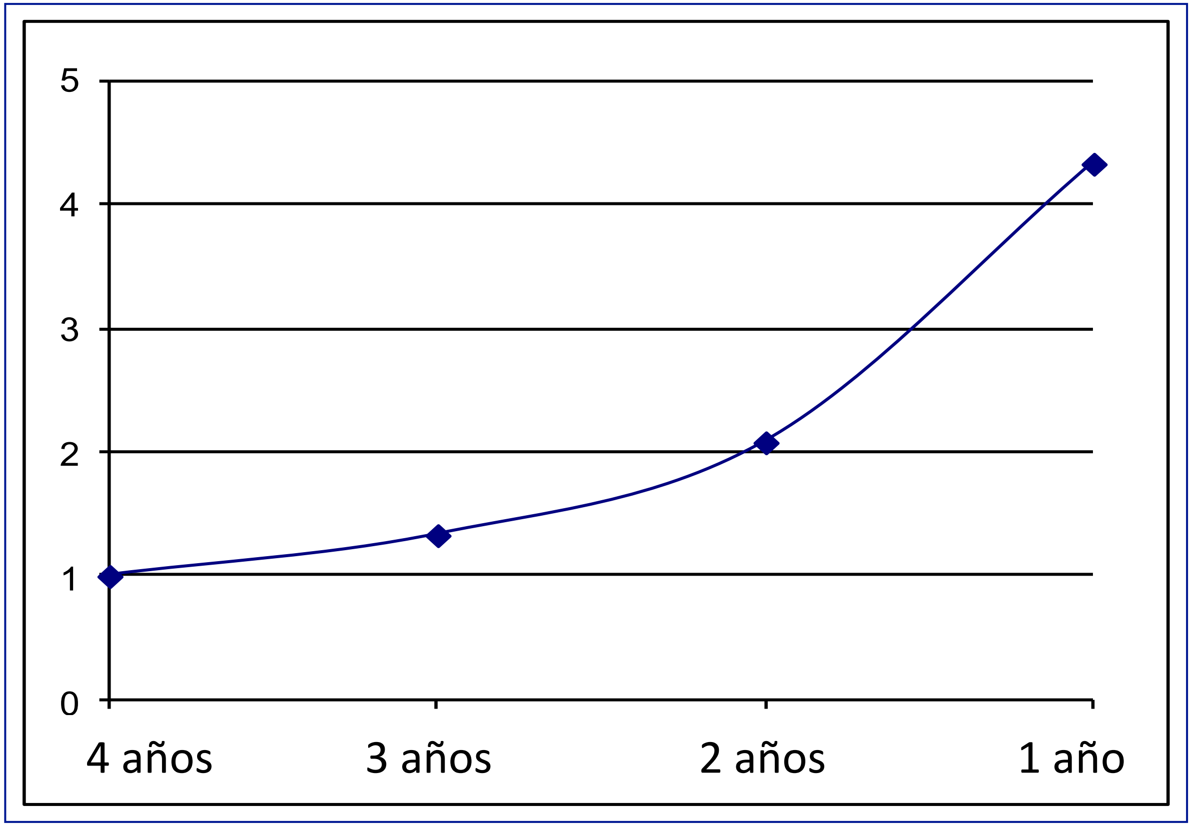
Análisis de las dificultades a través de un debate

El debate completo consta de 315 intervenciones, de la siguiente forma:

a. Para la idea intuitiva de límite, 14: 7 de la profesora y 7 de los alumnos
b. Para el concepto de aproximación y mejorar la aproximación, 13: 6 de la profesora y 7 de los alumnos.
c. Para el de tendencia de una variable, 13: 6 de la profesora y 7 de los alumnos.
d. Para la definición de límite como aproximación óptima, 29: 14 de la profesora y 15 de los alumnos.
e. Para la definición métrica, 246: 122 de la profesora y 124 de los alumnos.

El olvido del concepto

Variación de las puntuaciones medias sobre 10 con el paso del tiempo (alumnos de ingeniería): Nadie escribe la definición métrica (ni por aproximación). Los más utilizan aproximaciones (definición informal) y tendencias.



A modo de conclusión II

Los alumnos de las experimentaciones prefieren utilizar los registros numérico y gráfico, huyen del formalismo y el uso de software es muy motivador.

El aprendizaje del concepto presenta numerosísimas dificultades, se verifican las hipótesis enunciadas y se han corroborado las tesis de los antecedentes. Aquí sólo destaco dos aspectos:

- La no discriminación entre funciones con límite en un punto y funciones sin límite en un punto. A buena parte de los alumnos les resulta imposible escribir una función que no tenga límite en un punto.
- Hay numerosas diferencias entre las definiciones dadas por autores de libros de Análisis Matemático y en general son subjetivas.

A modo de conclusión II

La definición construida es esta investigación es preferida por los alumnos de ingeniería, afirman que la entienden mucho mejor y dan muchas razones, entre ellas la ausencia de formalismo.

Consideramos que la definición como aproximación óptima debe ser la antesala de la definición métrica y sólo se entenderá ésta cuando se haya comprendido aquella.

Esta definición perdura más tiempo en la mente de los alumnos que la definición métrica y conviene probar con ella los teoremas sencillos.

La escritura simbólica bastante usual de las indeterminaciones es confusa y les lleva a error. En su lugar se deben escribir tendencias:

$$\xcancel{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \dots} \qquad \boxed{\frac{\to 0}{\to 0}, \quad \frac{\to \infty}{\to \infty}, \quad \to 0 \cdot \to \infty, \dots}$$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES'2016

Entre la intuición y el formalismo hay una concepción de límite tan rigurosa como la métrica pero menos formal: la definición como aproximación óptima. Los alumnos la comprenden mucho mejor y puede ser la antesala para la comprensión de la definición métrica.

MUCHAS GRACIAS
Tomás Ortega