SIMULACIÓN DE ERRORES TIPO I Y II ASOCIADOS A PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE MEDIAS Y PROPORCIONES

Modalidad: Trabajo de grado asociado al estudio de un tema específico

CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA
CC. 1013633237
CÓDIGO: 2010140043
JULIAN EDUARDO GÓMEZ BÁEZ
CC. 1019060415
CÓDIGO: 2010140020

ASESOR

FELIPE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C., mayo de 2015

SIMULACIÓN DE ERRORES TIPO I Y II ASOCIADOS A PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE MEDIAS Y PROPORCIONES

Trabajo de grado presentado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA
JULIAN EDUARDO GÓMEZ BÁEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C., mayo de 2015

A mis padres Guillermo y Martha,
mis hermanos (los de sangre y los del alma)
y a Sophia, un faro de luz inesperado
en el medio de la balacera que es la vida.

César Guillermo Rendón Mayorga.

Dedico este trabajo a mis padres:
Eduardo Gómez y María Báez,
a mi hermano y demás familiares.
El objetivo logrado también es de ustedes.

Julián Eduardo Gómez Báez.

Agradecimientos

Quiero mostrar mi agradecimiento a las personas que han permitido la realización exitosa de este trabajo, a mi hermano, mis padres con quienes estoy eternamente agradecido pues de ellos recibí lo más valioso: el don de la vida y la mejor herencia: mi carrera profesional; gracias a su apoyo, cariño, consejos y confianza me han otorgado capacidades que me permitirán enfrentar la vida con éxito. Gracias en general a todos mis familiares de quienes sé que siempre tendré todo su apoyo y buena energía.

Agradezco también al profesor Felipe Fernández por su apoyo y dirección durante el desarrollo y gestión de toda la investigación realizada en este trabajo.Gracias a mi compañero con quien diseñé este trabajo, por el esfuerzo y dedicación que puso para perpetrar un excelente grupo de trabajo.

Finalmente a la Universidad Pedagógica Nacional por haber permitido que me formara como un profesional.

Julián.

Agradezco en primer lugar mi familia: mis padres y mis hermanos, sin la confianza que me depositaron día tras día hubiese sido mucho más difícil andar por este camino.A los amigos de la vida: Maicol y Sebastián, gracias por la amistad, por la genialidad, por el apoyo constante y por confiar siempre.

Gracias a la vida y a la música que lo ponen todo en su justo lugar. Gracias a la infinita paciencia y a la brevísima inspiración en todos estos años.

Gracias a la Universidad Pedagógica Nacional, lugar que me deja grandiosas personas y los mejores recuerdos grabados por siempre. Al Departamento de Matemáticas y a sus docentes de quienes aprendí a ser un profesional además de una mejor persona. Especiales gracias al profesor Felipe Fernández, director del trabajo y voz de ayuda y orientación cuando más fue necesario. Gracias a mi compañero de trabajo por ser el complemento para lograr el equilibrio entre dos personas que están hechas de desequilibrios.

César.

RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Simulación de errores tipo I y II asociados a pruebas de hipótesis sobre medias y proporciones
Autor(es)	Gómez Báez, Julián Eduardo; Rendón Mayorga César Guillermo
Director	Fernández, Felipe
Publicación	Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional, 2015, p. 92
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Prueba de hipótesis, estadística, simulación, Excel, test de probabilidad

2. Descripción
Este trabajo va dirigido a docentes y estudiantes de estadística inferencial que quieran ilustrar a partir de procesos de simulación, los errores de tipo I y II asociados apruebas de hipótesis estadísticassobre medias o proporciones. Se centra en el aprovechamiento de hojas electrónicas de cálculo en Excel,como herramienta para la simulación de experimentos aleatorios que posibiliten la representación de resultados de este tipo de pruebas básicas de hipótesis. El trabajo abarca básicamente los siguientes aspectos: - Revisión histórica de las pruebas de hipótesis - Desarrollo teórico de las pruebas de hipótesis para medias y proporciones muestrales. - Simulación en hojas de cálculo en Excel

3. Fuentes
Las principales fuentes que nutren este documento son: Alvarado, J. y Obagi, J. (2008). *Fundamentos de inferencia estadística*. Bogotá D.C: Pontificia Universidad Javeriana. Canavos, G. (1998). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. México D.F: Mc Graw Hill.

Cordova, M. (2003). *Estadística Descriptiva e inferencial*. Lima : Librería MOSHERA S.R.L

Lipschutz, S. y Schiller, J. (2004). *Introducción a la probabilidad y estadística*. Madrid: Mc Graw Hill.

Manzano, V. (1997). *Inferencia Estadística. Aplicaciones con SPSS/PC+*. Madrid : RA-MA

Montgomery, D. y Runger, G. (1996). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*, 1ª ed. México: McGraw Hill.

Newbold, P., Carlson, W. y Thorn, B. (2008). *Estadística para administración y economía*. Madrid: Pearson Hall

4. Contenidos

El trabajo se desarrolla en seis capítulos a saber:

- El primer capítulo trata sobre las motivaciones que llevaron a hacer este trabajo, se hace una introducción de lo que será todo el contenido que viene adelante, y así mismo se plantean los objetivos pretendidos.
- En el segundo capítulo se hace un desarrollo formal sobre las pruebas de hipótesis. En primer lugar se revisan algunos antecedentes históricos que sirven para presentar aspectos teóricos, para contextualizar la temática y justificar decisiones tomadas en el desarrollo del trabajo. En segundo lugar se presenta la teoría de las pruebas de hipótesis estadísticas sobre distribuciones de medias muestrales y proporciones muestrales; entre otros asuntos, se describe el procedimiento para realizar la prueba de hipótesis en cada caso, el cálculo de las probabilidades necesarias ylas representaciones gráficas de las pruebas que fueron sugeridas. Al final del capítulo se dedica un apartado para presentar con más detalle el error tipo II y las curvas de potencia asociadas.
- El tercer capítulo del trabajo revisa aspectos teóricos sobre las simulaciones en general. Se presentan las etapas de una simulación, los factores que inciden en el desarrollo de las simulaciones y finalmente se hace una presentación sucinta sobre las hojas de cálculo de Excel, software que se utiliza para el diseño y desarrollo de las simulaciones del trabajo.
- En el cuarto capítulo se describe la metodología del trabajo asociada a la construcción de las simulaciones para las pruebas de hipótesis de medias y proporciones muestrales. En principio se hace una descripción de la simulación propuesta y se comentan aspectos generales del archivo, a continuación se hace una división en cuatro partes: la simulación para distribución de medias muestrales, la validación para la simulación de medias, la simulación para proporciones

muestrales y la validación para la simulación de proporciones. En cada sección se describe la manera como se construyó la hoja de cálculo correspondiente, se presentan las herramientas de Excel que fueron utilizadas, se comenta el funcionamiento del archivo de simulación, los datos que controla el usuario, los datos que arroja el programa, etc.

- El quinto capítulo corresponde a las conclusiones obtenidas al término del trabajo, se presentan conclusiones referentes a la simulación como herramienta pedagógica para los procesos de enseñanza – aprendizaje de un tema en matemáticas, y también se comentan conclusiones específicas sobre el archivo de simulación, su uso y las propiedades que permite verificar.
- Finalmente el sexto capítulo presenta la bibliografía consultada a lo largo del trabajo.

5. Metodología

El trabajo se realizó en dos etapas. En la primera se revisó literatura sobre pruebas de hipótesis estadísticas, y en la segunda se elaboró las simulaciones correspondientes a las pruebas de hipótesis para medias muestrales y para proporciones muestrales.En relación con la primera etapa, se revisaron tres asuntos: antecedentes históricos de las pruebas de hipótesis, aspectos teóricos formales que se consideran en la actualidad para el desarrollo de las pruebas de hipótesis, y algunas formalidades relacionadas con la teoría de las simulaciones. En lo que respecta a la segunda etapa: se realizaron en Excel las simulaciones de las pruebas de hipótesis para medias y proporciones, atendiendo a los elementos teóricos estudiados, se programaron los distintos formularios empleados en la simulación y finalmente se verificaron algunas propiedades teóricas de las pruebas (en particular de los errores tipo I y II) por medio de la simulación.

6. Conclusiones

Con base en el trabajo realizado y en los resultados obtenidos, se pueden establecer algunas conclusiones de las tareas desarrolladas. En primer lugar se puede concluir sobre la importancia que tiene la indagación documental que se hizo para sustentar el diseño de la simulación presentada en el trabajo, el ejercicio de profundizar de una manera rigurosa e independiente en nociones correspondientes a las pruebas de hipótesis estadísticas, permitió afianzar comportamientos propios del futuro Licenciado en Matemáticas tales como la autonomía y la responsabilidad.

Por otra parte se lograron concluir algunos criterios matemáticos existentes en la teoría y verificados a través de la simulación, entre otras se obtuvieron: 1. Cuando el tamaño de la muestra aumenta, las probabilidades de los errores tipo I y II tienden a disminuir. 2. A medida que la probabilidad α se vuelve más grande, la probabilidad β se va volviendo más pequeña. 3. Para el caso de la simulación de proporciones fue posible verificar que para muestras suficientemente grandes ($n>30$) la distribución binomial se aproxima a la distribución normal y por el contrario, cuando el tamaño de muestra va disminuyendo ($n<30$) entonces la diferencia entre ambas distribuciones va siendo cada vez más notoria. Finalmente del desarrollo del trabajo se desprendieron diferentes ideas que pueden ser posibles trabajos de grado para interesados. Por ejemplo se propone el desarrollo de simulaciones para representar los errores tipo I yII de forma empírica para las distribuciones de diferencia de medias y diferencia de proporciones. De otro lado emerge la posibilidad de desarrollar una nueva simulación para representar los errores tipo I y II para medias y proporciones pero haciendo uso de software diferente al Excel tales como SPSS, R Commander, etc.

Elaborado por:	Rendón Mayorga César Guillermo y Gómez Báez Julián Eduardo.
Revisado por:	Fernández, Felipe

Fecha de elaboración del Resumen:	20	05	2015

Tabla de contenido

Tabla de Ilustraciones

I. PRESENTACIÓN

INTRODUCCIÓN

Actualmente se puede considerar que las pruebas de hipótesis son una de las herramientas más potentes con las que cuenta la estadística. Este calificativo encuentra base esencialmente en que las pruebas de hipótesis permiten el estudio de parámetros de una población estadística sin necesidad de analizar la población completa, solamente es necesario estudiar una o varias muestras aleatorias para poder hacer inferencias poblacionales que sean significativas y objetivas.

Lo anterior supone ventajas a la hora de realizar estudios estadísticos en los cuales el hecho de contemplar toda la población que se quiere,puede resultar complejo o muy costoso(Canavos, 1998). En consecuencia, las propuestas de trabajos e investigaciones que surgen en torno a las pruebas de hipótesis resultan enriquecedoras y pertinentes. Aunque este trabajo de grado se enmarca precisamente bajo la premisa de la pertinencia de estos trabajos, la propuesta que se generó se decidió enfocarla en el marco del desarrollo de una herramienta informática en Microsoft Excel que estuviera dirigida –en principio–a estudiantes de inferencia estadística de tal suerte que les sirviera para conceptualizar de una manera más práctica las pruebas de hipótesis y específicamente lo relativo a los errores tipo I y II.

Cabe señalar que para lograr el propósito de construir una herramienta en Excel que permitiera representar los errores tipo I y II en pruebas de hipótesis, se tomaron algunas decisiones sin las cuales el trabajo se habría desbordado. La decisión más relevante fue que la simulación sería solamente para las distribuciones de medias muestrales y de proporciones muestrales en tanto son los dos primeros casos que se estudian normalmente y, dado que no hay simulaciones previas identificadas en la documentación estudiada, resultaba sensato iniciar desde los casos sugeridosdejando abierta la posibilidad de continuar con las demás distribuciones (diferencia de medias, diferencia de proporciones, etc.) por parte de interesados en su profundización.

Dicho lo anterior solo resta mencionar la manera como se estructuró este trabajo. Así pues, en el primer capítulo del documento se desarrolla, además de la introducción, la justificación sobre la cual se soporta esta propuesta de trabajo de grado. Se presentan también los objetivos que se esperan alcanzar y sobre los cuáles se pueda evaluar el trabajo logrado.

En el segundo capítulo se hace una revisión de la teoría propia de las pruebas de hipótesis, se inicia haciendo un estudio de algunos antecedentes relativos a las pruebas, se exponen las teorías de Fisher y de Neyman – Pearson desde una perspectiva histórica, después se realiza un contraste entre ambas teorías. A continuación se desarrolla una definición formal de las pruebas de hipótesis, se dedica una parte exclusiva para definir el error tipo I y el error tipo II; seguidamente se muestra una clasificación de las pruebas de hipótesis en bilaterales, unilateral a izquierda y unilateral a derecha. Asimismo se presentan la distribución de medias, la distribución de proporciones y la distribución binomial (esta última necesaria para el estudio de las distribuciones de proporciones cuando la muestra es relativamente pequeña). Por último en este capítulo se trata un método para calcular el error de tipo II, la potencia de la prueba y las curvas de potencia.

En el tercer capítulo se hace un desarrollo teórico sobre el proceso de simular. En principio se busca definir qué es la simulación bajo la mirada de diversos autores, acto seguido se hace referencia a las etapas de una simulación y a los factores que intervienen en una simulación; en cada caso se procura relacionar la teoría expuesta con la simulación diseñada para este trabajo. Además de lo anterior se hace una presentación breve de Microsoft Excel, con lo cual concluye el capítulo.

En cuanto al cuarto capítulo, este corresponde con la descripción metodológica del trabajo llevado a cabo. En primer lugar se esbozan algunas generalidades de la simulación hecha, situación que da pie para comentar sobre los comandos de los cuales dispone el archivo de simulación (estos se clasifican entre aquellos que controla el usuario y aquellos que arroja el programa). A continuación se hace una explicación detallada sobre cómo fue la realización de cada hoja del archivo de Excel, las cuales son: simulación para distribuciones de medias, validación para la simulación de medias, simulación para distribuciones de proporciones y validación de la simulación de proporciones. En cada caso se buscó detallar con la mayor precisión todas las herramientas, funciones, formularios, etc., de Excel que se emplearon durante el diseño del archivo.

En lo que respecta al quinto capítulo, en este se consignan las conclusiones que surgieron de la finalización del trabajo. Se consideraron varios tipos de conclusiones, como por ejemplo las referidas a los aportes que dejó en la vida académica y profesional de los autores el desarrollo del proyecto; también algunas conclusiones matemáticas relativas a elementos teóricos de las pruebas de hipótesis que se pudieron comprobar mediante la simulación, etc.

Finalmente solo resta decir que el trabajo planteado aquí, y particularmente la simulación en Excel que fue desarrollada, se diseñó esencialmente con el propósito de mostrar un ambiente académico de trabajo matemático mediado por una herramienta informática, en el cual los estudiantes estén en condiciones de identificar y representar algunos elementosteóricos de las pruebas de hipótesis extrapolados de los libros de texto,con la convicción que de esta manera se puede aportar a un mejor aprendizaje de los conceptos tratados en una clase.

JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta de trabajo de grado busca básicamente representar los conceptos de error de tipo I y de tipo II haciendo uso de Microsoft Excel, con la finalidad de evidenciar de una manera práctica cuándo es más probable cometer alguno de los errores, modificando parámetros como la media, la desviación estándar, etc.

El error de tipo I se genera en el momento en que, haciendouna prueba de hipótesis, se toma como falsa la hipótesis nula de la situación dada cuando esta se ha debido aceptar. Por otra parte, el error de tipo II emerge cuando se acepta como verdadera la hipótesis nula siendo que esta se ha debido rechazar.

Se considera para este trabajo de grado que es posiblediseñar una simulación que permita observar la ocurrencia de los errores tipo I y tipo II a partir de la utilización de los test estadísticos para medias muestrales y proporciones muestrales.En esta simulación se espera que el usuario pueda introducir parámetros de las distribuciones (desviación, medias, etc.). Se observa una particular relevancia en esto último en tanto que, cuando se estudia la prueba de hipótesis, y en particular los errores tipo I y II, no se encuentran muchos recursos informáticos con los que se puedan ver las implicaciones y precisiones del tema a partir de ejemplos diseñados por los estudiantes y el docente.

Se considera también que es un trabajo viable que aporta herramientas para el aprendizaje de la estadística de futuros maestros en matemáticas y de forma similar para la enseñanza que tienen a su cargo los profesores de los espacios de estadística inferencial básicamente.

Por otra parte esta es una buena oportunidad para poner en juego distintos conocimientos desarrollados durante el transcurso del pregrado y que están relacionados principalmente con la estadística, más específicamente con la estadística inferencial, pero también con espacios académicos cursados como probabilidad y la línea de informática y programación. Además de lo anterior, se concibe la realización de este trabajo de grado como una oportunidad que permiteel desarrollo de aptitudes y actitudes propias y necesarias de la investigación formativa con todo lo que esto abarca.De otro lado también se acepta que el desarrollo del proyecto puede ayudar a fortalecer la autonomía del futuro profesor de matemáticas estudiando de manera rigurosa y de forma independiente aspectos relacionados con las matemáticas.

En este punto es importante mencionar que la propuesta de trabajo de grado encuentra soporte en la pertinencia del uso de herramientas tecnológicas en la clase de matemáticas; como lo señala Batanero (2000),la experimentación con fenómenos aleatorios (reales o simulados) genera en el estudiante una experiencia estocástica que es difícilmente igualable en su relación empírica con lo cotidiano, así mismo comenta que la simulación como material de trabajo en el aula adquiere particular relevancia en tanto que la actividad docente no se enfoca ya en la enseñanza de las técnicas para calcular probabilidades y estimadores, sino en el análisis mismo de las situaciones y los problemas propuestos.

En conclusión es por todo lo anterior que se justifica la elaboración del proyecto, por cuanto, entre otras, es acorde a las finalidades que propone el Departamento de Matemáticas de la universidad para los trabajos de grado que desarrollan los futuros licenciados en matemáticas (DMA[1], 2014), además de responder a la necesidad de desarrollar e implementar herramientas informáticas en el aula de matemáticas.

OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo de grado es ilustrarlos errores de tipo I y II en pruebas de hipótesis a través de simulacioneselaboradas en Microsoft Excel, haciendousode test de hipótesis para medias y proporciones muestrales.

Como objetivos específicos con la realización de este trabajo de grado se espera:

- Profundizar, a través de una revisión en la literatura, en el trabajo existente sobrelos conceptos de error de tipo I y II, en particular lo relacionado con la representación delos mismos.
- Desarrollar una simulación en Excel en la que el usuario indique algunos parámetros de distribuciones (media, desviación, proporción etc.) y que permita estudiar los errores de tipo I y II en un curso de estadística inferencial.
- Fundamentar desde un punto de vista teórico lo correspondiente a la simulación informática, esto es considerar los diferentes aspectos que se deben tener en cuenta a la hora de realizar simulaciones.
- Documentar los resultados obtenidos, correspondientes al trabajo de exploración y simulación que permitan ilustrar los errores de tipo I y II utilizando distintas técnicas de inferencia estadística.

[1]Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

II. MARCO TEORICO

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La inferencia estadística, y en particular las pruebas de hipótesis, surgen debido a la tendencia creciente del siglo XIX de las publicaciones científicas las cuales presentaban un sinnúmero de análisis de datos, que finalmente concluían en juicios subjetivos de los autores como consecuencia de no tener herramientas formalizadas y generalizadas para el manejo, ni para el estudio de datos que indujeran a juicios de objetividad en relación con las decisiones que se tomaban con base en ladisertación que se estuviera haciendo (Monterrey y Gómez, 2007). Es ante esta necesidad latente de la comunidad científica que surgen las pruebas de hipótesis estadísticas.

El desarrollo de las pruebas de hipótesis estadísticas presentó dos vertientes antagónicas entre sí y ambas hicieron parte de lo que se denominó la *revolución estadística* (Fernández & García, 2008). La primera de estas corrientes fue protagonizada por Ronald Fisher (1890 - 1962) y la segunda protagonizada por JerzyNeyman (1894 - 1981) y Egon Pearson (1895 - 1980). No obstante aunque los trabajos realizados por cada parte asumieron posturas filosóficas diametralmente diferentes, lo cierto es que en ambos casos tuvieron como antecedente común el estudio y uso de la prueba *Ji cuadrado de bondad de ajuste*[2]de Karl Pearson (1857 - 1936); detalle que no es menor por cuanto se considera que esta prueba de bondad de ajuste fue el detonante para el desarrollo de la prueba de hipótesis (Salsburg, 2001).

Aunque actualmente en el estudio de la prueba de hipótesis se asume un modelo mixto, que combina los aportes de Fisher y de Neyman – Pearson, es importante hacer una breve revisión separada de cada una de las corrientes desarrolladas para poder establecer con claridad sus diferencias, las cuales finalmente no radican en los cálculos a realizar sino en los razonamientos que sigue cada una.

---

[2]Esta prueba permite determinar si un conjunto de datos responde a una función de distribución matemática.

LA TEORÍA DE FISHER (LAS PRUEBAS DE SIGNIFICACIÓN)

Hay que mencionar que Fisher no solamente se dedicó al estudio y desarrollo de la estadística. También, desde pequeño, se mostró interesado en la biología y en particular en la teoría evolucionista de Darwin y en la genética. Posteriormente, se sabe también, que invirtió gran parte de su tiempo en realizar observaciones astronómicas (estudio asociado a la teoría de errores, lo que más adelante lo motivó a investigar problemas estadísticos) ydurante su estadía en Cambridge[3] también se interesó por estudiar la mecánica estadística bajo la tutoría de James Jeans.

En el campo de la estadística los aportes de Fisher son invaluables y le sirvieron de sobra para ser considerado uno de los padres fundadores de la *estadística moderna* o de la *estadística inferencial*. En particular desarrolló lo que se conoce hoy como Análisis de varianza y covarianza (que consiste esencialmente en técnicas para la recolección de una mayor cantidad de información a partir de muestras pequeñas, asumiendo para este fin una distribución normal), así mismo formalizó las ideas de niveles de significación, hipótesis nula y estableció los que consideró como pasos fundamentales para el diseño de una investigación.

Específicamente en la creación y avance de las hipótesis estadísticas, Fisher publica en 1925 el libro "*StatisticalMethodsforResearchWorkers"* en el que describe un método cuantitativo y objetivo para la obtención de conclusiones a partir de observaciones realizadas y su respectivo análisis. La técnica desarrollada por Fisher presenta esencialmente dos características que la hacen única en contraste con los trabajos de Neymany Pearson. En primer lugar Fisher declara un procedimiento con un carácter de inferencia inductiva[4]. En segundo lugar se establece únicamente una *hipótesis nula* para el desarrollo de la prueba de significación, consideración que se contrapone con el uso de dos hipótesis que actualmente se tiene, esta idea puntual se debe a que Fisher no acepta la idea de trabajar con dos hipótesis estadísticas contrarias entre sí. Dado que el autor cimenta su

[3]Fisher gana una beca para realizar sus estudios superiores de matemáticas en Cambridge, y de allí se gradúa en 1912 como *Wrangler*, la cual es la posición más alta de los *mathematicaltripos* que son concursos típicos de Cambridge.

[4]Considerando las inferencias inductivas como aquellas en las que, de una serie de juicios particulares es posible deducir un juicio universal sintetizador o ampliador.

teoría sobre sólo una hipótesis estadística (la hipótesis nula),lo que se hace en este método es medir la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el que en efecto se ha obtenido (en el estadístico calculado), a esta medida se le asigna el nombre de ***valorp***[5]. De igual manera Fisher utiliza la ***significación*** para mostrar que esa probabilidad *p* es lo suficientemente pequeña como para rechazar la hipótesis planteada, así pues en ese caso quedaban de manifiesto dos posibles causas por las cuales se rechazaba la hipótesis: un primer caso es que la realización constituye un evento raro, o bien la hipótesis no tiene validez desde el momento en que se planteó. La creación del *valor p* por parte de Fisher es quizás la idea central de sus pruebas de significación y hasta el día de hoy sigue siendo objeto de distintas discusiones en ámbitos académicos de la estadística.

Finalmente en relación con los términos generales de las pruebas de significaciónde Fisher, cabedecir que el autor en su libro ya mencionado, no describe de dónde proceden los test estadísticos que utiliza ni tampoco qué *valor p* se considera o no significativo; más aún en 1965 en su libro "*Statisticalmethodsand scientificinference"* declararía: "Ningún investigador tiene un nivel de significación fijo, al cual año tras año y en toda circunstancia rechaza hipótesis; más bien entrega su mente a cada caso particular a la luz de la evidencia y sus ideas". (Fisher, 1965, citado por Sánchez, Cortiñas y Tejera, 2011).

LA TEORÍA DE NEYMAN – PEARSON (LOS CONTRASTES DE HIPÓTESIS)

Por una parte, JerzyNeyman fue un matemático de origen ruso considerado, al igual que Fisher, uno de los padres de la *estadística moderna*. Además de sus trabajos en las pruebas de hipótesis al lado de Pearson, Neyman también trabajó en otros ámbitos (principalmente) de la estadística como: el muestreo de poblaciones finitas, la eficiencia de la estrategia muestral, entre otros.

De otro lado, Egon Pearson, principalmente reconocido por ser el hijo de Karl Pearson (creador de la prueba Ji cuadrado), fue un estadístico que labraría una amistad perpetua con Neyman y con el cual desarrollarían la teoría de la prueba de hipótesis y su reconocido *Lema de Neyman – Pearson*, contribuciones que plasmarían en documentos como "*Sobre el*

[5] Definición que es consonante con la que se tiene actualmente del valor p.

problema de los test más eficientes en las pruebas de hipótesis" y "*La prueba estadística de hipótesis en relación con las probabilidades a priori*". Sobre Egon, cabe decir también que durante su estadía en Cambridge[6] y después de haberse graduado, se preocupó por aprender sobre física solar y astronomía en general.

En relación con los aportes de Neyman – Pearson al campo de la estadística, el principal es el desarrollo de la teoría de pruebas de hipótesis, a la cual le dieron un enfoque matemáticamente lógico y riguroso, convirtiéndola así implícitamente en un sistema deductivo y automáticamente contraponiéndose al carácter inductivo que Fisher tenía en sus pruebas de significación. Precisamente Fisher fue un crítico férreo de los métodos desarrollados por Neyman – Pearson, no obstante ellos dos también atacaron implacablemente a la teoría del primero, generándose así una enemistad que perduraría hasta la muerte de ambas partes.

Para el caso de las pruebas de hipótesis de Neyman – Pearson, estos consideran que son criterios de toma de decisiones que permiten aceptar o rechazar una hipótesis dada asumiendo ciertos riesgos. Según el enfoque de estos dos autores, se deben plantear dos hipótesis para decidir sobre una de ellas, en primer lugar la hipótesis nula H_0 que ya consideraba Fisher, y en segundo lugar una hipótesis alternativa (lo que constituye la principal diferencia con el modelo de significación de Fisher) H_A que generalmente es contraria a la nula y que juntas, son exhaustivas en relación con los posibles resultados del parámetro que se está estudiando. Con este nuevo concepto las investigaciones se tornan finalmente en un problema de decisión sobre dos posibles alternativas, en las que, al aceptar una de las hipótesis automáticamente se rechaza la otra.

Dada esta manera de trabajar la prueba de hipótesis, se generan entonces de forma natural dos tipos de errores: el ***error tipo I*** y el ***error tipo II***. El primero de ellos se genera al rechazar una hipótesis nula que se debía aceptar; el segundo error se genera al aceptar una hipótesis nula que se debía rechazar. Dados estos dos tipos de errores y la rigurosidad matemática con la cual Neyman y Pearson desarrollan su teoría, es entonces posible

[6]Universidad de la cual obtuvo su *Bachelor of Arts* después de haber interrumpido sus estudios superiores durante el lapso en el cual duró la primera guerra mundial

calcular de forma objetiva la probabilidad de cometer ambos tipos de errores. Las probabilidades asociadas se denominan α y βpara los errores tipo I y II respectivamente. De esta manera al calcular α y βse genera la llamada *zona de rechazo* o *región crítica*. Así pues, si el valor que arroja el test estadístico pertenece a la región crítica, entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa.

En esta teoría de prueba de hipótesis la elección de un estadístico de prueba *óptimo* se obtiene al maximizar la función de potencia que se define como $(1-\beta)$en el espacio de los parámetros que son objeto de estudio. Este enfoque particular, sustituye el *valor p* de Fisher por una *regla de decisión R* que está basada en la noción de *nivel de significación de la prueba* y cuyo valor es el α mencionado anteriormente como la probabilidad de cometer el error tipo I.

En el marco de la teoría de Neyman – Pearson es importante notar que cuando se acepta una hipótesis H significa solamente adoptar una decisión A y no una B, en consecuencia no se adjetiva como verdadera o falsa la hipótesis; de forma análoga rechazar una hipótesis H no implica más que seleccionar una decisión B y no implica que se piense que H es falsa. En ese sentido, la teoría Neyman – Pearson tiene según sus propios autores, reglas de *comportamiento deductivo*[7]. Se considera que bajo este enfoque de la prueba de hipótesis el investigador decide sobre una u otra hipótesis, sin tomar partido o emitir juicios subjetivos en relación con alguna de ellas, y la decisión tomada es producto del estudio y análisis de las teorías de estadística y probabilidad.

DIFERENCIAS ENTRE FISHER Y NEYMAN – PEARSON

Como se ha mencionado en el apartado anterior, las diferencias entre Fisher y Neyman – Pearson trascendían lo estrictamente académico y llevó a generar una enemistad que desembocó en el enfrentamiento entre sus posiciones, en relación con la creación de una teoría sobre hipótesis estadísticas que fuera completamente exacta y rigurosa. Fisher por una parte consideraba que su tratamiento era el único que permitía inferencias inequívocas

[7] Término que tanto Neyman como Pearson acuñan, para establecer una diferencia diametral con el concepto de inferencia inductiva planteado por Fisher.

en relación con el tratamiento de la hipótesis que fuera objeto de estudio. Cuando Neyman terminó de pronunciar su discurso de ingreso a la *Sociedad Real de Estadística* en Londres, Fisher comentó que Neyman tendría que haber hablado sobre “un tema sobre el cual pudiera hablar con autoridad”. De otro lado Neyman llegó a decir que las técnicas de prueba de Fisher eran “en un sentido matemáticamente especificable, peores que inútiles”.

Además de lo anterior, cabe comentar a continuación un par de diferencias teóricas entre las dos perspectivas:

- El término de hipótesis nula introducido por Fisher hace alusión a que es la hipótesis cuya falsedad se pretende demostrar, esto con el fin de tomar una de las siguientes decisiones: En primer lugar la hipótesis se rechaza al nivel de significación *p* encontrado; o bien, la evidencia que se arroja acerca de la hipótesis no es suficiente para emitir un juicio, por lo cual este se reserva ante una base de información insuficiente.

  En los trabajos de Neyman – Pearson cuando se introduce una hipótesis alternativa (que no es más que una serie de alternativas contrarias a la hipótesis nula), esto implica que al terminar la prueba de hipótesis era posible aceptar una de las dos hipótesis, mientras que Fisher por su parte nunca consideraba *aceptar* la hipótesis nula, sino más bien que la hipótesis *no se rechazaba*.

- Otra diferencia marcada entre ambas teorías radica en el *valor p* considerado por Fisher y el error tipo I con probabilidad de ocurrencia α planteado por Neyman – Pearson. Una primera diferencia se observa cuando el investigador fija de antemano[8] el valor de α (determinando así la zona de rechazo para la prueba), mientras que el *valor p* es calculado a partir del test de probabilidad utilizado y puede ser mayor, menor o igual que el α, evento sobre el cual el investigador no tiene control. Por otra parte, como lo menciona Mueses (2008) es posible evidenciar que, aunque relacionados, ambos conceptos son diferentes por cuanto el *valor*

[8] Es posible que en algunos casos el nivel alfa se fije después de hacer la investigación, caso del cual se hablará más adelante.

$p$puede entenderse como el valor más pequeño para el error tipo I o el nivel α por el cual la hipótesis nula se puede rechazar.

La anterior revisión histórica se considera suficiente fundamento para, a continuación, empezar a definir formalmente los elementos teóricos correspondientes a las pruebas de hipótesis estadísticas, las cuales son –como se mencionó- un híbrido entre las dos corrientes presentadas anteriormente.

PRUEBA DE HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

Una prueba de hipótesis es un proceso para determinar inferencias acerca de valores específicos en los parámetros de la población que es objeto de estudio. Cuando se realiza algún tipo de investigación, esta suele estar basada en una o varias hipótesis o conjeturas sobre la realidad. Como mencionan Alvarado y Obagi (2008) el método científico consiste en últimas en un mecanismo para contrastar tales hipótesis contra la realidad, y concluir si la evidencia está o no de acuerdo con la hipótesis planteada.

Para el caso de la estadística las hipótesis deben tener relación con las poblaciones de los fenómenos que son objeto de investigación; diferentes estadísticos que se obtengan a partir de muestras aleatorias serán la evidencia para refutar o no una hipótesis. Por todo lo anterior es posible definir una hipótesis estadística como una afirmación acerca de las características de una poblaciónque debe ser verificada, tales como el valor de un parámetro, la forma de una distribución, la relación entre dos parámetros, la independencia entre atributos, etc.

A la hora de establecer una hipótesis siempre es posible encontrar otra que este en contraposición de la primera. A esas hipótesis se les dará el nombre de *hipótesis nula* e *hipótesis alternativa*, estas hipótesis son excluyentes entre sí y son exhaustivas en relación con la característica poblacional que se estudia.

La hipótesis nula se considera como la conjetura inicial de la investigación; esta suposición se hace con base en experiencias anteriores, el conocimiento *a priori* y las necesidades del investigador. Un criterio común para establecer la hipótesis nula es que esta sería el valor que se asumiría cierto si no se pudiera llevar a cabo la investigación. En adelante y a menos que se indique lo contrario, a la hipótesis nula se denotará como H_0. La hipótesis alternativa es, como se mencionó, la contraria a la hipótesis nula, y en ese sentido se constituye en una afirmación no tan elemental de suponer, la cual se debe poner a prueba. Usualmente se le denota como H_1 o H_A dependiendo del autor.

La hipótesis se debe formular en forma lógica y debe ser enunciada antes de obtener los datos muestrales(Martínez, 2012). Son ejemplos de hipótesis estadística:

- Que el promedio de calificación que tendrán los estudiantes en un curso de estadística, sea superior a 40.
- El 90% de los estudiantes aprobarán un curso.
- 5% de las unidades producidas por una máquina serán defectuosas.

Es importante mencionar que en determinados casos (si se reúne suficiente evidencia) la hipótesis alternativa puede llegar a ser la hipótesis nula de una nueva investigación. Por tanto, toda hipótesis nula deberá ser considerada como verdadera hasta cuando la información experimental demuestre lo contrario (Alvarado y Obagi, 2008). Cabe mencionar en este punto que toda prueba de hipótesis es susceptible de un error intrínseco en tanto se basa en datos muestrales para inferir datos poblacionales. En particular se estudiarán dos tipos de errores intrínsecos, que son en últimas el objeto central de estudio de este trabajo de grado.

ERROR TIPO I

Se define el error tipo I cuando se rechaza la hipótesis nula, siendo que la misma se ha debido aceptar. La probabilidad de cometer este error se denota normalmente con la letra α (alfa)y en términos probabilísticos se expresa como una probabilidad condicional en la queα = P(rechazar Ho | Ho es verdad). El valor de α es precisamente el nivel de significación que se utiliza en la teoría de Neyman – Pearson.

ERROR TIPO II

Se define el error tipo II cuando se acepta la hipótesis nula siendo que se ha debido rechazar. La probabilidad de cometer este error se denota normalmente con la letra β(Beta). En términos probabilísticos se define como: β = P (aceptar Ho | Ho es falsa). La probabilidad del error tipo II da pie para definir las curvas de potencia y de operaciones, sobre las cuales se volverá más adelante.

Así como hay dos tipos de errores es posible encontrar dos tipos de aciertos, los que definen la fortaleza de la prueba, a saber:

1. Confianza de hipótesis $(1-\ \alpha)$: es la capacidad que tiene la prueba para detectar que H_0 es verdadera, cuando en efecto lo es. Es fácil evidenciar que se trata del complemento de la probabilidad de cometer el error tipo I.
2. Potencia de la prueba $(1-\beta)$: Es la capacidad de la prueba para detectar un rechazo de H_0 cuando el rechazo deba realmente darse. Como en el caso anterior, la potencia no es más que el complemento de la probabilidad de incurrir en el error tipo II.

Los anteriores conceptos se resumen en la tabla 1:

	H_0es verdad	H_1es verdad
No se rechaza H_0	Decisión correcta. Confianza de hipótesis $(1-\ \alpha)$	Decisión incorrecta. Error tipo II $P(Error\ tipo\ II)=\beta.$
Se rechaza H_0	Decisión incorrecta. Error tipo I. $P(Error\ tipo\ I)=\alpha.$	Decisión correcta. Potencia $(1-\beta).$

Tabla 1: posibilidades que tienen las hipótesis

Otra manera de ver la información relacionada en la tabla anterior es la que identifica Martínez (2012) de la siguiente forma:

- ✓ Si se acepta una hipótesis verdadera, la decisión es correcta.
- ✓ Si se acepta una hipótesis falsa, cometemos el error tipo II.
- ✓ Si rechazamos una hipótesis verdadera, cometemos error tipo I.

- ✓ Si rechazamos una hipótesis falsa, la decisión es correcta.

Dicho lo anterior, conviene ahora abarcar una serie de pasos utilizados comúnmente para hacer pruebas de hipótesis.

REALIZACIÓN DE UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Para la realización de una prueba de hipótesis se consideran los siguientes pasos:

1. Se plantean las hipótesis H_0yH_1, definiendo la lateralidad de la prueba.

Aunque las hipótesis pueden considerar varios parámetros muestrales, para los efectos de este trabajo se tratarán solamente hipótesis simples, entendidas estas como aquellas en las cuales se estudia un único parámetro muestral.En esta situación general las hipótesis que conciernen a un parámetro θ se formulan como:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

Donde θ_0 se considera un valor particular del parámetro. En la teoría del contraste de hipótesis este tipo de planteamiento se conoce como contraste de ***hipótesis simple***.Así pues, cómo se dijo en el párrafo anterior, una hipótesis simple postula que el parámetro θsólo puede tomar un valor o bien, más técnicamente, que el conjunto de parámetros asociado a una hipótesis simple consiste en un sólo punto.

2. Seleccionar el nivel de significación.

El nivel de significación es la máxima probabilidad especificada con la finalidad de hacer mínimo el error de tipo I; esta probabilidad se fija antes de escoger la muestra. El nivel de significación se simboliza con α como se mencionó en la tabla 1.

El nivel de significación tiene sentido escogerlo antes de desarrollar la investigación asociada, pues si se desarrolla la prueba de hipótesis y posteriormente se determina el valor deα entonces la realización del análisis estadístico sería un acto de investigación ficticiodado que se podría elegir convenientemente el α para obtener determinados resultados. No obstante lo anterior, suele ocurrir que se realizan pruebas de hipótesis y sólo al final se escoge el valor de α, en estos casos hay que precisar que dicho valor no se escoge pensando en la conveniencia particular para aceptar determinada hipótesis y por tanto no se desvirtúa la investigación realizada.

La elección del valor de α depende de las consecuencias del error que traería el rechazo de una u otra hipótesis. Se puede usar cualquier nivel dependiendo de la investigación que se haga, no obstante en la práctica se utilizan generalmente niveles del 1%,5% o 10%. Cuando se usa un nivel del 1% ó 5% a estos se les conoce como **límites fiduciales**[9]

Particularmente se suele trabajar con un nivel del 5% (0,05) cuando el enunciado del problema no fija de antemano el nivel.

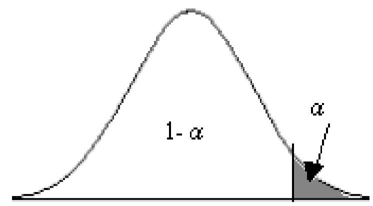
Cuando se trabaja con un nivel del 5% se considera que el resultado es *significativo;* si se emplea el 1% el resultado es *altamente significativo*; de otro lado si se usa el 10%, el resultado se considera *poco significativo.*

Gráficamente al valor del nivel de significación corresponde un área bajo la curva de probabilidad (por lo general la curva normal) llamada **región critica o zona de rechazo.** Habrán ocasiones en que la región critica se sitúe únicamente a la derecha de la curva, se dirá que es una pruebaunilateral a la derecha. Si se sitúa a la izquierda, será una prueba unilateral a la izquierda. Si se deben considerar dos regiones críticas entonces se habla de una prueba bilateral (Martínez, 2012).

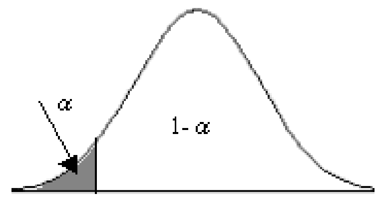
Cuando se esté desarrollando una prueba de hipótesis y haya una prueba unilateral entonces se toma el valor total del α. Por otra parte para los contrastesbilaterales el α se dividirá en dos. Finalmente la región no sombreada se denominará *zona de aceptación o de no rechazo.*

[9] Como menciona Manzano (1997) el termino de limite fiducial no hacía referencia exclusiva a estos dos valores, sin embargo a través del tiempo se ha restringido a estos dos únicos valores.

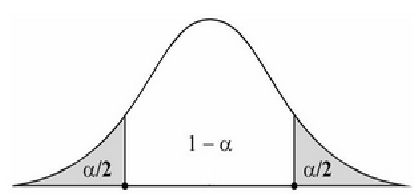
Prueba unilateral hacia la derecha



Prueba unilateral hacia la izquierda



Pruebabilateral



3. Conocer o estimar la varianza.
   En este punto es importante aclarar que se deben asumir unos supuestos, los cuales son diferentes si se trata de un estadístico para medias o si es un estadístico para proporciones (que son los únicos casos que se estudian en este trabajo):

   a) Supuestos para estadísticos de medias muestrales:
      - ✓ La muestra es aleatoria.
      - ✓ La población es normal[10].
      - ✓ La varianza poblacional es conocida (en la práctica este dato se desconoce por lo cual debe ser estimado).

   b) Supuestos para estadísticos de proporciones muestrales:
      - ✓ La muestra es aleatoria.
      - ✓ La población es normal.

[10] La población es normal cuando presenta una distribución normal. Análogamente existen poblaciones binomiales, etc.

- ✓ Conocer el valor de *p*(este valor *p* hace referencia a la proporción de una característica dicotómica de una población y no debe confundirse con el *valor p* de Fisher) o estimarlo en caso de no ser conocido.

4. Se toman una o varias muestras, según sea el caso, de las poblaciones bajo estudio.

Se debe mencionar que para la realización imparcial de la investigación estadística, la muestra debe ser escogida de forma aleatoria del conjunto de datos que conforman la población objeto de estudio.Así mismo hay que destacar que el test estadístico a utilizar depende en cada caso del tamaño y características que tenga la muestra seleccionada, así pues hay diferentes maneras de seleccionar la prueba estadística en relación con la muestra,como por ejemplo distribución de medias, distribución de proporciones, distribución de diferencia entre dos medias y distribución de diferencia entre proporciones. Llegado el momento se describirán con detalle los dos primeros casos, los cuales son el objeto de este documento.

5. Determinar los valores críticos y sus regiones de rechazo.

La formulación de los puntos críticos dependeesencialmentede dos factores. En primer lugar está relacionado con el nivel de significación que se haya escogido para el estudio. En segundo lugar depende de si se trata de una prueba unilateral o una prueba bilateral. A continuación se formulan a modo de ejemplo los puntos críticos Z_i correspondientes a los límites fiduciarios y suponiendo en cada caso una prueba tantounilateral comobilateral:

a. Si $\alpha = 1\%$ entonces : si se trata de una prueba unilateral se tiene $Z < 2{,}33$;
   Si es una prueba bilateral entonces $Z_1 = 2{,}58$ y $Z_2 = -2{,}58$.

b. Si $\alpha = 5\%$ entonces : si se trata de una prueba unilateral se tiene $Z < 1{,}64$;
   Si es un prueba bilateral entonces $Z_1 = 1{,}96$ y $Z_2 = -1{,}96$.

c. Si $\alpha = 10\%$ entonces : si se trata de una prueba unilateral se tiene $Z < 1{,}28$; Si es una prueba bilateral entonces $Z_1 = 1{,}64$ y $Z_2 = -1{,}64$.

6. Se calcula el estadístico de la prueba con base en los resultados muestrales y suponiendo que H_0 es verdadera.

El estadístico de la prueba depende directamente de los datos que se conozcan del problema y del tipo de prueba de hipótesis que sea (para medias, proporciones, diferencia de proporciones, etc.), por lo cual existen estadísticos para medias muestrales proporciones muestrales, diferencia entre dos medias muestrales y diferencia entre dos proporciones muestrales. Se abordarán los dos primeros casos:

I. Distribución de medias muestrales[11]:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} cuando\ n > 30$$

II. Distribución de proporciones muestrales:

a. Si la muestra tiene más de 30 elementos: se utilizará el estadístico de distribución normal, como se sigue:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} siendo\ n > 30$$

b. Si la muestra tiene 30 o menos elementos: se utiliza el estadístico para distribuciones binomiales:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

[11] Los autores en su mayoría sugieren el uso del test t de Student cuando el tamaño muestral es menor que 30, no obstante lo anterior y como se explicará más adelante esto no es necesario si la población (independiente de su tamaño) es normal.

7. Se compara el estadístico calculado con el valor teórico de la distribución y se toma la decisión.

De acuerdo al nivel de significación asignado se acepta o se rechaza la hipótesis nula y se concluye la investigación verificando la existencia o no de los errores de tipo I y II.

Cuando se realiza una prueba de hipótesis, si las hipótesis estadísticas tratan sobre un determinado parámetro θ, entonces se tendrán tres tipos de pruebas de hipótesis.

TIPOS DE PRUEBAS DE HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

Si en una prueba de hipótesis, la hipótesis nula es sencilla (se considera que una hipótesis es sencilla cuando establece un valor específico para un parámetro y/o indica la distribución de probabilidad de la población con todos sus respectivos parámetros (Alvarado y Obagi, 2008)) entonces se establecen los siguientes casos:

Prueba de hipótesis bilateral: esta hipótesis tiene la forma:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

Donde θ_0 es un valor fijo para el parámetro. Como es evidente en este caso no interesa saber si el parámetro es mayor o es menor al que se estableció, solamente saber si es diferente.

Prueba de hipótesis unilateral a la derecha: esta hipótesis tiene la forma:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta > \theta_0$$

Esta prueba de hipótesis se usa cuando interesa conocer si el parámetro está por encima de lo establecido en la hipótesis nula.

Prueba de hipótesis unilateral a la izquierda: esta hipótesis tiene la forma:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta < \theta_0$$

Esta prueba de hipótesis se usa cuando interesa conocer si el parámetro está por debajo de lo establecido en la hipótesis nula.

A la hora de establecer el sistema de hipótesis, es posible que este involucre diferentes parámetros de la población. Se muestran a continuación los casos que se abordarán en este trabajo (no obstante existen más, referidos a otros test estadísticos.):

1. *Hipótesispara distribuciones de medias muestrales*

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ *Prueba de hipótesis bilateral*	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ *Prueba de hipótesis unilateral a la derecha*	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ *Prueba de hipótesis unilateral a la izquierda*

Donde μ_0 es un valor particular supuesto de la población

2. *Hipótesis para proporciones muestrales*

$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$ *Prueba de hipótesis bilateral*	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$ *Prueba de hipótesis unilateral a la derecha*	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$ *Prueba de hipótesis unilateral a la izquierda*

Donde p_0 es un indicador porcentual particular supuesto de la población

A continuación se hace una descripción detallada de estos dos casos.

DISTRIBUCIÓN DE MEDIAS MUESTRALES

Considérese en este caso una muestra aleatoria de tamaño n escogida de una población que responde a una distribución particular[12] con media μ y con varianza σ^2. Si se tiene que $\bar{X}$ es la media muestral y además se tiene un n suficientemente grande (normalmente $n > 30$ para la mayoría de autores) entonces la variable aleatoria,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Tiene una distribución aproximadamente normal $N(0,1)$ (Córdova, 2003). Precisamente si se adopta una población con los supuestos anteriores y se establece un sistema de hipótesis de la forma $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu \neq \mu_0$, entonces la variable Z anterior es precisamente el test estadístico que se utilizará para desarrollar esta prueba de hipótesis.

Una vez que se ha aplicado el test estadístico para el parámetro μ_0 y se ha obtenido la variable estandarizada Z_0 bajo un nivel de significación α, entonces se determinan las zonas de rechazo para la prueba, de la siguiente manera:

1. **Prueba bilateral**: Se analiza cuando se estudia el sistema $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu \neq \mu_0$, allí se tiene que los valores de la región crítica son,

   $$Región\ crítica = \{Z_0 \geq Z_{\alpha/2} \ \ o \ \ Z_0 \leq Z_{-\alpha/2}\}$$

   Donde Z_α es la estandarización del nivel de significación α y $Z_{\alpha/2}$ es el valor correspondiente para un análisis de dos colas.
2. **Prueba unilateral de cola a la derecha**: Se analiza cuando el sistema es de la forma $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu > \mu_0$, y la región crítica se determina como

   $$Región\ crítica = \{Z_0 > Z_\alpha\}$$

[12] No necesariamente distribución normal, aunque más adelante se explicará que, para efectos de este trabajo, se desarrollarán las pruebas con poblaciones normales.

3. **Prueba unilateral de cola a la izquierda**: Se analiza cuando el sistema es de la forma $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu < \mu_0$, y la región crítica se determina como

$$Región\ crítica = \{Z_0 < Z_\alpha\}$$

Así, para cualquiera de los anteriores casos, cuando el Z_0 cumpla con la condición del intervalo (según sea el caso que se esté analizando en la prueba) entonces la hipótesis nula se rechazará.

Aunque el anterior método fue el hallado en la mayoría de textos consultados, lo cierto es que hay, por lo menos, dos métodos más para comparar el test estadístico frente a otro valor con el fin de determinar el rechazo o no de la hipótesis nula, tal y como se describen a continuación[13].

1. **Método por valores críticos**: Este método sugiere no estandarizar ninguno de los valores implicados en la prueba, sino hacer una comparación directa entre ellos de la siguiente manera. Supóngase que para la muestra seleccionada su media es $\bar{X}$, tiene una desviación estándar de $\sigma/\sqrt{n}$, con un nivel de significación α y una media poblacional supuesta de μ_0. Es posible estandarizar el valor de α y obtener automáticamente el valor Z_α, esta última variable por definición es:

$$Z_\alpha = \frac{\overline{X_\alpha} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Donde los valores de Z_α, μ_0 y $\sigma/\sqrt{n}$ son conocidos, lo que conlleva a despejar $\overline{X_\alpha}$ en tanto es el único dato que no se tiene, lo que resulta en:

$$\overline{X_\alpha} = \mu_0 + \frac{Z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$$

13 Mencionar estos diferentes métodos resulta de particular relevancia dado que en la simulación de Excel se hará uso de estas diferentes alternativas.

Finalmente se tienen los valores $\overline{X_\alpha}$ y $\bar{X}$ que son los que se comparan: Si se tiene que $\bar{X} > \overline{X_\alpha}$ entonces se rechaza la hipótesis nula.

2. **Método del valor *p*:** Este camino se contrapone al anterior en el sentido en que aquí la idea es poner todo en términos de probabilidades y compararlas entre sí. La primera probabilidad que se considera es el valor mismo de α en virtud que es la probabilidad del error tipo I, en segundo lugar se calcula el valor *p* de la muestra sobre la cual se está haciendo la prueba de hipótesis, para calcular este valor *p* lo primero que se debe hacer es estandarizar los datos para obtener Z_0, finalmenteeste último dato tiene asociada una probabilidad[14] que resulta ser precisamente el valor *p* de la prueba.

   Finalmente el criterio está dado por la condición:

$$p < \alpha$$

   Si esta desigualdad se cumple entonces la hipótesis nula se rechaza.

Una vez se ha decidido sobre la hipótesis nula, se considera que la prueba de hipótesis ha concluido (A menos que la hipótesis nula resulte falsa y se esté interesado en investigar el verdadero valor de la media poblacional, estudio que está íntimamente relacionado al error tipo II y que se tratará más adelante).

Para terminar este apartado cabe mencionar algunos aspectos generales sobre las pruebas de hipótesis para distribución de medias muestrales.

- ✓ "La aproximación de la media muestral a la normal $N\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$es buena si $n \geq 30$, sin importar si la población es discreta a continua."[15]

[14] Probabilidad que puede ser calculada mediante el uso de una tabla para distribución normal $N(0,1)$ o en Excel mediante la función "1 - DISTR.NORM.ESTAND.INV", etc.

[15] Córdova, M. (2003) *Estadística Descriptiva e Inferencial*. Lima: Librería MOSHERA, p. 348.

- ✓ Aunque la mayoría de autores consideran que para $n < 30$ en una prueba de distribución de medias muestrales se debe utilizar la distribución t de Student, lo cierto es que el Teorema del Límite Central asegura que, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una muestra que responde a una distribución normal (o uniforme) entonces $\bar{X}$ se aproxima a una distribución normal $N\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.

  El anterior hecho adquiere una particular relevancia en este trabajo, pues es el argumento principal para no utilizar la distribución t de Student independientemente del tamaño de la muestra en tanto que, para el trabajo de simulación más adelante, es posible asegurar que siempre se está trabajando con una población normal (y en consecuencia con medias normales). Sin embargo queda abierta la investigación de realizar una simulación para medias muestrales usando la prueba normal y la prueba t de Student dependiendo del tamaño de la muestra, para analizar posibles diferencias y si hay lugar, para generar contrastes sobre ambos test a la luz de la simulación informática.

Una vez detallada la distribución de medias muestrales, se procede ahora a describir la distribución de proporciones muestrales.

DISTRIBUCIÓN DE PROPORCIONES MUESTRALES

Sea $x_1, x_2, \dots, x_x$ una muestra aleatoria de tamaño n, donde el parámetro que no se conoce es p la proporción de éxitos en la población. Y sea la estadística

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_x}{n} = \frac{x}{n}$$

Que es la proporción de éxitos en la muestra, siendo x el número de éxitos en la muestra.

Si n es suficientemente grande $(n \geq 30, n\hat{p} > 5\ y\ n(1-\hat{p}) > 5)$, el estadístico de proporciones para un valor x determinado estaría dado por:

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

Si se supone verdadera la hipótesis nula $H_0: p = p_0$ entonces la variable aleatoria estaría determinada por

$$Z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

El valor de Z es calculado a partir de una muestra aleatoria de tamaño ny se utiliza para probar $H_0: p = p_0$, contra la hipótesis alternativa.

Para tomar una decisión y determinar las regiones críticas se tendrá en cuenta

1. **Prueba bilateral** : con una prueba de$H_0: p = p_0$ contra $H_1: p \neq p_0$ la región critica en los valores de Z es el intervalo

$$Región\ critica = \left\{Z < -z_{1-\alpha/2}\ o\ Z > z_{1-\alpha/2}\right\}$$

2. **Prueba unilateral cola a la derecha** : si la prueba es de $H_0: p = p_0$ contra $H_1: p > p_0$ la región critica en los valores de Z es el intervalo

$$Región\ critica = \left\{Z > z_{1-\alpha/2}\right\}$$

3. **Prueba unilateral cola a la izquierda** : si la prueba es de $H_0: p = p_0$ contra $H_1: p < p_0$ la región critica en los valores de Z es el intervalo

$$Región\ critica = \left\{Z < -z_{1-\alpha/2}\right\}$$

Para el caso de las proporciones, las anteriores regiones críticas permiten determinar cuándo se tiene suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula, no obstante para este tipo de test estadístico también aplica la prueba del valor p mencionada para el caso de medias muestrales, esto es que si $p < \alpha$, donde p es el valor de probabilidad para el parámetro poblacional p y α es el nivel de significación, entonces se tiene suficiente sustento para rechazar la hipótesis nula.

Por otra parte si n es significativamente pequeño $(n < 30)$, el estadístico de proporciones sería el mismo pero las pruebas bilaterales y unilaterales estarían determinadas por:

Prueba bilateral: Si $x \ < \ np_0$ se debe calcular

$$\boldsymbol{P} = P[X \leq x \ cuando \ p = p_0] = \sum_{k=0}^{x} C_k^n \ p_0^k (1 - p_0)^{n-k}$$

Y si $x > np_0$ se calcula

$$\boldsymbol{P} = P[X \geq x \ cuando \ p = p_0] = \sum_{k=x}^{n} C_k^n \ p_0^k (1 - p_0)^{n-k}$$

Se rechaza $H_0 : p = p_0$ si $\boldsymbol{P} \leq {}^{\alpha}/_{2}$. En el caso contrario no se rechaza H_0.

Prueba unilateral cola derecha: esta se calcula de la siguiente forma

$$\boldsymbol{P} = P[X \geq x \ cuando \ p = p_0] = \sum_{k=x}^{n} C_k^n \ p_0^k (1 - p_0)^{n-k}$$

Y se rechaza $H_0 : p = p_0$ si el valor de $\boldsymbol{P}$es menor o igual que el nivel de significación α.

Dado que para muestras muy pequeñas la distribución de proporciones no resulta tan precisa, es importante revisar la distribución binomial, la cual se adecúa mejor para este caso y además es posible acercarla a la distribución normal, como se verá luego.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Se define como experimento binomial a un número$n$ fijo, de repeticiones independientes de un experimento aleatorio de Bernoulli, este se caracteriza así:

1. Las n pruebas son estadísticamente independientes[16].
2. Los resultados de cada prueba son mutuamente excluyentes, éxito (E) y fracaso (F).
3. La probabilidad p de éxito no cambia en cada una de las pruebas.

Se define la**variable binomial** como una variable aleatoria descrita según el número de éxitos o fracasos que ocurren en las$n$ pruebas de Bernoulli, para los cuales los posibles valores de Xson:$0, 1, 2, 3 \ldots, n$.Entonces laprobabilidad de cada uno de estos eventos (que son de éxito) es $p^k q^{\,n-k}$. El número de estos eventos elementales es igual a:

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Por lo tanto la probabilidad de obtener k exitos en n pruebas de Bernoullí es :

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

con $k = 0,1,2,3, \ldots, n$.Se debe tener en cuenta que si $p = 1/2$, la distribución binomial $\mathrm{B}(\mathrm{n}, \mathrm{p})$ es simétrica. Además, si $\mathrm{p} \rightarrow 1$, la distribución tiene asimetría negativa (cola a la izquierda), y si $\mathrm{p} \rightarrow 0$ la distribución tiene asimetría positiva (cola a la derecha).

Se debe mencionar que para un tamaño suficientemente grande de la muestra $(n > 30)$ la distribución binomial se aproxima al a distribución normal, fenómeno que se detalla a continuación.

APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL

Sean $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$, n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según el modelo Bernoulli con parámetrop. Cada variable X_i , tiene media $\mu_{\mathrm{x}_\mathrm{i}} = \mathrm{p}$ y varianza $\sigma^2_{\mathrm{x}_\mathrm{i}} = \mathrm{pq}$, siendo $\mathrm{q} = 1 - \mathrm{p}$ .Por lo tanto la variable aleatoria:

16 Esto significa que, el resultado de una repetición del experimento de no depende los resultados de las demás repeticiones.

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tiene distribución binomial con media $\mu_x = np$ y con varianza $\sigma_x^2 = npq$.

Ahora por el teorema central del límite, la variable aleatoria estándar está determinada por:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_{x_i}}{\sqrt{n\sigma_{x_i}^2}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

La cual tiene aproximadamente distribución normal $N(0,1)$, cuando n es lo suficientemente grande

Ahora, si X es una variable aleatoria binomial con media np y varianza npq,entonces, cuando $n \to \infty$la distribución de la variable aleatoria es:

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

Esta es aproximadamente la distribución normal $N(0,1)$.

NOTA: la aproximación es buena siempre que $n \geq 30$. Si $n < 30$, la aproximación es buena solo si p es cercano a 0.5. Cuánto más se aleja p de 0.5, se requiere n cada vez más grande para tener una aproximación aceptable(Cordova, 2003).

Hasta este punto, en resumen, lo que se ha hecho a lo largo del capítulo ha sido una revisión histórica sobre las pruebas de hipótesis, a continuación se hizo una descripción formal sobre las pruebas, se definieron elementos como los sistemas de hipótesis, el nivel de significación, etc., después se hizo un recorrido por los tipos de pruebas de hipótesis (a dos colas, con cola hacía la derecha, cola hacía la izquierda, etc.), luego se detallaron las distribuciones para medias muestrales y para proporciones muestrales. Finalmente, antes de continuar con lo demás, es importante dedicar un espacio para hacer varias especificaciones en relación con el error de tipo II y las curvas de potencia y puntualizar algunas de sus características, ya que son elementos centrales para el resto de trabajo.

POTENCIA DE LA PRUEBA DE HIPÓTESIS Y LAS CURVAS DE POTENCIA

Como se mencionó sobre el inicio de este capítulo (cfr. p. 26) el error tipo II en una prueba de hipótesis emerge cuando se acepta una hipótesis nula que es falsa y por tanto se ha debido rechazar. Dado que cuando se establece un sistema de hipótesis, la hipótesis alternativa no corresponde a un valor específico (en todo caso la hipótesis alternativa puede ser mayor, menor o diferente de la hipótesis nula sin especificar un valor particular del parámetro) entonces quien hace la prueba debe dar valores a la hipótesis alternativa y así a cada valor propuesto se le asocia una probabilidad β de cometer un error tipo II.

En general se considera que el error tipo II es menos sencillo de controlar y en consecuencia no es analizado con mayor detalle en muchas ocasiones (Cuervo, 2015). No obstante lo anterior, la probabilidad del error tipo II conduce al estudio de la potencia de la prueba, una noción importante que permite realizar inferencias sobre la prueba de hipótesis que se esté llevando a cabo.

Potencia de una prueba

En términos generales la potencia de la prueba (llamado también el poder de la prueba) no es más que el complemento de la probabilidad β de cometer un error tipo II, lo cual significa que la potencia estima qué tan probable es rechazar una hipótesis nula cuando en efecto se debe rechazar. Visto de una manera sencilla, se tiene:

$$Potencia = \beta^{C} = 1 - \beta$$

En otras palabras el poder representa la capacidad de una prueba para detectar como estadísticamente significativas,diferencias en los valores de los parámetros de las hipótesis (Díaz y Fernández, 2003). En consecuencia, cuando el poder de la prueba aumenta, las probabilidades de un error de tipo II disminuyen.

El análisis del poder de una prueba también se asocia al cálculodel tamaño mínimo de muestra requerida para obtener determinados valores de α y β. En general lo que se desea a la hora de realizar una prueba de hipótesis es que tanto α como β sean mínimos, sin embargo lo que ocurre normalmente es que cuando uno de los valores disminuye el otro tiende a aumentar; la única manera de lograr que ambos disminuyan es aumentando cada vez más el tamaño de la muestra, así pues si se quieren obtener valores específicos para las probabilidades de error tipo I y tipo II estos se pueden lograr para un determinado tamaño muestral. No obstante en este trabajo no se abordará esta situación en tanto no se desean hallar valores específicos de α y β.

Se considera que algunos factores influyen en el estudio de un poder estadístico y dependen de cada situación, estos son:

1. Como se comentó antes el tamaño de la muestra incide en la potencia de la prueba, este factor determina la cantidad de error de muestreo esencial al resultado de la prueba. Es difícil detectar un efecto en muestras muy pequeñas, por el contrario si el tamaño de la muestra es grande se obtendrá un poder más alto.

2. El nivel de significancia estadística utilizado en la prueba, este declara lo improbable que puede ser un resultado, si la hipótesis nula es verdadera, para ser considerada significativa, es decir, en cuánto se está dispuesto a tomar el riesgo de asumir una conclusión equivocada. Los criterios más utilizados son las probabilidades (5% 1 en 20) y (1% 1 en 100) si el criterio es 0,05 la probabilidad de obtener una conclusión equivocada cuando la hipótesis nula es verdadera, debe ser inferior a 0,05 y así análogamente para el otro caso. Si se utiliza un nivel de significancia de 5% significa que se tiene un nivel de confiabilidad del 95%. Para aumentar la potencia de una prueba se podría realizar la prueba con un nivel de significancia mayor, esto aumenta la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es falsa. Es decir, obtener un resultado estadísticamente significativo, pero también se aumenta el riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera, en este caso se aumenta el riesgo de cometer un error de tipo I.

3. La variabilidad de la respuesta o desviación estándar del estudio, cuanto mayor sea la desviación estándar, más fácil será detectar diferencias entre los grupos que se comparan y en consecuencia será mayor el poder estadístico del estudio.

Una vez se ha calculado el valor de β y se procede a interpretar su resultado, hay algunos criterios que ayudan a determinar si el valor obtenido es significativo o no, entre ellos se encuentran:

a. De acuerdo a Myoung (2003) el estándar adecuado de poder por la gran mayoría de investigadores es 0.80.

   Un poder estadístico mayor o igual a 0.80, indica las probabilidades de decir que hay una relación, diferencia o ganancia. Son las probabilidades que confirman que la teoría es correcta.

b. Si el poder de la prueba es aproximado o menor a 0.20 entonces se considera que es muy probable que se esté cometiendo un error de tipo II. En consecuencia se concluye que la potencia de la prueba no es útil y que no valdría la pena representar esa situación en un experimento real en tanto que la probabilidad de equivocarse es demasiado alta.

Hasta este punto se ha tratado la probabilidad β de cometer el error tipo II y se han comentado varios elementos asociados a tal probabilidad, sin embargo no se ha mencionado el método para calcular β, en la sección que sigue se aborda esta situación.

MÉTODO PARA CALCULAR EL ERROR TIPO II

En primer lugar hay que decir que no existe un único método para calcular la probabilidad del error tipo II, en ese sentido es usual presentar dos maneras para obtener β. Una primera opción es a través de intervalos de confianza, en tanto se pueden establecer intervalos en los que esté contenido el valor crítico de la prueba y de esa manera acotar el valor de β. Una segunda opción es usando directamente una probabilidad condicional que, en general, resulta sencilla de calcular, esta probabilidad condicional se estandariza y el número resultante es el valor de β. Este último método, por su sencillez, es el que se utiliza en la simulación realizada en este trabajo, y en consecuencia el que se describe con detalle a continuación, no sin antes decir que es necesario hacer una distinción entre la probabilidad del error tipo II para medias y para proporciones.

Cálculo del error tipo II para medias[17]

Sea una test para medias que sigue una distribución normal,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Considérese el siguiente sistema de hipótesis $H_0: \mu = \mu_0$ y $H_1: \mu > \mu_0$. Supóngase que en realidad $\mu = \mu_1 > \mu_0$. Como se explicó en el apartado correspondiente a la distribución de medias, se sabe que no puede rechazarse H_0 si un valor de $\bar{X}$ es menor que $\left(\sigma \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right) + \mu_0$. Por otra parte dado que la probabilidad del error tipo II es igual a la probabilidad de aceptar un H_0 falso, entonces es necesario determinar

$$\beta = P\left(\bar{X} < \frac{\sigma\, z_\alpha}{\sqrt{n}} + \mu_0 \middle| \mu = \mu_1 > \mu_0\right)$$

Ecuación que si se quiere dejar en términos de la distribución normal estándar no es más que:

$$\beta = P\left(Z < \frac{\frac{\sigma\, z_\alpha}{\sqrt{n}} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_1\right)$$

Así pues al sustituir los valores de μ_1 se van obteniendo los distintos valores para β (y automáticamente se puede ir obteniendo la potencia de la prueba para cada valor de μ_1). Adviértase que la probabilidad del error tipo II depende del tamaño n de la muestra, del valor de α, de la diferencia $(\mu_0 - \mu_1)$y de la desviación estándar poblacional σ. Un análisis

[17] Método adaptado de Canavos, G. (1998), p. 328

de estos parámetros permite constatar algunas propiedades que ya se han comentado anteriormente, por ejemplo para valores fijos de α, $(\mu_0 - \mu_1)$ y σ el tamaño del error de tipo II disminuye a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Se puede ver también que para valores fijos de n, $(\mu_0 - \mu_1)$ y σ entonces β aumenta conforme α disminuye. Finalmente se infiere que para valores fijos de n, α y σ, el β disminuye a medida que la diferencia $(\mu_0 - \mu_1)$ aumenta.

Cálculo del error tipo II para proporciones[18]

En primer lugar supóngase un sistema de hipótesis para proporciones de la siguiente manera:

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p > p_0$$

Sea una muestra de tamaño *n* y una prueba con nivel de significación α. Hay que mencionar que los métodos descritos funcionan siempre que *p* no sea muy cercano a 0 o 1, pues cuando esto ocurre la aproximación en general es mala dado que el estimador se vuelve sesgado. Si se considera la distribución normal para proporciones:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/_n}} = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Entonces habrá un rechazo de H_0si $Z_0 > Z_\alpha$. Esto conduce, de manera análoga al caso anterior, a una expresión para el cálculo de β sin estandarizar definida así:

$$\beta = P\left(\frac{p_0 - p_1 + Z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)/_n}} \middle| p = p_1 \right)$$

[18] Método adaptado de Montgomery y Runger (1996), p. 374

Donde p_0 es el valor de la hipótesis nula y $p_1$el valor de la hipótesis alternativa que se supone real. Una vez se obtenga el valor de la anterior fórmula, el mismo debe ser sometido a la estandarización normal (por medio de tabla normal o usando la función *DISTR.NORM.ESTAND* de Excel). Adviértase que al calcular β también se puede calcular de forma automática la potencia de la prueba.

Una vez definida la potencia de la prueba y revisadas las maneras para calcular la probabilidad de cometer el error tipo II, finalmente solo queda comentar algunos aspectos sobre las curvas de potencia.

Curvas de potencia y de operación

Como se comentó en los apartados anteriores la magnitud del error tipo II depende directamente de los valores que tome la hipótesis alternativa, así pues esta relación puede ser vista como una función $\beta(\theta)$ donde θ representa el parámetro de la hipótesis alternativa de la prueba (sin distinguir entre medias y proporciones); a esta función se le conoce como la ***función característica de operación***y cuando es graficada se obtiene la **curva característica de operación** (CO).

En general las curvas características de operación siempre tienen la misma forma (a menos que los valores de la hipótesis alternativa sean llevados a extremos en cuyos casos varía), las figuras a continuación ilustran la apariencia usual de las CO.

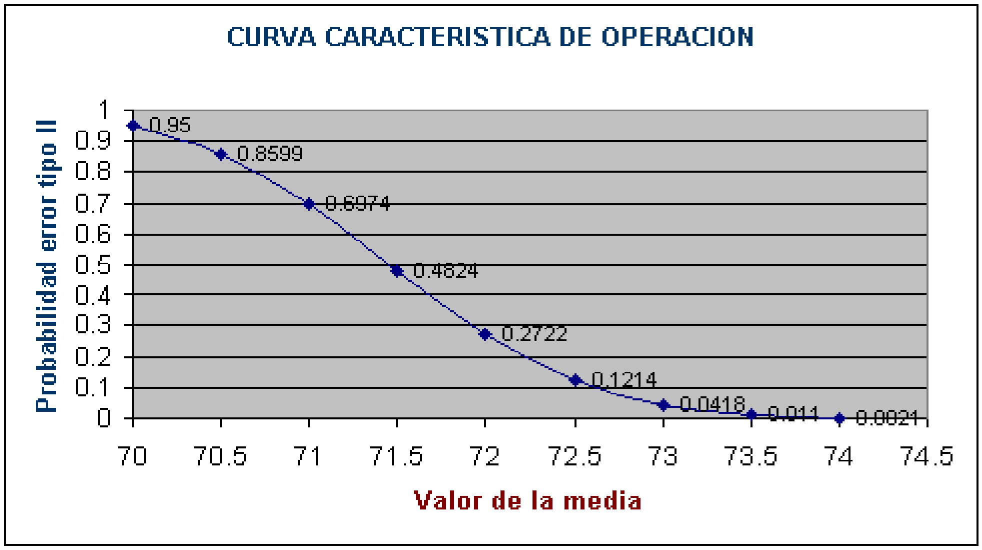


Ilustración 1 - Curva característica de operación[19]

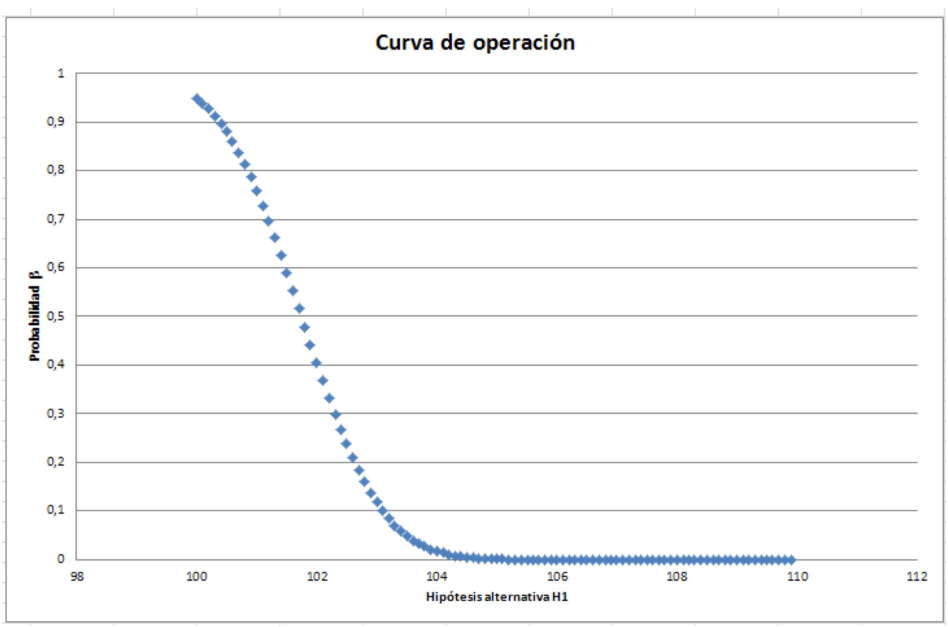


Ilustración 2 - Curva característica de operación[20]

[19] Tomada de http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/estadistica1/cap02c.html (mayo de 2015).
[20] Extraída del archivo de simulación de Excel de este trabajo a partir de un ejemplo concreto.

Como se puede observar en las anteriores gráficas, la tendencia general de las CO es que a medida que los valores del eje horizontal aumentan entonces los valores del eje vertical disminuyen, comportamiento que encuentra fundamento en que a medida que el parámetro alternativo esté más cercano al nulo, va a ser más complicado para la prueba evitar el error tipo II y en consecuencia su probabilidad de ocurrencia va a ser más alta; de igual manera en tanto el valor alternativo se aleje más del valor nulo entonces la magnitud del error tipo II irá disminuyendo.

Nótese también que para la primera curva de operación la cual fue tomada de internet, se grafican los puntos considerados y además se traza la curva que mejor se ajusta a esos puntos. Para el caso de la segunda gráfica que corresponde a la CO de la simulación de este trabajo, simplemente se trata de una gráfica de puntos en virtud a se está considerando unasituación discreta y no continua.

Como se comentó antes, la potencia de una prueba de hipótesis está dada por la expresión $1-\beta$. Utilizando un razonamiento similar al empleado para definir las CO, es posible definir la función $P(\theta)=1-\beta(\theta)$, la cual se llama***función potencia*** y "representa la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es falsa; es decir, cuando el valor del parámetro de H_1 es cierto" (Canavos, 1998. p. 312).Igual que en el caso anterior, cuando la función potencia es graficada se obtiene la **curva de potencia**, cuya forma general se muestra en seguida.

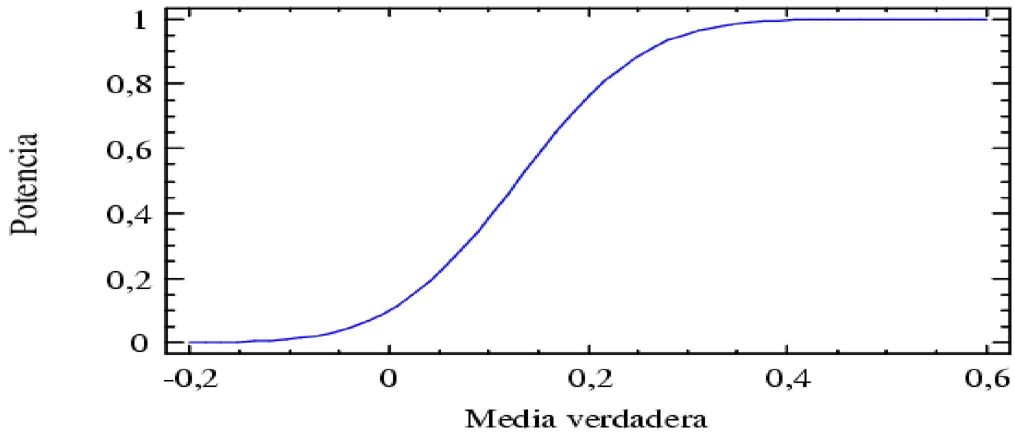


Ilustración 3 - Curva de potencia[21]

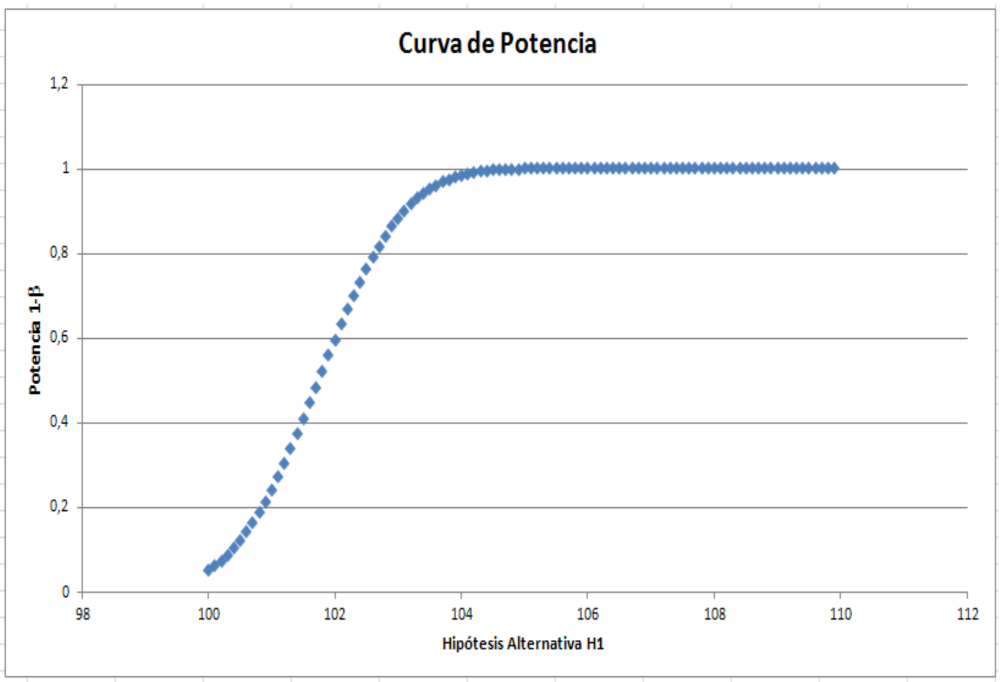


Ilustración 4 - Curva de potencia tomada de la simulación de Excel

Como resulta evidente, en el caso de las curvas de potencia ocurre un fenómeno contrario al que pasa en las curvas de operación: a medida que la hipótesis alternativa aumenta, la potencia de la prueba también lo hace. Esto se debe a que una función es el complemento de la otra.

[21] Tomada de http://www.udc.gal/dep/mate/estadistica2/sec1_3.html (mayo de 2015)

III. SIMULACIÓN EN HOJAS DE CÁLCULO

GENERALIDADES DE LA SIMULACIÓN

La simulación se utiliza generalmente para recrear experimentos cuya realización en condiciones completamente reales sería complicada por costos, circunstancias, etc. Como menciona Coss (1996) el término *simulación* data desde 1940 cuando Von Neuman y Ulam, durante la segunda guerra mundial, resolvieron problemas de reacciones nucleares cuya experimentación hubiera resultado muy cara y el análisis bastante complicado. No obstante lo anterior, cuando se dio el desarrollo y auge de los computadores, la simulación también encontró en estos artefactos un acicate para desarrollar cientos de modelos nuevos que resolvían situaciones científicas según fuera la necesidad de cada investigador.

Para abordar formalmente el proceso de simulación, conviene primero dar una definición, sin embargo en la actualidad no hay una concepción única que concentre las diferentes vertientes de los distintos autores, por lo cual se mencionarán algunas de las más relevantes para tener una idea general.

En principio Naylor (1975) define simulación como:

> *Una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos periodos de tiempo.*

No obstante la anterior definición abarca un escenario muy amplio que no se limita solamente a un programa de computación. Para ser más puntuales en la definición, se propone una nueva planteada por Maisel y Gnugnoli (1972):

> *Simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistema de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos periodos de tiempo.*

Esta definición, aunque más explícita que la anterior, no deja de rondar las mismas ideas generales de la primera, principalmente coinciden en que la simulación sirve para la descripción de experimentos a través del tiempo. A lo anterior, vale agregar un elemento que propone Shannon (1988) y es que los modelos generados por una simulación sirven, entre otras, para "*entender el comportamiento del sistema*[22] *o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema*", esto es importante porque pone de manifiesto una función de la simulación y es la de poder corregir los errores que se determinen en el medio del proceso. Para enriquecer más la concepción de simulación, también vale la pena agregar una idea que sugiere Banks (2009) en sudefinición: "*La simulación involucra la generación de una historia artificial de un sistema, la observación de esta historia mediante la manipulación experimental, nos ayuda a inferir las características operacionales de tal sistema*".

Es de resaltar una idea que no es explícita en las anteriores definiciones, y es que la simulación no necesariamente se realiza en un computador. La misma se puede hacer a mano o lo que es equivalente, usando material manipulativo (lanzamientos de monedas, dados, etc.). Ninguna de las características de la simulación se desvirtúa si esta no se realiza con un computador, no obstante la ventaja de un ordenador es que proporciona una mayor rapidez y eficiencia en la simulación, idea que resulta consonante con Batanero (2000) cuando señala que la ventaja de los computadores es que dada su naturaleza dinámica y suvelocidad, es posible estudiar diversos conceptos estadísticos.

[22] El autor se refiere al *sistema* como sinónimo del proceso o experimento que está siendo simulado

Así pues, finalmente es posible identificar algunas características esenciales (que no son lasúnicas) de la simulación a fin de tener claridad sobre este concepto[23].

- ✓ La simulación involucra conceptos y relaciones matemáticas que sirven para describir el comportamiento del evento simulado.
- ✓ Normalmente se utiliza la simulación para modelar experimentos cuya realización en la práctica resultaría particularmente difícil o costosa.
- ✓ Se suele usar la simulación para llevar a cabo experimentos que comprenden largos periodos de tiempo.
- ✓ Una de las utilidades de la simulación es que sirve para evaluar la pertinencia de las estrategias utilizadas para operar el experimento simulado.
- ✓ La simulación permite inferir características sobre el comportamiento del proceso simulado.

Antes de continuar con algunas ideas centrales sobre la simulación, resulta importante destacar que en la actualidad se carece de una teoría científica que garantice la validez de una simulación antes de realizar el experimento simulado en la vida real[24], a cambio de lo anterior lo que se hace para determinar la confiabilidad de una simulación es comparar los resultados obtenidos con los de otras similares que se hayan hecho, cuando eso sea posible.

Además de lo anterior Coss (1996) plantea algunas ventajas y desventajas en el proceso de simular.

<u>Algunas ventajas de la simulación</u>:

- ✓ Proporciona distintas alternativas de exploración para un mismo sistema.
- ✓ La simulación da al investigador un control sobre el tiempo en la medida en que un fenómeno simulado se puede acelerar.

[23]Hasta este momento, posterior a la revisión de la definición de simulación, en ningún caso se específica o diferencia sobre la simulación de procesos continuos o discretos. Esta diferenciación, aunque existe, no se abordará en este trabajo por cuanto escapa de su finalidad, y en todo caso las simulaciones tratadas en el mismo son de procesos discretos.

[24]Haciendo referencia a representar el experimento usando todas las condiciones y restricciones que se deban imponer al sistema real.

- ✓ Una vez construido el modelo se puede modificar de una manera rápida con el fin de analizar diferentes escenarios.
- ✓ Generalmente es más barato mejorar el sistema vía simulación que hacerlo en el sistema real.
- ✓ Es mucho más sencillo visualizar y comprender los métodos de simulación que los métodos estrictamente analíticos en tanto la simulación da un entendimiento más amplio del sistema.
- ✓ La técnica de simulación puede ser utilizada como un instrumento pedagógico para enseñar a estudiantes habilidades propias del análisis estadístico, teórico, etc.

También, como es de imaginar, algunos autores (Coss, 1996; Azarang y García, 1996; et al.) sugieren la existencia de ciertas desventajas del uso de la simulación, las cuales se relacionan a continuación:

<u>Algunas desventajas de la simulación</u>:

- ➢ La simulación es intrínsecamente imprecisa y tal imprecisión no es susceptible de medición.
- ➢ En general, es difícil aceptar los modelos de simulación.
- ➢ La solución de una simulación puede dar al investigador un sentimiento de seguridad aun cuando no haya obtenido necesariamente conclusiones correctas.
- ➢ La simulación tal y como es presentada requiere de equipos computacionales que no están a la mano de toda la población el 100% de las veces.

A continuación se presentan algunas etapas que se consideran inherentes a cualquier simulación según Azarang y García (1996).

ETAPAS DE LA SIMULACIÓN

La metodología para el desarrollo de una simulación comprende los siguientes pasos:

1. *<u>Definición del sistema</u>*: al inicio de una simulación, debe ser suficientemente claro y específico el evento que será simulado, así como una identificación de los objetivos,

las variables que incidirán en la decisión final, la interacción del sistema a simular con algunos otros sistemas, las restricciones y condiciones del sistema y finalmente las variables que no son controlables por el investigador y su respectivo comportamiento estadístico.

2. *Análisis del sistema*: se trata de establecer las relaciones entre todas las variables que intervienen en el sistema de tal manera que se pueda optimizar la medida de efectividad de la simulación misma.

3. *Formulación del modelo*: posterior a tener fijados de forma clara los objetivos de la simulación, se generan las relaciones lógico – matemáticas entre las variables, estas relaciones generan el modelo en sí mismo, y este último debe permitir la obtención de los objetivos planteados. Para el diseño del modelo es importante establecer todas las variables que harán parte de él y sus relaciones.

4. *Colección de datos*: dependiendo de la investigación que se esté llevando a cabo la recolección de datos puede, eventualmente, dificultar el estudio del sistema; en consecuencia, es de gran relevancia que se establezcan cuáles son los datos necesarios para que la simulación produzca los resultados deseados. Si no hay una manera *usual* de obtenerlos (registros contables, opiniones, etc.) entonces se recurre a la experimentación.

5. *Implementación del modelo*: es el traslado del modelo del *papel* a la computadora. En este punto hay que decidir qué lenguaje de programación (si es necesario), software o herramienta se utilizará para la ejecución del modelo.

6. *Validación del modelo*: en este proceso se determina la precisión y habilidad que tiene un modelo para simular un evento de la realidad. Esta validación se lleva a cabo con la comparación de los resultados que arroja el modelo y los resultados reales del sistema.

7. *Experimentación*: aquí se determinan las diversas alternativas por las que se puede optar para generar otros resultados que puedan ser de interés para el investigador y para los que se puedan realizar análisis de sensibilidad con respecto al modelo inicial.

8. *Interpretación*: en este punto se trata de analizar los resultados que arroja la simulación y con base en ellos, tomar una decisión en relación con la investigación que se está llevando a cabo. Es de resaltar que el computador no hace más que arrojar datos cuantitativos como producto de la simulación, sin embargo la interpretación de estos resultados corresponde al investigador.

Además de listar específicamente las etapas que una simulación debe llevar, algunos autores como Coss (1996) también manifiestan la importancia de mencionar factores que están involucrados en una simulación e inciden en su buen desarrollo y funcionamiento.

FACTORES DE LA SIMULACIÓN

En general estos factores que se consideran están estrechamente relacionados con las matemáticas y las ciencias computacionales, se trata de especificar cómo algunas ideas de estas ramas del conocimiento interfieren en el desarrollo e implementación de un proceso de simulación. En cada factor definido se describirá brevemente su papel en la simulación que es objeto central de este trabajo de grado.

4. *Generación de variables aleatorias no uniformes*: cuando el modelo de simulación es de carácter estocástico, es relevante contar con una herramienta capaz de generar números aleatorios no-uniformes que respondan a alguna distribución de probabilidad. A este respecto se espera que se puedan generar variables aleatorias no-uniformes de distribuciones como la binomial, normal, exponencial, Poisson, gamma, beta, distribución t, distribución F, etc.

   Cabe mencionar también que existen diversos test para saber si un conjunto de datos se pueden considerar aleatorios o no, entre estos se encuentran principalmente, el *test de rachas* que analiza aleatoriedad en el orden de aparición de los valores de una variables, y está también el *test de Kolmogorov – Smirnov*que busca contrastar si un conjunto de datos muestrales pueden considerarse como provenientes de una población con una distribución de probabilidad determinada, este último test sólo es válido para modelos de tipo continuo.

No obstante lo anterior, en el caso que compete a este trabajo más adelante será posible afirmar que la población proviene de una distribución normal (para el caso de la prueba de hipótesis para medias) y de una distribuciónbinomial (para las pruebas de hipótesis de proporciones).

5. *Lenguajes de programación*: aunque los primeros esbozos de una simulación se pueden hacer en lápiz y papel, por medio de diagramas de flujo, etc., lo cierto es que en algún momento se debe decidir cuál lenguaje de programación se utilizará para implementar la simulación. Normalmente hay dos opciones: en primer lugar desarrollar un software propio para la simulación sino se cuenta con el mismo y en segundo lugar, adquirir un programa que sirva para lo requerido.

   Para el caso de este trabajo, se ha utilizado como lenguaje de programación el programa Microsoft Excel el cual permite la introducción de funciones, condicionales, etc. Al interior del Excel se usó el *modo programador*[25]y en este las instrucciones se dan de igual manera que en el lenguaje de programación Visual Basic.

6. *Tamaño de la muestra*: es importante aclarar de entrada en este punto que cuando Coss (1996) hace referencia a la muestra aquí, está hablando del número de corridas de la simulación en el computador y no de la muestra como concepto estadístico. Dicho lo anterior, se busca que el tamaño de la muestra sea óptimo en relación con

25 Una herramienta avanzada que ofrece Excel a los usuarios y en el cual es posible crear formularios, macros, etc., como se verá en el capítulo cuatro.

el nivel de precisión que el investigador requiere. Dado que los resultados del modelo de simulación son la base para la toma de decisiones respecto al sistema real, se busca que los niveles de imprecisión sean mínimos y que sean conocidos en todo caso. El autor menciona dos maneras de obtener el tamaño de la muestra para que respondan a las necesidades anteriores:

i. De manera previa e independiente de la manera como opera el modelo, que será la vía que se utilice en este trabajo, en tanto se busca comparar qué ocurre con los resultados de la simulación en la medida en que el tamaño de las muestras (en el sentido del autor) varía.

ii. El tamaño de la muestra se ajusta durante la operación del modelo y basado en los resultados que este último arroje. Para esta alternativa se sugiere el uso de intervalos de confianza.

Aunque el autor menciona un factor más que denomina “*Diseño de experimentos*” y hace referencia esencialmente a la comparación entre las medias y las varianzas de las alternativas que se están analizando en la simulación, este no se muestra en el listado anterior porque se considera que no aplica para la simulación de este trabajo.

Después de haber definido el proceso de simulación y revisado brevemente las etapas y los factores de la misma en términos generales, solo resta ahora comentar algunas generalidades sobre Microsoft Excel, programa utilizado para realizar la simulación de este trabajo de grado. Aunque en el capítulo III se detallarán todos los procedimientos hechos con Excel, a continuación se presenta brevemente el programa.

MICROSOFT EXCEL

Microsoft Excel es una hoja electrónica de cálculo perteneciente a la suite de Office, la cual sirve para hacer operaciones aritméticas, realizar gráficas, analizar datos estadísticamente, ejecutar funciones lógicas, financieras, estadísticas, trigonométricas, etc. Cada archivo de Excel se llama un Libro y el mismo se compone de hojas, las cuales a su vez se componen de filas (el programa tiene un máximo de 65536 filas) y columnas (desde la letra A hasta IV), la intersección entre una fila y una columna se llama una celda, como se puede observar en la siguiente ilustración[26].

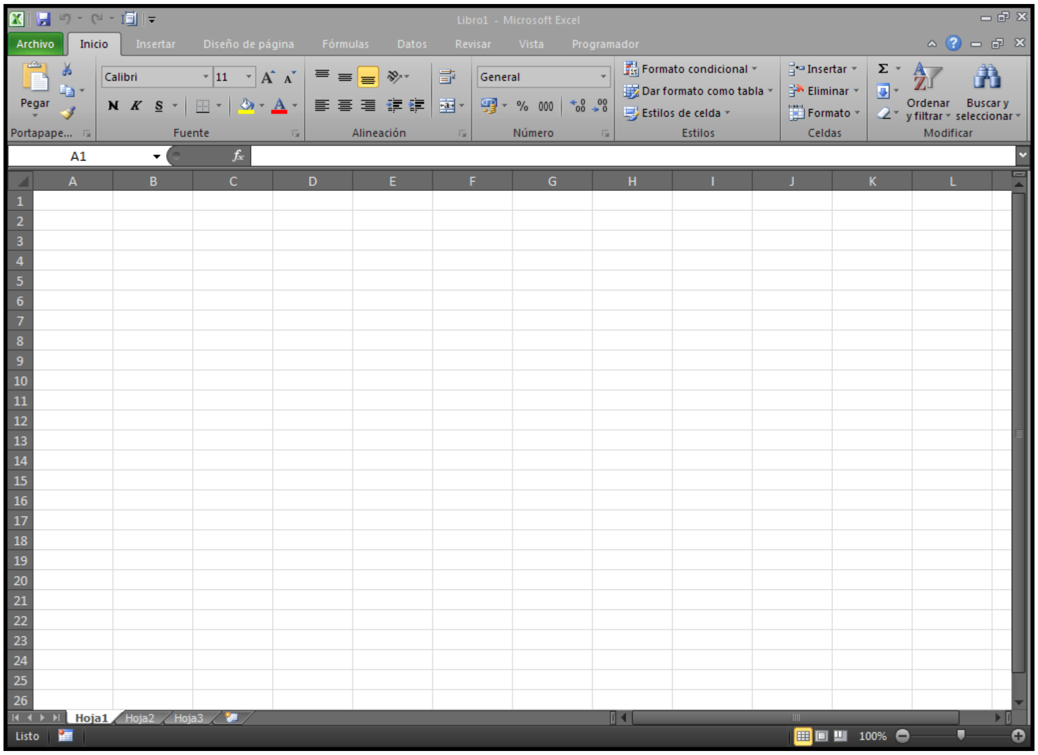


Ilustración 5 – Pantalla de inicio de Excel 2010

La escogencia de Excel para realizar la simulación se debe a varios factores. En primer lugar porque es el software de uso más extendido para realizar cálculos en computador, lo cual indica que más personas podrán utilizar adecuadamente el archivo de simulación. En segundo lugar la simulación se hace en Excel pensando en la población a la cual va dirigido el trabajo, que son estudiantes de inferencia estadística, se considera que esta población por su formación ya ha tenido experiencia previa en el manejo de Excel. Finalmente y en consonancia con los motivos anteriores, se utiliza Excel porque es un programa que se encuentra instalado en la mayoría de computadores actuales lo que tiene la ventaja que el usuario no debe instalar ningún programa demás para ejecutar la simulación.

26 Correspondiente a la versión 2010 del programa.

IV. METODOLOGÍA DE TRABAJO

En este capítulo se tratarán los aspectos logísticos de la simulación. En primer lugar se detallan funciones que cumple el programa y parámetros que controla el usuario. Lo anterior da pie para considerar entonces cómo fue el diseño del archivo, para este objeto primero se hace una descripción sobre los formularios en Excel, en tanto son una herramienta vertebral para el buen funcionamiento del programa. A continuación se hace un desarrollo que caracteriza cada uno de los comandos que componen la simulación y que son visibles para el usuario durante la ejecución de la misma, en este ejercicio se hace una división en cuatro partes del trabajo, a saber: simulación de medias muestrales, validación de la simulación de medias muéstrales, simulación de proporciones muestrales y validación para la simulación de proporciones muestrales (cada uno de estos elementos se corresponde con una hoja del archivo en Excel) y con lo cual se concluye este capítulo metodológico.

DESCRIPCIÓN DE LA SIMULACIÓN

En este apartado se describen en primer lugar las variables que controla el usuario al inicio del programa, y en segundo lugar los resultados cuantitativos que arroja la simulación.

La idea central de la simulación para distribuciones de medias muestrales es que se tiene una población normal de mil datos (la normalidad de los datos la asegura Excel como se explicará más adelante) y el programa selecciona aleatoriamente un número determinado de muestras, cada una con cierta cantidad de datos; estas dos últimas cantidades son controladas por el usuario. El archivo realiza un test estadístico para cada muestra, compara el resultado de cada muestra contra un nivel de significación prefijado, determina si cada prueba resulta en la zona de rechazo o no y hace un conteo de los casos en los que sí resulta en la zona critica. El anterior proceso se realiza para el parámetro muestral μ_0y de forma simultánea el archivo hace el mismo procedimiento para el parámetro μ_1 , este último se definirá como: $\mu_1 = \mu_0 + \Delta$ donde Δ es un número real que representa el incremento de la hipótesis alternativa respecto a la nula. El primer procedimiento (para la hipótesis nula) se hace para aproximar de una forma frecuencial el error de tipo I, y el segundo procedimiento (con la hipótesis alternativa) para aproximar de igual forma el error de tipo II.

Por otra parte, en relación con la simulación para las proporciones muestrales, la idea general de la hoja de cálculo es que se parte de una población binomial de mil datos consistente en ceros y unos, que representan fracasos y éxitos respectivamente (la generación de la población se explicará más adelante), el programa selecciona una cantidad de muestras de cierto tamaño muestral, ambos parámetros indicados por el usuario (el programa está diseñado para arrojar un máximo de 100 muestras, cada una con un máximo de 1000 datos) para cada muestra se generan dos columnas, en la primera columna está la muestra para la hipótesis nulap_0 fijada por el usuario, a esta columna se la realiza la prueba de hipótesis con dos test estadísticos: la prueba normal y la prueba binomial, esto se hace con el fin que el usuario note claramente las diferencias entre los test cuando la muestra no es muy grande, a continuación se realiza una comparación entre el valor p arrojado por la prueba normal y el nivel de significación α, con esto se determina si se rechaza o no la hipótesis nula, en caso de rechazarse el programa arroja un 1 de lo contrario arroja un 0, este procedimiento se hace con todas las muestras, finalmente se cuentan todos los unos que hayan y se dividen entre la cantidad de muestras, esto genera la simulación del error tipo I. De otro lado, en la segunda columna generada se encuentra la muestra pero trasladada Δunidades (cabe recordar de nuevo que la hipótesis alternativa p_1 se define como $p_1 = p_0 + \Delta$ donde p_0 es la hipótesis nula fijada por el usuario), y se realiza exactamente el mismo proceso anterior, la única diferencia es que por practicidad en este columna no se contrasta la prueba binomial con la prueba normal, simplemente se utiliza esta última, en cada hipótesis alternativa rechazada también la hoja de cálculo arroja un “1” y de la misma manera que en el caso anterior, se suman la cantidad de unos y se divide en la cantidad de muestras, este cociente es la simulación del error tipo II para las proporciones muestrales.

A continuación se presentan los datos que controla directamente el usuario y que ingresa antes de iniciar la simulación, y después los datos que arroja el programa y que permiten al usuario hacer conclusiones respecto a la simulación.

DATOS CONTROLABLES POR EL USUARIO

Las variables que controla el usuario al inicio del programa son:

- ✓ μ: se corresponde a la media poblacional supuesta y es un número digitado por el usuario con la única restricción de ser positivo o cero. Se va considerar como μ_0 cuando se haga el desarrollo de la prueba de hipótesis. Es pertinente aclarar que esta variable solo está presente en la hoja que corresponde a la simulación de la distribución de medias muestrales y se ubica en la celda B7.
- ✓ σ: se corresponde a la desviación estándar de la población, es un valor que digita el usuario y al hacerlo obliga a que la desviación de la población sea la introducida. Como en el anterior caso esta es una variable que solo tiene lugar en la simulación de distribución de medias muéstrales y se encuentra en la celda B8.
- ✓ p: es la probabilidad de éxito poblacional referente a una población binomial. Es una parámetro que digita el usuario cuando desea iniciar la simulación de proporciones muestrales. En la hoja de proporciones este parámetro se ubica en la celda B7
- ✓ q:es el complemento de la probabilidad anterior y se calcula automáticamente, es un parámetro que sólo aparece en la simulación parar proporciones muestrales y se ubica en la celda B8 de la hoja respectiva.
- ✓ n: corresponde al número de datos para cada muestra y debe ser menor o igual que 1000. Este se ubica en la celda B9.
- ✓ m: corresponde al número de muestras y debe ser menor o igual que 100. Este se ubica en la celda B10
- ✓ Δ: corresponde a un número racional positivo que determina el incremento de la hipótesis nula para definir una hipótesis alternativa. Está ubicado en la celda B11.
- ✓ α: corresponde al nivel de significación y a la probabilidad de cometer el Error de tipo I que fija el usuario. Se ubica en la celda B12

Todo lo anterior se puede dilucidar en las siguientes figuras tomadas del programa.

7	*p* =	
8	*q* =	
9	n =	
10	m =	
11	Δ =	
12	α =	

7	μ =	
8	σ =	
9	n =	
10	m =	
11	Δ =	
12	α =	

Ilustración 6: Datos que controla el usuario en la hoja de proporciones (izq.) y en la hoja de medias (der.)

DATOS RESULTANTES DEL PROGRAMA

Aunque son varios los datos que arroja el programa cuando se ejecuta, se consideran en este primer apartado solamente aquellos que son fundamentales para los resultados finales de la simulación. A saber:

- ✓ Suma 1: en esta celda el programa hace el conteo de las pruebas que resultan en la zona de rechazo respecto a la hipótesis nula. Está ubicada en la celda G5.
- ✓ Suma 2: en esta celda se hace el conteo de las pruebas que resultan en la zona de rechazo respecto a una hipótesis alternativa. Está ubicada en la celda G6.
- ✓ Alfa 2: en este espacio el programa realiza el cociente entre la celda “suma 1” y la cantidad *m*de muestras. Se corresponde con la probabilidad de cometer el error de tipo I para la simulación que se esté llevando a cabo. Está ubicada en la celda B14.
- ✓ Valor crítico: en esta celda el programa arroja el valor sin estandarizar que corresponde al nivel de significación. Está ubicado en la celda B15 para la hoja de medias muestrales. En el caso de la hoja de proporciones muestrales este dato no se considera.
- ✓ Beta: aquí el programa realiza el cociente entre la cantidad de la celda “suma 2” y la cantidad*m* de muestras. Se corresponde con la probabilidad de cometer el error de tipo II para la simulación que se esté llevando a cabo. Está ubicada en la celda B16 en la hoja de medias y en la celda B15 para la hoja de proporciones.

DISEÑO DE LA SIMULACIÓN

En esta sección se describen todos los procesos y herramientas utilizados para llegar a los datos que arroja el programa y que se mencionaron de alguna manera en el apartado inmediatamente anterior.

FORMULARIOS EN EXCEL

La principal herramienta para el diseño del programa son los formularios en Excel, a continuación se definen y posteriormente se comentan los formularios que se utilizaron para el desarrollo de la simulación.

Los formularios en Excel son un procedimiento algorítmico para ingresar datos en las hojas de cálculo, son de suma importancia pues permiten que no se cometan errores en la captura de información.

Estos proveen de los espacios necesarios para ingresar los datos, para este procedimiento se utilizan objetos especiales conocidos como *controles de formulario* que permiten agregar campos de texto, listas, botones de opción entre otras cosas más. Existen tres tipos de formularios en Excel.

Tipos de formularios en Excel

Cuando se usan formularios en Excel, es necesario identificar los tres tipos diferentes de formularios, estos serán de gran ayuda para limitar el procedimiento o simulación que se desee realizar, estos son:

- Formulario de datos.
- Hojas de cálculo con controles de formulario o controles ActiveX.
- Formularios de usuario en VBA[27].

[27]VBA indica Visual Basic Advance el cual es un lenguaje de programación.

Por medio de un formulario de datos se logra mostrar al usuario la información de una sola fila de una tabla, de la misma forma se puede hacer la edición de la información e inclusive crear un nuevo registro para una tabla dada.

Excel tiene la opción de generar automáticamente un formulario de datos para cualquier tabla. Se debe tener en cuenta para este tipo de formulario, que si una celda contiene una fórmula no es posible modificar dicha fórmula mediante el formulario, solamente se mostrará el resultado del cálculo sin poder editarlo.

Debido a que las celdas de una hoja de Excel sirven para introducir información, es posible pensar en una hoja como un gran formulario u hoja de cálculo con controles de formularios. De esta forma, se agregan controles de formulario a la hoja y se pueden establecer formularios de entrada de datos que son de gran utilidad.

Con este mismo algoritmo se pueden agregar botones, cuadros combinados, casillas de verificación y otros controles más que permiten la debida creación de formularios avanzados.

Formulario de usuario en VBA

Aunque se mencionó que hay diversos tipos de formularios para programar en Excel, en este caso se detallan los formularios de usuario en VBA los cuales fueron los únicos utilizados en este trabajo.

Los formularios de usuario en VBA, también conocidos como ***UserForm***, son cuadros de diálogo que hacen uso de controles de formulario para solicitar información al usuario. Estos formularios son creados desde el Editor de Visual Basic y administrados desde código VBA.

El Editor de Visual Basic VBE por sus siglas en inglés, es un programa independiente de Excel, no obstante es posible relacionarlos en tanto quees el programa que permite escribir código VBA el cual estará asociado a los formularios.

El método para abrir este programa es a través del atajo de teclado: ALT + F11. El Editor de Visual Basic contiene varias ventanas y barras de herramientas, que permiten al usuario programar con gran facilidad las condiciones y restricciones que el diseñador desee. La imagen siguiente ilustra la ventana emergente del VBA.

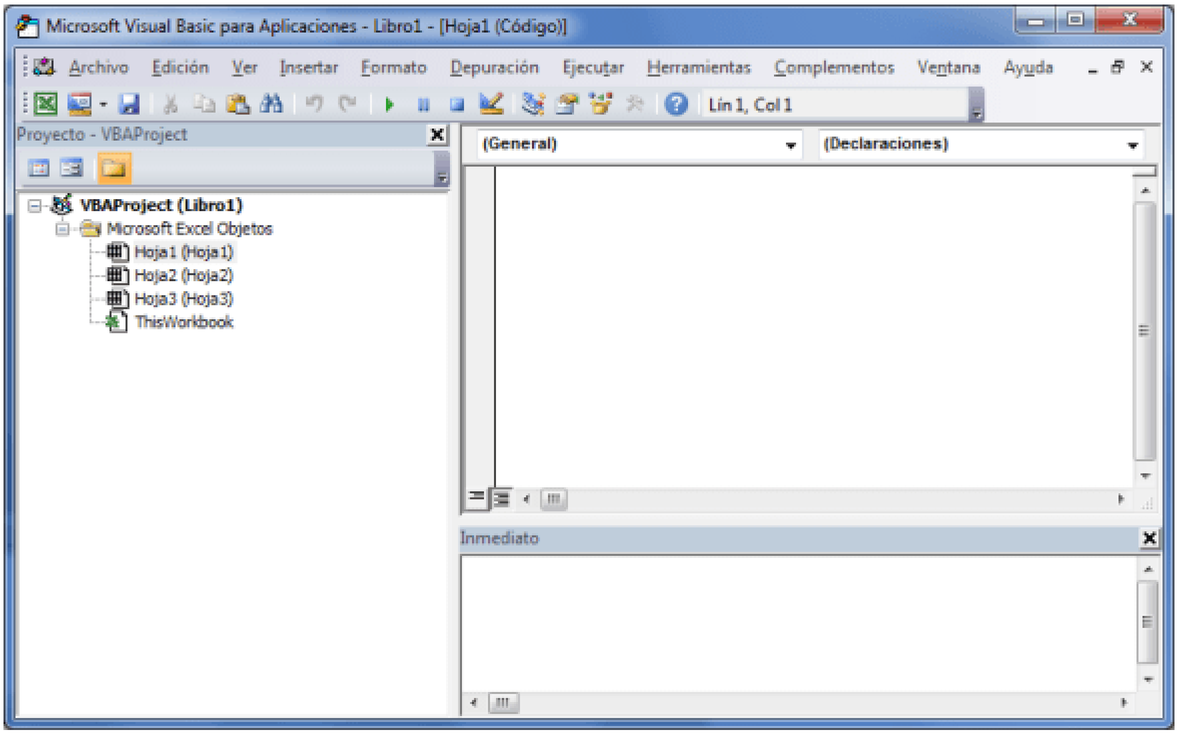


Ilustración 7 - Pantalla de presentación de VBA

En la parte izquierda se muestra el Explorador de proyectos el cual muestra el VBA creado para el libro que se trabaja en el momento y además muestra las hojas pertenecientes a ese libro de Excel.

Dentro del Editor de Visual Basic se puede observar una ventana llamada *Inmediato* que está en la parte inferior. Esta ventana es de mucha ayuda al momento de escribir código VBA porque permite introducir instrucciones y observar el resultado inmediato. Además, desde el código VBA se puede imprimir mensajes hacia la ventana *Inmediato* con el comando *Debug.Print* de manera que pueda depurar el código.

El área más grande en blanco es donde se escribe el código VBA. Es en esa ventana en la que se digita y editan las instrucciones VBA que dan forma a los programas.

Para este trabajo en especial se gestiona desde el Editor de Visual Basic y administrados desde código VBA, insertando el *UserForm* de la siguiente forma

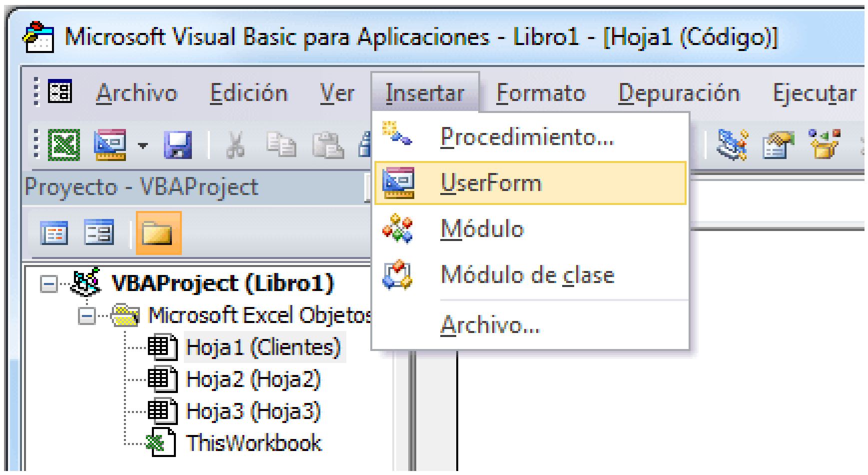


Ilustración 8 - Creación del user.form

Una vez que se ha creado el formulario de usuario Excel permite arrastrar y soltar los controles que están disponibles desde el cuadro de herramientas como se ve a continuación:

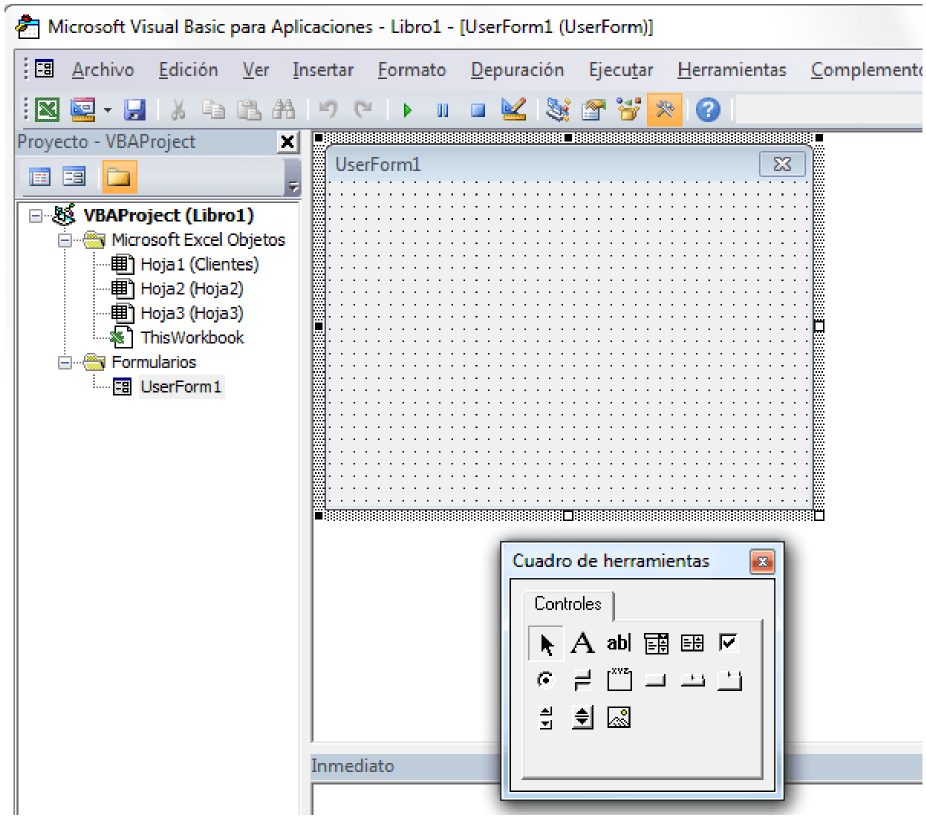


Ilustración 9 - Cuadro de herramientas del VBA

Los diferentes tipos de formularios en Excel permiten evitar inconvenientes ya que es posible obtener cierto grado de control sobre el ingreso de datos que el usuario realiza sobre la programación realizada en las hojas de Excel.

Habiendo realizado una introducción teórica referente a los formularios en Excel, se procede a continuación a detallar el diseño delformulario que se usó para la simulación. Cabe aclarar que el formulario aplica tanto para la simulación de medias muestrales como para la simulación de proporciones muestrales.

<u>Programación en el editor VBA</u>

Habiendo introducido la teoría de los formularios de Excel, la siguiente figura ilustra la sintaxis del formulario que fue programado en la implementación de este trabajo. Después de la imagen se procede a explicar cada instrucción que está en el formulario.

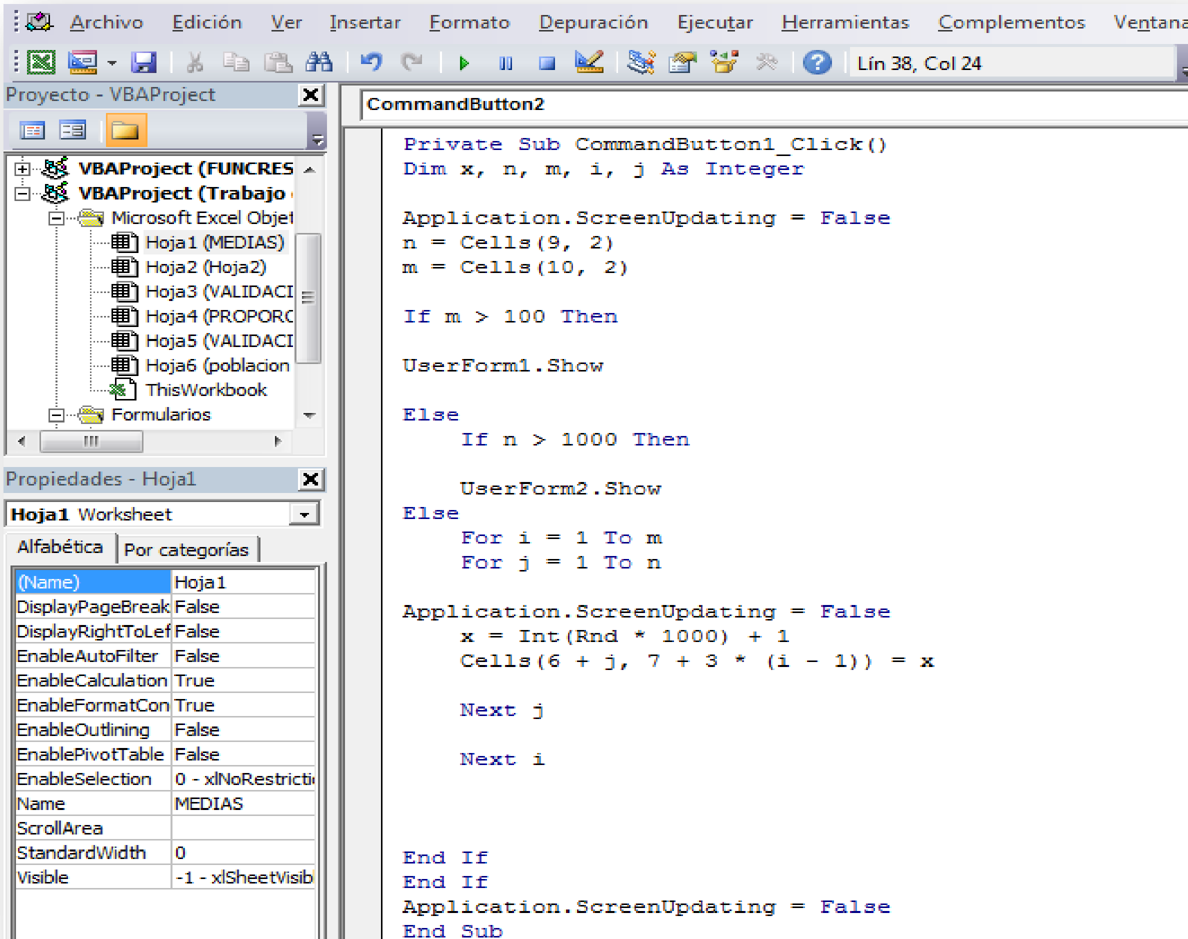
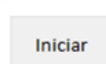


Ilustración 10 - Formulario implementado en el trabajo

1. *Private Sub CommandButton1_Click():* este comando sirve para accionar el botón de **INICIO**



2. *Dim x, n, m, i, j As Integer* :aquí se definen las variables *x,n,m,i,j* todas enteras. La variable *x*se utiliza para seleccionar un número aleatorio entre 1 y 1000 que servirá para determinar las muestras, la variable *n* representa el tamaño de la muestra, la variable *m* representa la cantidad de muestras y las variables *iyj*se utilizan para ciclos condicionales como se verá más adelante.

3. *Application.ScreenUpdating = False*

   n = Cells(9, 2)

   m = Cells(10, 2)

   En este punto se define la variable *n*como el dato que reside en la celda (9,2) y la variable *m* como el dato que reside en la celda (10,2)[28]

4. *If m > 100 Then*

   UserForm1.Show

   Se establece un ciclo condicional *si entonces*, en este la condición es que si *m* es mayor que 100 entonces muestre el siguiente aviso creado mediante un formulario.

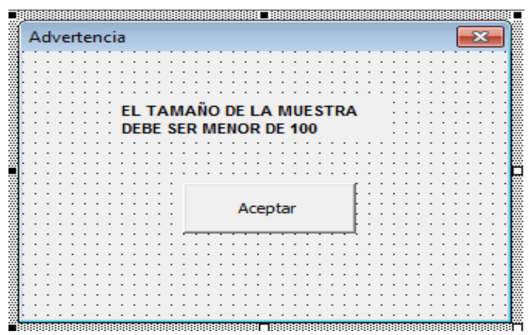


Ilustración 11 - Advertencia sobre cantidad de muestras

5. *Else*

   If n > 1000 Then

   UserForm2.Show

[28] En el editor VBA las celdas se nombran como si la hoja de cálculo se tratará de una matriz. Así la celda B9 se debe nombrar como (9,2).

En el caso que el condicional del numeral 4 no se cumpla entonces realiza este nuevo ciclo en el que se verifica si *n* es mayor que 1000; si es así se arroja el siguiente aviso.

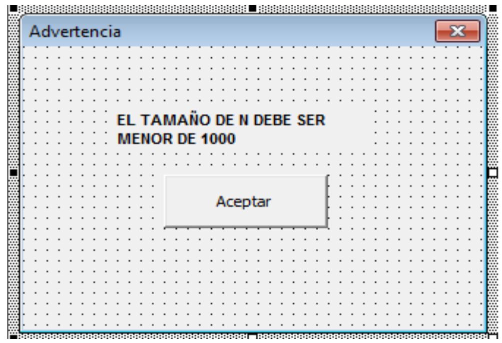


Ilustración 12 - Advertencia sobre tamaño de la muestra

6. *Else*
   For i = 1 To m
   For j = 1 To n

Si el condicional del numeral 5 no se cumple entonces inicia un ciclo *for-to*desde *i* igual a 1 hasta *m*y desde*j*igual 1 hasta *n*, el cual se describe a continuación:

Application.ScreenUpdating = False

*x = Int(Rnd * 1000) + 1*

*Cells(6 + j, 7 + 3 * (i - 1)) = x*

Next j

Next i

End If

End If

Application.ScreenUpdating = False

End Sub

Se define la variable *x*como la parte entera (función *INT*) de un numero aleatorio(función *RND*) que se multiplica por mil y se le suma uno, (la suma del uno se hacepara asegurar que nunca se vaya a escoger el dato cero de la población dado que no existe).

Luego el dato x se ubica en la celda $(6 + j, 7 + 3 * (i - 1))$, como se puede ver la celda depende de las variables i,$j$lo cual garantiza que va a ir cambiando a medida que avance el ciclo *for-to*.

Este ciclo se hace con la finalidad de generar m columnas cada una con n datos, los cuales son los números aleatorios mencionados anteriormente. A cada muestra le corresponde una columna de las mencionadas y estas son utilizadas para determinar los datos muéstrales tal como se explicará más adelante (cfr. p. 76), a continuación se ilustra en color verde un ejemplo de una columna creada a partir del ciclo.

G16 | f_x 816

	A	B	D	E	F	G	H	I
1	Dados:			Población	Z		0,996888	-1,67427
2				N(0, 1)	PROMEDIO		24,33	26,32553
3					PRUEBA 1		1	
4					PRUEBA 2			0
5					SUMA 1	1		
6					SUMA 2	1	1 MUESTRA	
7	μ	20	1	18,50	1	782	13,73	15,73
8	σ =	5	2	13,61	2	246	26,36	28,36
9	n =	10	3	21,22	3	629	28,86	30,86
10	m =	2	4	26,38	4	589	21,42	23,42
11	Δ =	2	5	25,99	5	66	22,79	24,79
12	α =	0,01	6	28,67	6	500	19,13	21,13
13	Zalfa=	2,3263479	7	9,08	7	790	25,52	27,52
14	alfa 2=	0,500000	8	18,83	8	585	29,05	31,05
15	valor critico=	23,67828	9	25,48	9	894	30,96	32,96
16	β	0,5	10	14,57	10	816	25,44	27,44

Ilustración 13 - Columna de números aleatorios

7. *Private Sub CommandButton2_Click()*
   Application.ScreenUpdating = False
   Range("B7:B12").Select
   Selection.ClearContents

Esta instrucción genera un botón de BORRADO el cual limpia todos los datos arrojadosen los numerales anteriores, dejando lista la hoja de cálculo para una nueva simulación.

SIMULACIÓN PARA DISTRIBUCIÓN DE MEDIAS MUESTRALES

A continuación se enumeran las diferentes funciones y herramientas que fueron utilizadas exclusivamente para la simulación de medias muestrales

1. **Generación de números normales:** para poder generar un conjunto de datos que responda a una distribución de probabilidad normal primero se debe activar la ficha de *Análisis de datos*en la pestaña de *Datos*en Excel. Lo anterior se hace con la ruta *Archivo/opciones/complementos/herramienta para análisis.* Una vez realizado lo anterior es posible acceder al análisis de datos, el cual tiene el siguiente aspecto:

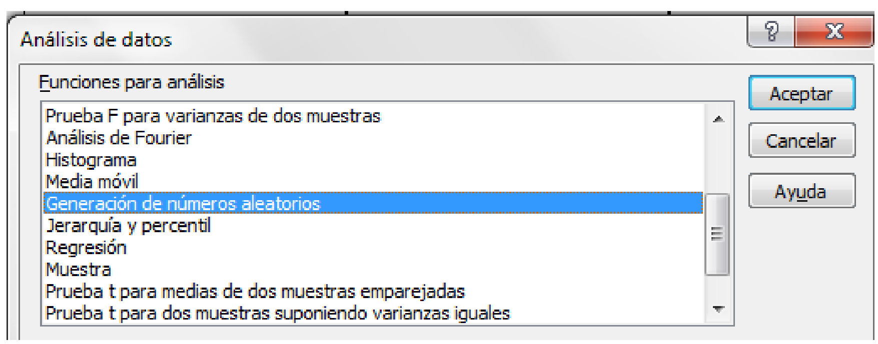


Ilustración 14 - Herramienta para Análisis de datos de Excel

A continuación se selecciona la opción de *Generación de números aleatorios.* Allí se elige la distribución normal, el número de variables es uno, luego se introduce la cantidad de datos que se desean con media cero y desviación uno y por último el rango de salida como se ilustra a continuación. Esta herramienta permite asegurar que la población sí es normal.

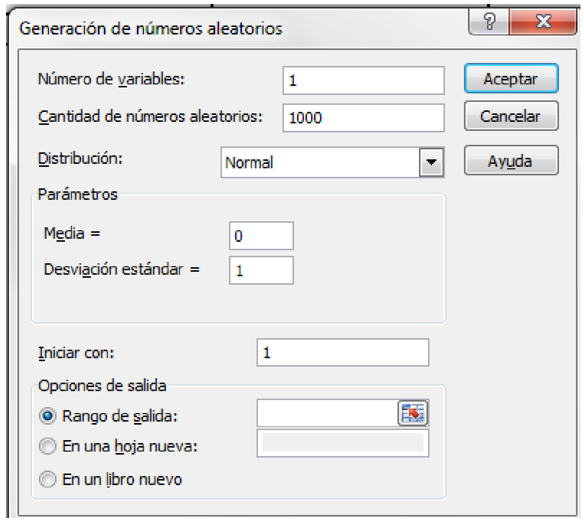


Ilustración 15 - Generación de población normal

Para el caso de este trabajo la población que se obtuvo se ubicó en la columna C la cual esta oculta.

2. **Generación de la población normal con parámetros específicos:** para relacionar el μ y σ digitados por el usuario con la columna de números normales, a cada dato normal se le aplica una homotecia y una traslación dadas por la siguiente expresión

$$E_i := C_i \sigma + \mu$$

Donde C_i es cada dato de la columna con la población normal y E_i es cada dato normal con los nuevos parámetros, lo que genera finalmente la población normal $N(\mu, \sigma)$ ubicada en la columna E del archivo de Excel.

3. **Contador de Datos:** este contador se ubica en la columna D del archivo y sirve para enumerar cada dato de la columna E. Entre las columnas D y E se establece una relación biunívoca en la cual al dato C_i le corresponde el dato E_i (para $i = 1, 2, \dots, n$). Este contador se utilizará cuando se quieran determinar las muestras aleatorias.

4. **Columnas de la Muestra:** cada muestra posee tres columnas:

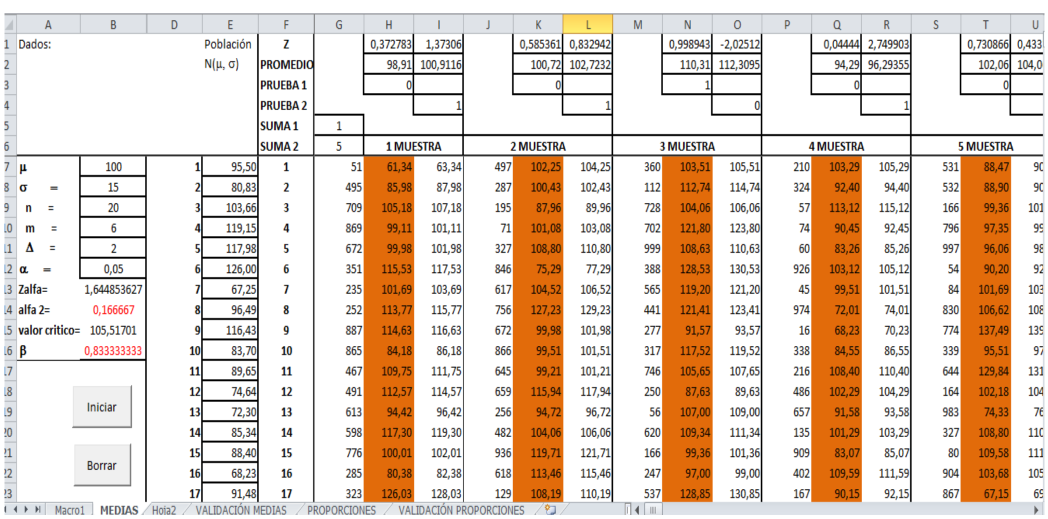
   - *(columna izquierda)*: se ubican los datos aleatorios.

- *(columna del centro):*se tratan las columnas ubicadas en el medio de cada muestra y que corresponde a la muestra para la hipótesis nula.
- *(columna de la derecha):* responde a la muestra de la hipótesis alternativa.

A continuación se describe con más claridad lo referente a cada una de estas columnas.

i. Columna de la izquierda: esta columna se crea a partir del ciclo mencionado en la sección anterior (p.65) y sirve para generar las columnas del centro y de la derecha.

ii. Columna del centro: se determina haciendo uso de la columna de la izquierda y del contador de datos (p.68). El funcionamiento de esta columna se puede ejemplificar así: supóngase que la columna de la izquierda arroja el número 500, lo que el programa hace es buscar elnúmero 500 en el contador de datos y seleccionar el dato correspondiente de la población (esta es la utilidad de la relación establecida entre el contador de datos y la población normal). En la siguiente ilustración se puede apreciar, en color anaranjado, las columnas referidas en este numeral y que finalmente corresponden a las muestras sobre las cuales se hará la prueba de hipótesis.



	A	B	D	E	F	G	H	I
1	Dados:			Población	Z		0,372783	1,37306
2				N(μ, σ)	PROMEDIO		98,91	100,9116
3					PRUEBA 1		0	
4					PRUEBA 2			1
5					SUMA 1	1		
6					SUMA 2	5	1 MUESTRA	
7	μ	100	1	95,50	1	51	61,34	63,34
8	σ =	15	2	80,83	2	495	85,98	87,98
9	n =	20	3	103,66	3	709	105,18	107,18
10	m =	6	4	119,15	4	869	99,11	101,11
11	Δ =	2	5	117,98	5	672	99,98	101,98
12	α =	0,05	6	126,00	6	351	115,53	117,53
13	Zalfa=	1,644853627	7	67,25	7	235	101,69	103,69
14	alfa 2=	0,166667	8	96,49	8	252	113,77	115,77
15	valor critico=	105,51701	9	116,43	9	887	114,63	116,63
16	β	0,833333333	10	83,70	10	865	84,18	86,18
17			11	89,65	11	467	109,75	111,75
18		Iniciar	12	74,64	12	491	112,57	114,57
19			13	72,30	13	613	94,42	96,42
20			14	85,34	14	598	117,30	119,30
21		Borrar	15	88,40	15	776	100,01	102,01
22			16	68,23	16	285	80,38	82,38
23			17	91,48	17	323	126,03	128,03

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		0,585361	0,832942		0,998943	-2,02512		0,04444	2,749903		0,730866	0,433
2		100,72	102,7232		110,31	112,3095		94,29	96,29355		102,06	104,0
3		0			1			0			0	
4			1			0			1			
5												
6		2 MUESTRA			3 MUESTRA			4 MUESTRA			5 MUESTRA	
7	497	102,25	104,25	360	103,51	105,51	210	103,29	105,29	531	88,47	90
8	287	100,43	102,43	112	112,74	114,74	324	92,40	94,40	532	88,90	90
9	195	87,96	89,96	728	104,06	106,06	57	113,12	115,12	166	99,36	101
10	71	101,08	103,08	702	121,80	123,80	74	90,45	92,45	796	97,35	99
11	327	108,80	110,80	999	108,63	110,63	60	83,26	85,26	997	96,06	98
12	846	75,29	77,29	388	128,53	130,53	926	103,12	105,12	54	90,20	92
13	617	104,52	106,52	565	119,20	121,20	45	99,51	101,51	84	101,69	103
14	756	127,23	129,23	441	121,41	123,41	974	72,01	74,01	830	106,62	108
15	672	99,98	101,98	277	91,57	93,57	16	68,23	70,23	774	137,49	139
16	866	99,51	101,51	317	117,52	119,52	338	84,55	86,55	339	95,51	97
17	645	99,21	101,21	746	105,65	107,65	216	108,40	110,40	644	129,84	131
18	659	115,94	117,94	250	87,63	89,63	486	102,29	104,29	164	102,18	104
19	256	94,72	96,72	56	107,00	109,00	657	91,58	93,58	983	74,33	76
20	482	104,06	106,06	620	109,34	111,34	135	101,29	103,29	327	108,80	110
21	936	119,71	121,71	166	99,36	101,36	909	83,07	85,07	80	109,58	111
22	618	113,46	115,46	247	97,00	99,00	402	109,59	111,59	904	103,68	105
23	129	108,19	110,19	537	128,85	130,85	167	90,15	92,15	867	67,15	69

Ilustración 16 - Muestras aleatorias de hipótesis nula

Resulta importante mencionar que para esta columna se utilizó la función *CONSULTAV(valor_buscado; matriz_buscar_en; indicador_columnas;[ordenado])*los argumentos de la función son[29]

- *Valor_buscado:*valor buscado en la primera columna de la Matriz o rango de datos y puede ser un valor, referencia o una cadena de texto.
- *Matriz_buscar_en*: es el conjunto de información donde se buscan los datos, los que pueden ser: textos, números o valores lógicos.
- *Indicador_columnas:*es el número de columna de Matriz_buscar_en desde la cual debe devolverse un valor coincidente.
- *Ordenado*: es un valor lógico que indica si desea que la función *consultaV* busque un valor puntual en un orden especifico. Es decir, permite encontrar la coincidencia más cercana en la primera columna ordenada en forma ascendente, puede ser VERDADERO O FALSO.

De la anterior forma Excel permite generar la muestra aleatoria tomada de la población y con parámetro μ_0 .

iii. Columna de la derecha:es la columna que corresponde a la muestra de la hipótesis alternativa**,** que no es más que la muestra original trasladada Δ unidades.

5. **Promedio de las muestras:**los promedios de las muestras de la columna central (muestra de la hipótesis nula)y la columna derecha (muestra de la hipótesis alternativa) se encuentran ubicados en la Fila 2 de “PROMEDIO”.Cada promedio se determina por medio de la función *PROMEDIO(rango de datos)* que calcula media aritmética de cada muestra.

6. **P-valor:** este valor se encuentra en la fila 1 y solo se calcularápara μ_0.Para determinar el p-valor se utilizó el complemento de la función *DISTR.NORM.N(x; media; desv-*

[29] Tomados de http://www.elreydelexcel.com/funcion-buscarv-o-consultav/ (mayo de 2015).

estandar; acumulado) esta permite calcular la distribución normal teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

a. *x:* el valor cuyo p-valor se quiere obtener.
b. *media*: es el dato que corresponde a μ_0.
c. *desv_estándar:* es el σ digitado por el usuario.
d. *acumulado:* indica si se utilizará la función de distribución acumulativa.

7. **Valor crítico**: este es el valor sin estandarizar ("a escala real") del nivel de significación, es uno de los datos resultantes del programa y se determina como

$$\mu + \left(z_\alpha \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

   Para este caso μ, z_α, σ, n son variables que controla el usuario.

8. **Prueba 1:**esta prueba se encuentra en la fila 3 y consiste en un condicional *si-entonces*que permite comparar el resultado del p-valor con el nivel de significación,para este caso SI p $<\alpha$ entonces escriba cero SI NO, SI p$>\alpha$o SI $p = \alpha$entonces escriba uno.

   Esto quiere decir que cuando la celda de la prueba 1 arroje un cero se acepta la hipótesis nula y cuando la prueba arroje un 1 se rechaza la hipótesis nula para la muestra con parámetro nulo.

9. **Prueba 2:** esta prueba se encuentra en la fila 4 y es un condicional *si-entonces*que permite comparar el resultado del promedio de la muestra correspondiente a la hipótesis alternativa con el valor crítico. Para este caso SI(promedio μ_1)<(valor critico) entonces escriba uno, SI NO, SI (promedio μ_1) > (valor critico) o SI (promedio μ_1) = (valor critico) entonces escriba cero, de la misma forma que la prueba 1, cuando la celda de la prueba 2 arroje un cero se acepta la hipótesis nula y cuando la prueba arroje un 1 se rechaza la hipótesis nula para la muestra con parámetro alternativo.

10. **Suma 1 y suma 2:** en estas celdas se registra la cantidad de unos que encuentra en las pruebas 1 y 2 respectivamente, es decir, por medio de la función *SUMA* el programa suma la cantidad de unos que encuentre en la fila “prueba 1” (para la celda suma 1) y la cantidad de unos de la fila “prueba 2” (para la celda suma 2).

Con lo anterior se culmina lo relativo a la explicación sobre cómo fue el diseño del archivo de Excel para simular pruebas de hipótesis de medias muéstrales y representar los errores tipo I y II. A continuación se hace una descripción similar para la hoja del archivo que corresponde a la validación de esta simulación.

VALIDACIÓN PARA DISTRIBUCIÓN DE MEDIAS MUESTRALES

En primer lugar se hará una descripción de los procedimientos llevados a cabo en la hoja de validación y posteriormente se explicará de forma sucintapor qué se considera que lo realizado en este apartado en efecto valida los resultados de la simulación.

La idea de la validación está ligada al cálculo de la probabilidad β del error tipo II por medio de un método directo, en este caso empleando la fórmula descrita en el marco teórico.

En principio hay que decir que entre las celdas A12 y B17 se ubica una tabla similar a la que hay en la hoja de simulación de medias para introducir los parámetros; de hecho cuando el usuario digita los valores en la simulación, automáticamente los valores se llenan también en la hoja de validación.

$\mu =$	0
$\sigma =$	0
n =	0
$\Delta =$	0
$\alpha =$	0
$Z\alpha =$	

Ilustración 17 - Tabla de datos a introducir en la validación de medias

A continuación, en la columna A desde la celda número 22 hasta la número 121 se ubican los diferentes valores que va tomando la hipótesis alternativa según el Δ digitado previamente por el usuario. Para la primera celda A22, se coloca exactamente el mismo valor que tiene μ, es decir que en ese caso se asume que la hipótesis nula es igual a la alternativa. En la celda A23 se declara la fórmula: = *A22* + *B15*, esto hace que la hipótesis alternativa se desplace Δunidades dado que en la celda B15 se encuentra precisamente Δ. De ahí en adelante se replica el mismo método pero utilizando el dato de la celda precedente, por ejemplo la fórmula de la celda A23 es: = *A22* + *B15;* la fórmula de la celda A24 es: *A23* + *B15*, etc., este procedimiento asegura que en cada celda la hipótesis alternativa se va a ir incrementando en razón a Δ.

En la columna B, frente a cada valor que hay en las celdas de la columna A, se ubica la fórmula para calcular la probabilidad $P(Z < z)$, esta expresión se estandarizará posteriormente para hallar el valor de β. Exactamente la fórmula que se aplica es:

$$P\left(Z < \frac{\frac{\sigma Z_{\alpha}}{\sqrt{n}} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Donde σ, Z_{α}, n y μ_0 son datos conocidos, por lo cual el valor de la expresión va cambiando solo a medida que la hipótesis nula se va modificando.

En la columna C se sitúan las probabilidades correspondientes a la estandarización de los valores obtenidos en la columna B; dicha estandarización se logra por medio de la función =*DISTR.NORM.ESTAND (z)*, y el parámetro de la función es precisamente cada dato de la columna B; así en la celda C22 la expresión que aparece es: =*DISTR.NORM.ESTAND (B22)*; en la celda C23 aparece: =*DISTR.NORM.ESTAND (B23)* y así sucesivamente. Cabe aclarar que los datos de la columna C ya son los valores correspondientes a la probabilidad β de cometer el error tipo II.

En la columna D se sitúan finalmente los valores de la potencia de la prueba de hipótesis y dado que la potencia no es más que el complemento de β, entonces por ejemplos en la celda D22 la expresión es $= 1 - C22$, para la celda D23 resulta $= 1 - C23$, etc.

La siguiente ilustración permite apreciar la organización de los datos expuestos para un ejemplo concreto con $\mu = 110$ y $\Delta = 0.1$

21	µ1	P(Z< z)	β	1-β
22	110	1,64485363	0,95	0,05
23	110,1	1,56152029	0,94079948	0,05920052
24	110,2	1,47818696	0,93032113	0,06967887
25	110,3	1,39485363	0,91847001	0,08152999
26	110,4	1,31152029	0,90515898	0,09484102
27	110,5	1,22818696	0,8903116	0,1096884
28	110,6	1,14485363	0,8738651	0,1261349
29	110,7	1,06152029	0,85577324	0,14422676
30	110,8	0,97818696	0,83600907	0,16399093
31	110,9	0,89485363	0,81456733	0,18543267
32	111	0,81152029	0,79146653	0,20853347

Ilustración 18 – Datos arrojados de la validación de medias

Una vez se han obtenido los datos arriba descritos, lo que resta es realizar las curvas de operación y de potencia. Para graficar estas curvas hay que dirigirse en Excel a la ruta: *Insertar/Gráficos/Dispersión/Dispersión solo con marcadores*, este es el tipo de representación gráfica empleado y como se comentó con anterioridad permite ver con claramente que se están graficando datos discretos.

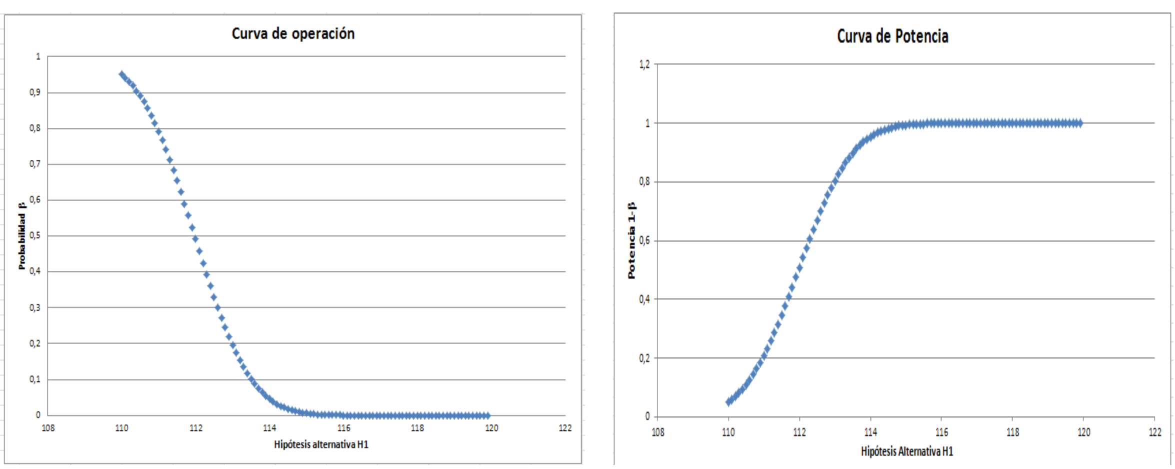


Ilustración 19 - Curvas de operación y potencia para la validación de medias

Finalmente en esta sección solo resta verificar que en efecto los procesos desarrollados constituyen una manera de validar la simulación diseñada. Para este propósito se consideran dos maneras para validar una simulación según menciona Balci (1998):

- ✓ Los resultados obtenidos en la simulación se deben revisar para verificar su coherencia y consistencia de acuerdo con el funcionamiento de la validación que es el funcionamiento esperado del sistema.
- ✓ Se deben brindar estadísticas que confirmen que la simulación produce resultados similares a los del sistema real. Esto requiere de una recolección de datos validados los cuales se confrontarán con los obtenidos mediante simulación.

En relación con el primer ítem hay que decir que efectivamente cuando las hipótesis alternativas se acercan a la hipótesis nula en la simulación, sucede que el valor de β sí se acerca bastante a uno, resultado que es consonante con los valores obtenidos en la validación. En general cuando las hipótesis se acercan bastante entre sí, el β simulado oscila entre 0.92 y 0.98 y el β validado ronda el 0.95 por lo cual se puede concluir que la prueba sí es una buena aproximación del modelo real para representar el error tipo II. De forma análoga cuando la diferencia entre la hipótesis alternativa y la hipótesis nula se va haciendo mayor entonces el β se va acercando más a cero en la simulación, hecho que también es coherente con los resultados que se obtienen en la validación y en las curvas de operación y de potencia.

Finalmente para verificar el segundo criterio expuesto para validar la simulación, el método utilizado fue correr el archivo de simulación 20 veces e ir anotando los resultados del α simulado. Aunque los datos fueron variados, una vez se calculó su promedio se obtuvo un valor de 0.0497 lo que se considera bastante cercano a 0.05 y en consecuencia al nivel de significación prefijado, por lo cual se puede concluir que estadísticamente la simulación sí responde al requerimiento de representar frecuencialmente el error tipo I.

SIMULACIÓN PARA DISTRIBUCIÓN DE PROPORCIONES MUÉSTRALES

A continuación se enumeran las diferentes funciones y herramientas que fueron utilizadas para la simulación de proporciones únicamente.

1. **Generación de lapoblación binomial:** Para la generación de la población binomial lo que se utilizó fue el método de la transformada inversa (Olivares, 2007), el cual es un procedimiento teórico para generar poblaciones con determina distribución de probabilidad (normal, binomial, Poisson, etc.), aunque dicho método tiene un sustento matemático formal, para efectos de este trabajo basta con decir que se generó una población de números aleatorios entre 0 y 1 con la función de Excel *=ALEATORIO.ENTRE()* y el método de la transformada inversa consistió en una comparación de la siguiente manera: si el valor aleatorio es menor que el valor proporcional p, entonces escribe 1, en caso contrario escribe 0. El anterior proceso ya genera la población binomial respectiva que depende de p (i.e. si $p = 0.5$, esto significa que por cada diez datos poblaciones van a aparecer cinco "unos"). Como este método depende directamente del valor de p, entonces ahora sí el usuario puede modificarlo para ver los cambios correspondientes.
2. **Contador de datos:** este contador es análogo al presentado para la simulación de medias muéstrales, por lo cual no se considera agregar información adicional.

3. **Columnas de la muestra:** al igual que la simulación de mediascada muestra posee tres columnas:

   - *(columna izquierda)*: se ubican los datos aleatorios.
   - *(columna del centro):* se tratan las columnas ubicadas en el medio de cada muestra y corresponde a la muestra para la hipótesis nula, cabe recordar que para esta columna se utilizó la función *CONSULTAV(valor_buscado;matriz_buscar_en;indicador_columnas;[ordenado]).*
   - *(columna de la derecha):* corresponde a la muestra de la hipótesis alternativa.

Estas tres columnas cumplen exactamente las mismas funciones que las que contiene el archivo de muestras, a excepción de la columna de la izquierda,para este caso no es más que el diseño de una nueva muestra con parámetro $\boldsymbol{p}+\Delta$, es decir que se genera una nueva muestra alternativa y de esta se escogen aleatoriamente los datos con lo que se va a trabajar.Cabe aclarar que para el diseño de la hipótesis alternativa para muestras simplemente se trasladó cada uno de los datos de la muestra original Δ unidades, proceso que se repitió para la simulación de proporciones.

De la anterior forma Excel permite generar la muestra aleatoria tomada de la población y con parámetro$\boldsymbol{p_0}$para la hipótesis nula y$\boldsymbol{p_1}$ para la hipótesis alternativa.

4. **Promedio de las muestras o proporción muestral de éxitos:** los promedios de las muestras de la columna central (muestra de la hipótesis nula) y la columna derecha (muestra de la hipótesis alternativa) se encuentran ubicados en la Fila 2 "$\hat{p}$". y corresponde a la proporción muestral de éxitos. Esta se define como la cantidad de unos dividida entre el tamaño *n* de la muestra.
5. **Test estadísticos :** este valor se encuentra en la fila 1 y se divide en 3 celdas de forma similar que la sección de muestras:
   - (celda izquierda): corresponde al cálculo del test binomial para la muestra con parámetro $\boldsymbol{p_0}$, es decir para la *columna central* correspondiente a la muestra de las hipótesis nulas.

     Este procedimiento se determina por medio de la función *DISTR.BINOM.N(x, n, p, acumulado)* devuelve la probabilidad de que se produzcan *x* o menos resultados satisfactorios en *n* ensayos de Bernoulli independientes. Cada uno de los ensayos tiene una probabilidad asociada *P* de resultado satisfactorio (y una probabilidad 1-*P* de error).

   - (celda del centro): corresponde al test normal para la muestra con hipótesis nula, se determina por medio de la función *DISTR.NORM.ESTAND.N(z,acumulado)* la sintaxis de esta función tiene los siguientes parámetros: Z que es el valor cuya distribución desea obtener. El parámetro*acumulado* es un valor lógico que determina la forma de la función. Si el argumento acumulado es VERDADERO, la función *DISTR.NORM.ESTAND.N* devuelve la función de distribución acumulativa; si es FALSO, devuelve la función de masa de probabilidad.

- (celda de la izquierda) : al igual que la celda del centro corresponde al test normal que se calcula con la misma función *DISTR.NORM.ESTAND.N(z,acumulado)*, solo que para este caso se determina para la muestra con hipótesis alternativa con parámetro $\boldsymbol{p_A}$.

6. **Prueba 1:** esta prueba se encuentra en la fila 3 y consiste en un condicional *si-entonces* que compara el resultado del test estadístico con el nivel de significación, esta fila se divide en dos celdas:

- (celda de la izquierda): para este caso se realiza un condicional que permite comparar el resultado del **test binomial** para la muestra con parámetro $\boldsymbol{p_0}$ y el nivel de significación α, la sintaxis es, SI $\boldsymbol{p_0}<\alpha$ entonces escriba cero SI NO, SI $\boldsymbol{p_0}>\alpha$ o SI $\boldsymbol{p_0}\ =\alpha$ entonces escriba uno.

  Esto quiere decir que cuando la *celda izquierda* de la prueba arroje un cero, se acepta la hipótesis nula y cuando la prueba arroje un uno entonces se rechaza la hipótesis nula para la muestra con parámetro nulo.

- (celda central): se realiza exactamente el mismo condicional *si-entonces* que en la celda de la izquierda, solo que para este caso es un condicional que permite comparar el resultado del **test normal** para la muestra con parámetro $\boldsymbol{p_0}$ y el nivel de significación α.

Esto quiere decir que cuando la *celda central* de la prueba arroje un cero se acepta la hipótesis nula y cuando la prueba arroje un uno se rechaza la hipótesis nula para la muestra con parámetro nulo.

Estas dos pruebas que realizan las celdas izquierda y central funcionan de forma independiente y son controladas por el usuario por medio de la celda llamada “opción de test”

7. **Opción de test:** ubicada en B16. Esto significa que si el usuario digita la letra **B** el archivo trabajará con el test binomial para la muestra con parámetro $\boldsymbol{p_0}$**.** Por el contrario si el usuario digita la letra **N** elarchivo trabajará con el test Normal para la muestra con parámetro $\boldsymbol{p_0}$**.**
8. **Prueba 2:** esta prueba se encuentra en la fila 4 y es un condicional *si-entonces* que permite comparar el resultado del test binomial dela muestra alternativa con el nivel de significación. Para este caso SI $\boldsymbol{p_1}<\alpha$ entonces escriba uno, SI NO, SI $\boldsymbol{p_1}>\alpha$ o SI $\boldsymbol{p_1}=\alpha$ entonces escriba cero.De la misma forma que la prueba 1, cuando la celda de la prueba 2 arroje un cero se acepta la hipótesis nula y cuando la prueba arroje un uno se rechaza la hipótesis nula para la muestra con parámetro alternativo**.**
9. **Suma 1 y suma 2:** en estas celdas se registra la cantidad de unos que encuentra en las pruebas 1 y 2 respectivamente, es decir, por medio de la función *SUMA* el programa suma la cantidad de unos que encuentre en la fila “prueba 1” y la cantidad de unos de la fila “prueba 2” .

Con lo anterior culmina la explicación sobre cómo fue el diseño del archivo de Excel para simular pruebas de hipótesis de proporciones muéstrales y representar los errores tipo I y II.

VALIDACIÓN PARA DISTRIBUCIÓN DE PROPORCIONES MUESTRALES

En relación con la validación de las proporciones muestrales, hay que decir que se usaron procedimientos completamente análogos a la validación de medias, en ese sentido la información de la columna A que es la ubicación de las hipótesis alternativas, se mantiene igual que en la validación de medias.

En cuanto a la columna B en la que se sitúa la probabilidad $\mathrm{P}(\mathrm{Z} < z)$ solo cambia la fórmula, que en este caso es:

$$P\left(\frac{p_0 - p_1 + Z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n}}\right)$$

Las columnas C y D se mantienen con las mismas funciones para calcular β y la potencia $1-\beta$. La siguiente imagen ilustra la organización de los datos para un ejemplo concreto con $p = 0.42, n = 200, \Delta = 0.01$

21	p1	P(Z< z)	β	1-β
22	0,42	1,64485363	0,95	0,05
23	0,43	1,3541567	0,9121568	0,0878432
24	0,44	1,06567828	0,85671545	0,14328455
25	0,45	0,77903985	0,78202188	0,21797812
26	0,46	0,49387509	0,6893028	0,3106972
27	0,47	0,20982747	0,58309883	0,41690117
28	0,48	-0,07345206	0,4707232	0,5292768
29	0,49	-0,35630725	0,36080524	0,63919476

Ilustración 20 - Datos arrojados para validación de proporciones

A continuación se presentan también las gráficas de las curvas de operación y de potencia.

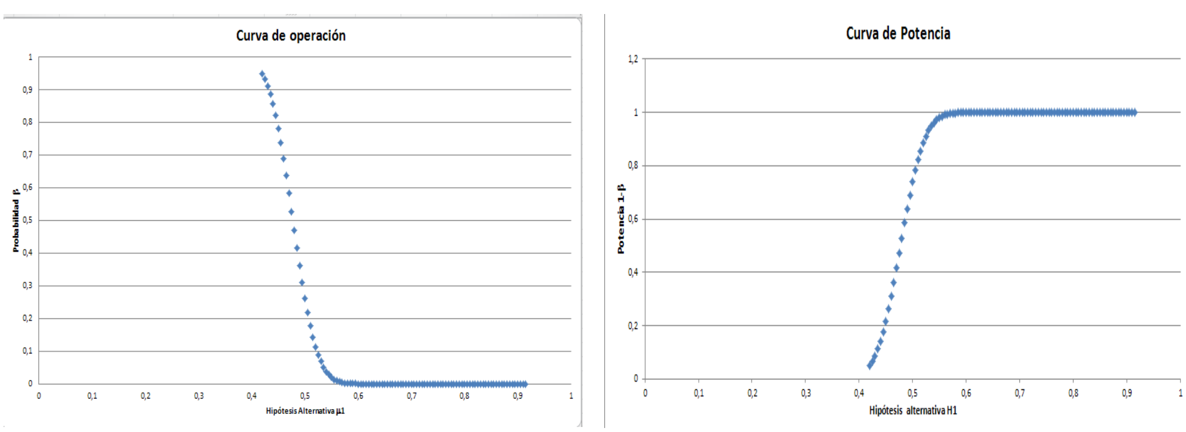


Ilustración 21 - Curvas de operación y potencia para validación de proporciones

V. CONCLUSIONES

Culminado de forma exitosa el trabajo correspondiente a la documentación teórica relativa a las pruebas de hipótesis y al proceso de simular, y entendiendo este ejercicio como una actividad de investigación inicial, además de haber sido la manera como se fundamentaron desde un punto de vista formal todas las actividades propuestas en el trabajo de grado, es entonces posible concluir que la revisión y estudio de dicha documentación constituyó un elemento esencial del trabajo desarrollado, en tanto que permitió una mirada sensata a los conocimientos previos sobre las pruebas de hipótesis y una exploración rigurosa de referentes teóricos nuevos que dieron una perspectiva mucho más amplia sobre las temáticas estudiadas.

La tarea de realizar simulaciones en Excel puso en juego la comprensión de referentes conceptuales descritos en el marco teórico, y se constituyó en una actividad que no teníaantecedentes sobre los cuales basarse y en consecuencia solo se contaba con la teoría para suponer que el ejercicio de simulación sería correcto y que se iban a poder representar de una manera frecuencial los errores de tipo I y II en las pruebas de hipótesis, como en efecto ocurrió. Además, en relación con esta labor es importante resaltar la relevancia que tuvo conocer (y estudiar) los métodos para ejecutar tareas propias del desarrollo de la simulación, tales como el uso de los formularios en Excel, el uso de gráficas, de tablas, de funciones estadísticas, etc.

Otra conclusión importante que deja este trabajo de grado es la de reflexionar sobre la falta de material interactivo mediado por el uso de herramientas informáticas para estudiar determinados conceptos estadísticos en el aula de clase. Aunque es cierto que en la indagación preliminar que se hizo para buscar aplicaciones relativas a las pruebas de hipótesis, se encontraron diversos programas, aplicaciones y herramientas sobre variados temas estadísticos, lo cierto es que en la misma se revisión se hizo evidente que aún faltanmuchas temáticas por cubrir y que, seguramente, enseñadas a través de herramientas tecnológicas permitirían un mejor aprendizaje por parte de los estudiantes que las utilicen.

Por otra parte se hace patente la comprobación de hechos de carácter estadístico matemático tales como:

- Cuando el tamaño *n* de la muestra aumenta, entonces las probabilidades α y β de los errores tipo I y II respectivamente, tienden a disminuir (como consecuencia inmediata si β disminuye, la potencia de la prueba aumenta).

- A medida que la magnitud de α se va haciendo más grande, se tiene que la magnitud de β se va haciendo más pequeña. Ocurre lo mismo si se analiza en sentido contrario: cuando la probabilidad α va disminuyendo entonces la probabilidad β va aumentando.

- Si los valores de la hipótesis alternativa son muy cercanos a los valores de la hipótesis nula entonces el β se va haciendo cada vez más grande, dado que para la prueba es más complicado rechazar la hipótesis nula si la alternativa es muy cercana.

- Para el caso de la simulación para proporciones muestrales se comprueba que cuando la muestra es suficientemente grande (n>30) la distribución binomial se va aproximando cada vez más a la distribución normal. Por el contrario para muestras cada vez más pequeñas, la diferencia entre ambas distribuciones va siendo cada vez más marcada.

- Si el valor de la desviación estándar se va haciendo más grande, se tiene que en general el poder de la potencia aumenta.

- Fue posible comprobar que, en efecto como se había dicho, las curvas de operación y de potencia validan los resultados calculados en la simulación.

En general se considera que la comprobación de los anteriores ítems es un buen indicador de que la teoría se corresponde con la simulación realizada y en consecuencia, que esta última estuvo diseñada de forma adecuada.

Además de los aspectos formales mencionados anteriormente, la terminación de este trabajo de grado deja varios aportes a nivel personal para los autores. En primer lugar, la gestión del trabajo permitió involucrarse y conocer de manera práctica la actividad investigativa inicial en torno a un concepto matemático, en ese sentido la relación con elasesor del trabajo como par académico, enriqueció características propias de un profesional Licenciado en Matemáticas en la medida en que se consolidaron habilidades comunicativas a nivel oral y escrito para la presentación de ideas; de igual manera el estudio de distintas nociones estadísticas de una manera responsable e independiente fortaleció la autonomía propia de los futuros docentes.

Es importante destacar que el desarrolló del trabajo de grado no solamente dejó aportes relativos a los procesos de investigación inicial como los que se mencionaron en el párrafo anterior, también afianzó otras habilidades como por ejemplo la pertinencia y coherencia a la hora de presentar el trabajo en un evento académico, en razón a que el mismo fue expuesto en la Jornada del Educador Matemático organizada por el Departamento de Matemáticas en el primer semestre del 2015, este ejercicio fue un primer fogueo del trabajo de grado frente a la comunidad académica, en este caso los compañeros de la licenciatura y algunos docentes.La presentación dejó evidenciar algunas fallas que posteriormente fueron corregidas así como identificar algunos aspectos positivos que debían ser reforzados.

Finalmente solo resta hacer algunas conclusiones en lo que respecta a las posibles proyecciones que tiene el trabajo y dar una mirada a futuro en la cual las actividades de simulaciones en torno a las pruebas de hipótesis no se detengan aquí. En primer lugar una decisión que fue tomada al inicio del trabajo de grado fue la de considerar una población normal para el desarrollo de la simulación para la distribución de medias, un posible ejercicio que puede resultar interesante es abordar la simulación de medias haciendo uso de poblaciones que no sean normales, como la uniforme. Además,cabe contemplar el diseño deuna simulación que considere la distribución t de Student de manera que la simulación utilice dicho test cuando el tamaño muestral sea menor que 30.

Por otra parte queda abierto el problema de diseñar simulaciones para representar los errores tipo I y II en distribución de diferencia de medias y diferencia de proporciones y analizar cuáles elementos presentan diferencias con los aquí obtenidos. De otro lado cabe la posibilidad de implementar de nuevo una simulación para representar empíricamente los errores tipo I y II en medias y proporciones pero haciendo uso de un software diferente al Excel como por ejemplo R Commander, SPSS, etc.

Como se puede ver este trabajo no fue más que un abrebocas iniciador para el estudio y la realización de actividades que hagan uso de la simulación informática para los procesos de enseñanza - aprendizaje relativos a ideas estadísticas contempladas en el aula de clase.

VI. BIBLIOGRAFÍA

Alvarado, J., y Obagi, J. (2008). *Fundamentos de Inferencia Estadística* . Bogotá,D.C.: Pontificia Universidad Javeriana.

Azarang, M., y García, E. (1996). *Simulación y análisis de modelos estocásticos.*México D.F: McGraw Hill.

Balci, O. (1998). Verification, Validation and Testing. En J. Banks, *The Handbook of Simulation* (pág. Capitulo 10). New York: Jhon Wiley.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Canavos, G. (1998). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos.* México D.F: Mc Graw Hill.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences.*New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Cordova, M. (2003). *Estadistica Descriptiba e Inferencial.* Lima: Librería MOSHERA S.R.L.

Coss, R. (1996). *Simulación: un enfoque práctico.* Monterrey: Editorial Limusa.

Cuervo, E. (2015). *Estadística Matemática.* Bogotá: Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia.

Diaz, P. (2003). *Cáluco del poder estaíistico de un estudio. Unidad de Epidemiología Clinica y Bioestadistica.* Coruña, España: Cad Aten Primaria.

Fernández, E., & García, P. (Junio de 2008). Métodos estadísticas y valor p (p-value): historia de una controversia. *Un debate sobre temas fundamentales de la investigación estadística y econométrica: la controversia "Fisher, Pearson (p)" y*

"Neyman y Pearson (h). Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas.

Levin, R., y Rubin, D. (2010). *Estadística para administración y economía. Séptima edición.* México: Pearson Educación.

Lipschutz, S., y Schiller, J. (2004). *Introducción a la probabilidad y estadística.* Madrid: Mc Graw Hill.

Manzano, V. (1997). *Inferencia Estadística Aplicaciones con SPSS/PC+*. Madrid : RA-MA.

Martínez, C. (2012). *Estadística y Muestreo. 13a ed.* Bogota, D.C.: ECOE ediciones.

Monterrey, P., y Gómez, C. (Julio de 2007). Aplicación de las pruebas de hipótesis en la investigación en salud: ¿estamos en lo correcto? *Universitas Médica, 48*(3), 193-206.

Montgomery, D., y Runger, G. (1996). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniera, 1a ed.* México: Mc Graw Hill.

Mueses, H. (2008). Diferencias entre el Nivel de Significancia alfa y el valor P. *Revista Estomatología, 16*(1), 30-32.

Myoung, H. (2003). *Understanding the Statistical Power of test.* Indiana.

Newbold, P., Carlson, W., y Thorn, B. (2008). *Estadística para administración y economía.* Madrid: Pearson Hall.

Olivares, J. (14 de junio de 2007). *Generación de valores de las variables aleatorias.* Recuperado el 29 de abril de 2015, de http://www.mat.uda.cl/jolivares/probabilidades/gva.pdf

Salsburg, D. (2001). *The Lady Tasting Tea.* New York: Henry Halt and Company LLC.

Sánchez, C., Cortiñas, P., y Tejera, I. (2011). La prueba de hipótesis: Las tendencias de Fisher y Neyman - Pearson. En J. Riobóo, & I. Riobóo, *Historia de la probabilidad y la estadística* (págs. 357-364). Madrid: Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España [AHEPE].

Serrano, L. (2009). *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica.* Granada: Universidad de Granada.