UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

RELACIONES FUNCIONALES, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y GENERALIZACIÓN EN ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA

Presentado por

D. Eder Pinto Marín

Dirigido por la Doctora

Dña. María C. Cañadas Santiago

Granada, 2016

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

RELACIONES FUNCIONALES, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y GENERALIZACIÓN EN ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA

Trabajo de Fin de Máster presentado por
D. Eder Pinto Marín
para la obtención del título Máster en Didáctica de la Matemática

D. Eder Pinto Marín

Tutora
Dña. María C. Cañadas Santiago

Granada, 2016

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y en el seno del grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

A mis padres, Sara y Ernesto, por enseñarme a avanzar.

A mis hermanos, Francisco, Génesis y Lucas, por enseñarme a ser leal.

A mis sobrinos, Francisco y Tomás, por enseñarme a proteger.

Y principalmente a ti, por ser la persona que cambió mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Este escrito reúne los aportes y sugerencias de personas que han entregado valioso tiempo y dedicación durante este proceso. Comienzo agradeciendo a mi tutora, María C. Cañadas, por el apoyo, entusiasmo y profesionalidad con el que hemos enfrentado este proceso. ¡Gracias, María!

Agradezco a los integrantes del proyecto de investigación en el cual se enmarca este estudio (EDU2013-41632-P). Específicamente, doy gracias a María Cañadas, Marta Molina, Aurora del Río y Antonio Moreno por liderar el diseño y recogida de información. Del mismo modo, agradezco los aprendizajes y experiencias transmitidos por los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, especialmente con aquellos que tuve la oportunidad de ser alumno en sus clases.

A las niñas y niños que generosa y desinteresadamente han compartido sus respuestas e ideas en las tareas propuestas, así como también a los docentes que nos permitieron acceder a sus aulas. Sus aportes constituyen el motor de esta investigación, y nos ayudan a otorgar un sentido a las labores que realizamos en el área de la Educación Matemática.

Gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), que mediante su Programa de Capital Humano Avanzado me han entregado la Beca de Doctorado folio 72160307.

Agradezco a la familia chilena y argentina que me ha acompañado en esta primera parte del viaje, por su constante apoyo y escucha. Especialmente a Juan Luis Piñeiro, Carmen Gloria Aguayo, Fernanda Briceño, Danilo Díaz-Levicoy, Belén Giacomone, Camila Cortés y Paola Moyano.

Finalmente, y no menos importante, a mi familia, que estando a miles de kilómetros me han transmitido su amor inconmensurable e incondicional. Son ellos quienes me han enseñado que agradecer es lo más puro que podemos ofrecer al otro. ¡Gracias infinitas!

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ANEXOS

PRESENTACIÓN

Este escrito constituye el Trabajo de Fin de Máster del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta el autor, en el curso 2015/2016. Se trata de una memoria de investigación cuyo foco de trabajo es el álgebra escolar en el contexto español. En concreto, se enmarca dentro de un proyecto de investigación centrado en el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico (EDU2013-41632-P). El enfoque funcional es una aproximación del álgebra escolar. El pensamiento funcional es una actividad cognitiva que está centrada en cantidades que co-varían (Blanton, 2008; Smith, 2008).

El interés general de esta investigación es identificar y describir el trabajo de aquellos estudiantes de tercero de educación primaria que ponen de manifiesto pensamiento funcional en la resolución de problemas de generalización. A partir del trabajo desarrollado con un grupo de estudiantes del mencionado curso, nos centramos en las respuestas de los estudiantes, tanto escritas como verbales, para describir aspectos esenciales que ayudan a identificar y caracterizar la presencia de este tipo de pensamiento.

Esta memoria se estructura en seis capítulos. En el primero de ellos, presentamos el problema de investigación y las justificaciones que dan cuenta de la pertinencia y necesidad de llevar a cabo este estudio.

El segundo capítulo lo organizamos en función de los principales elementos teóricos y antecedentes sobre los que se apoya la investigación.

A la luz de la problemática y los aspectos teóricos descritos, en el capítulo tres presentamos los objetivos generales y específicos de esta investigación.

El cuarto capítulo da cuenta de los aspectos metodológicos considerados para la realización del estudio. En él describiremos los sujetos con los que trabajamos, el proceso de recogida de información, las categorías para el análisis y cómo analizamos los datos.

En el capítulo cinco presentamos los resultados y su discusión, en función de los objetivos propuestos.

En el último capítulo se encuentran las principales conclusiones, incluyendo el logro de objetivos, otros aportes, algunas limitaciones del trabajo y líneas abiertas.

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos y justificamos el interés del problema de investigación.

Presentación del problema de investigación

A principios de los 90, un grupo de investigadores comenzó a poner de manifiesto la necesidad de introducir el álgebra en los primeros cursos de la educación formal. Específicamente, destacamos los aportes de James Kaput (1989, 1995, 1999, 2000), quien manifiesta la necesidad de reformar el álgebra escolar, mediante la "algebrización" del currículo matemático en los primeros niveles. Este autor critica la presencia del álgebra exclusivamente en los cursos de secundaria, desde donde algunos autores argumentan una serie de razones (históricas, de desarrollo evolutivo y producto de resultados de investigaciones) que avalan su incorporación en estos niveles (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006). La idea de Kaput, que posteriormente se materializará en la propuesta curricular conocida como *early algebra,* busca promover y potenciar el pensamiento algebraico en los primeros cursos. Como un tipo de pensamiento algebraico, está el pensamiento funcional, que se centra en la relación entre dos cantidades que co-varían. Este tipo de pensamiento ha recibido escasa atención en los primeros niveles educativos y parece ser beneficioso (Blanton y Kaput, 2011); ahí nace la problemática de esta investigación.

El problema de investigación de este trabajo se centra en los modos de pensamiento algebraico en estudiantes de 3º curso de primaria, en concreto del pensamiento funcional, en el contexto español. Como componentes asociados al pensamiento funcional, nos centramos en las relaciones funcionales que los alumnos establecen, los sistemas de representación que emplean y la capacidad de generalización que manifiestan estos estudiantes.

Justificación de la investigación

Las razones para la realización y pertinencia de esta investigación se fundamentan desde tres perspectivas: (a) docente; (b) investigadora; y (c) curricular.

Justificación desde la docencia

Como profesor de matemáticas de primer curso de primaria en Chile, he tenido la posibilidad de observar y analizar la manera en que los estudiantes identifican patrones sonoros y manipulativos en una secuencia de elementos, lo que responde a un trabajo sobre patrones de atributos cualitativos, que se comienza a trabajar en educación infantil y que se considera previo al trabajo con patrones numéricos. Una de las dificultades que he observado es cuando los estudiantes deben responder a situaciones donde se hace necesario establecer predicciones, conjeturas e incluso establecer algún tipo de generalización sobre los patrones que observan. En síntesis, se hace necesario ir más allá de la identificación del patrón en una secuencia de elementos. A partir de esta experiencia, y tal como lo plantea Kieran (1992), es fundamental considerar que el profesor diseñe sus secuencias de enseñanza más allá de enfoques procedimentales, para que los estudiantes logren aprender las matemáticas con sentido, lo que implica "atender a sus usos en contexto y ofertar propuestas a las cuestiones que de ello deriven" (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015, p. 51).

El álgebra ayuda a pensar, entregar significados y orden a los fenómenos del entorno, lo que permite descubrir regularidades y razonar lógicamente sobre estos (Drijvers, Goddijn y Kindt, 2011). De manera general, algunos autores reconocen que es vital que los profesores sean capaces de comprender el rol del álgebra escolar en los primeros cursos.

A partir de los elementos anteriores, se evidencia que existe un desafío personal por transmitir los beneficios de trabajar con conceptos algebraicos en los cursos iniciales, centrados en la promoción de modos de pensamiento algebraico. Esta evidencia docente se basa en un foco relativo a la experiencia del autor de esta memoria y a recomendaciones generales sobre la práctica docente de algunos autores.

Justificación desde la investigación

Desde la perspectiva investigadora, destacamos que un grupo de investigadores comenzaron a promover la necesidad de incorporar el álgebra en los primeros cursos (e.g., Davis, 1995; Kaput, 1989, 1995, 2000; Mason, 1996; Schoenfeld, 1995). A partir de este contexto, es importante considerar el rol del álgebra como un componente de la alfabetización matemática, ya que adquiere relevancia en las necesidades que emergen de la sociedad (Drijvers, Goddijin y Kindt, 2011). Propuestas curriculares como el *early algebra* cobran fuerza en las investigaciones que se realizan en los primeros cursos de primaria, ya que la promoción de modos de pensamiento algebraico en los estudiantes propicia que sean capaces de explorar, modelizar, establecer predicciones, discutir, entre otras (Blanton y Kaput, 2005; Molina, 2009).

Blanton y Kaput (2011) enfatizan que el pensamiento funcional ha recibido escasa atención en los primeros niveles educativos. En España se han realizado investigaciones que se centran en este tipo de pensamiento recientemente. Específicamente, se han presentado resultados relativos a estudiantes de los primeros y últimos cursos de educación primaria, específicamente en primero (Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes, 2014; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, en prensa) y quinto curso de primaria (Merino, 2012; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Moreno, Cañadas, Jaldo y Bautista, en prensa; Yáñez, 2015). En este contexto, se hace necesario profundizar en la manifestación de este tipo de pensamiento en cursos intermedios de la educación primaria.

Conjuntamente, en el escenario internacional, se han ido desarrollando investigaciones sobre el pensamiento funcional que abordan diferentes aspectos. A continuación presentamos algunos de ellos:

- las relaciones funcionales que se pueden establecer en aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016);
- patrones y generalización (Brizuela y Lara-Roth, 2002; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011; Warren y Cooper, 2005);
- estrategias y sistemas de representación (Brizuela, 2005; Carraher y Schliemann, 2007); y

- el rol del profesor como un soporte para desarrollar este tipo de pensamiento (Blanton y Kaput, 2005; Brizuela, Martinez y Cayton-Hodges, 2013).

Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) presentan una serie de estudios que han realizado, donde los resultados dan cuenta que los estudiantes de los primeros cursos de primaria que son capaces de desarrollar notaciones para representar elementos, relaciones con cantidades conocidas y con incógnitas. Del mismo modo, se evidencia que cuando se pide a los estudiantes construir tablas de funciones y variables, la primera acción que estos realizan está centrada en un enfoque no algebraico, pero cuando participan en actividades a la luz del *early algebra*, son capaces de transitar hacia propiedades generales de relaciones numéricas y funciones. Tal como lo indican Cañadas y Molina (2016), el pensamiento funcional fomenta que los estudiantes identifiquen patrones y la generalización a través de relaciones funcionales, lo que fomenta el pensamiento inductivo, que opera como una herramienta para que los estudiantes adquieran conocimiento matemático.

En el contexto español, la investigación sobre pensamiento funcional se viene realizando desde hace pocos años y se encuentra en desarrollo, aunque cuenta con resultados que pueden servir de referencia a nivel internacional. En concreto, se observa la falta de resultados relativos al pensamiento funcional de los estudiantes de cursos intermedios de la educación primaria.

Justificación curricular

La tercera razón se justifica desde una perspectiva curricular. En Estados Unidos, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) es el primer documento curricular que incluye el tratamiento del álgebra en el currículo de educación primaria, más allá de una manipulación simbólica, ya que los estudiantes necesitan "comprender sus conceptos, las estructuras y los principios que rigen la manipulación de los símbolos, y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones" (p. 39). Para esto, se espera que los estudiantes sean capaces de comprender patrones, relaciones y funciones; así como también representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas, utilizando símbolos y modelos matemáticos para comprender relaciones cuantitativas.

Recientes lineamientos curriculares de países como Australia, Canadá, China, Corea, Japón, Portugal han recogido ideas relacionadas con la inclusión del álgebra en los primeros cursos (Merino, Cañadas y Molina, 2013).

En Australia, el currículo está diseñado y estructurado sobre cuatro competencias y tres ramas de contenidos (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2015). El razonamiento matemático es una de las competencias que se pretenden conseguir. Se espera que los estudiantes desarrollen capacidades más sofisticadas de pensamiento, como demostrar, evaluar, explicar, inferir, justificar y generalizar. Números y álgebra es uno de los contenidos incluidos en este currículo, apareciendo de manera conjunta, ya que cada uno enriquece el estudio del otro. Desde los primeros cursos de educación formal, se pretende que los estudiantes comprendan el sistema de numeración para describir relaciones y formular generalizaciones, así como también que estos sean capaces de reconocer patrones y comprender los conceptos de variable y función.

En Chile también se ha adoptado esta tendencia, donde las actuales directrices curriculares incorporan el álgebra desde los primeros niveles de la educación primaria, pretendiendo que los estudiantes "expliquen y describan múltiples relaciones como parte del estudio de la matemática. Los alumnos buscarán relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, lo que los facultará para investigar las formas, las cantidades y el cambio" (Ministerio de Educación, 2013, p. 33).

En España, país en el que se desarrolla esta investigación, se publicó en el año 2014 un nuevo currículo básico para la educación primaria, a través del Real Decreto 126/2014 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). Este documento explicita lo que se espera al finalizar este nivel educativo, donde los estudiantes deben ser capaces de "describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (p. 19.387).

A partir de la última realidad curricular presentada, justificamos el interés de esta investigación. La incorporación del álgebra en los primeros cursos y, en particular, de elementos relacionados con el pensamiento funcional no había tenido cabida en los diseños curriculares anteriores. Por tanto, comienza a cobrar fuerza y se hace necesario aportar datos empíricos que den cuenta de la posibilidad de promover el pensamiento funcional en los estudiantes de los primeros cursos, así como diseñar propuestas que permitan abordar el pensamiento funcional en las aulas de educación primaria. Tal como lo plantean Cañadas y Molina (2016), no es el objetivo introducir el concepto de función en los primeros cursos de primaria, como se realiza en educación secundaria, sino la importancia radica en aprovechar

> el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general y en el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos (p. 210).

A partir de la presentación y justificación del problema de investigación que hemos descrito, en el siguiente capítulo abordaremos los elementos que dan sustento al marco teórico así como los principales antecedentes.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos los principales elementos teóricos y antecedentes provenientes de la investigación que se relacionan con el problema de investigación. La organización de este marco teórico considera tópicos que van desde aspectos globales, como es el álgebra escolar, hasta elementos más específicos, como son las relaciones funcionales, los sistemas de representación o la generalización.

La figura 1, adaptada de Cañadas y Molina (2016), organiza sintéticamente los elementos teóricos principales que utilizamos en esta investigación y que desarrollamos a lo largo del capítulo.

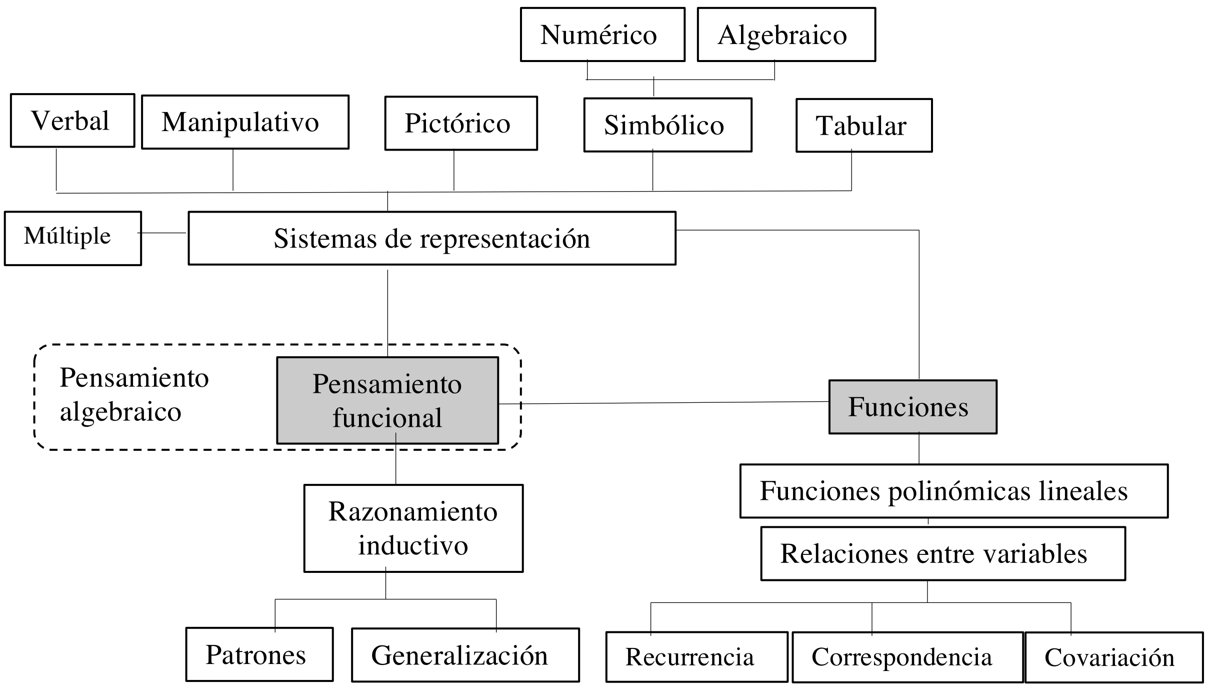


Figura 1. Elementos teóricos considerados en esta memoria

Álgebra escolar

Diferentes autores han intentado precisar lo que entienden por álgebra escolar, o lo que se entiende por esta noción en sus respectivas comunidades de investigación en educación matemática (Molina, 2012). No es fácil distinguir el álgebra escolar del pensamiento algebraico, más aún cuando nos referimos a los primeros cursos (Kaput, 2008).

Destacamos el aporte de Usiskin (1988), quien enfatiza en la necesidad de considerar el álgebra escolar desde una faceta multidimensional, indicando que "los propósitos que tenemos para enseñar algebra, las concepciones que tenemos de los objetos y los usos de las variables están estrechamente relacionadas" (p. 11). De esta forma, el autor describe cuatro concepciones del álgebra que se encuentran asociadas a los principales problemas que rodean a la enseñanza del álgebra, la cual puede ser concebida como: (a) aritmética generalizada; (b) un estudio de los procedimientos para resolver problemas; (c) el estudio de relaciones entre cantidades; y (d) el estudio de estructuras.

Algunos investigadores han manifestado y apoyado la idea de incluir contenidos algebraicos en los primeros cursos de la educación formal, desde donde destacamos los aportes de tres referentes. Schoenfeld (1995) destaca el álgebra como una herramienta que ayuda a los estudiantes a potenciar habilidades de pensamiento, enfatizando que todos los estudiantes deben aprender álgebra y su presencia en los planes de estudios debe comenzar desde los primeros niveles, aumentando constantemente a través de los años. Complementando esta idea, Mason (1996) defiende la idea de la generalización en los primeros cursos, donde el álgebra aprendido en la escuela es un lenguaje para la expresión y manipulación de la generalización, por lo que la enseñanza exitosa del álgebra requiere la atención, evocación y expresión del pensamiento algebraico. Finalmente destacamos el aporte de Kaput (2000), quien propone la necesidad de integrar el pensamiento algebraico en todos los grados, evitando la tardías dificultades presentadas en la educación secundaria. Esta consideración del álgebra escolar en los primeros cursos ha sido valorada por algunas directrices curriculares, desde donde destacamos el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000).

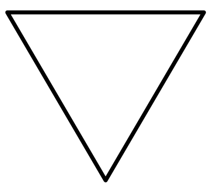
A partir de los elementos anteriores, consideramos que el álgebra escolar hace referencia a los contenidos propios del álgebra que se trabajan en niveles educativos previos al universitario y se centra principalmente en el conocimiento (Cañadas, 2015). Hablar de álgebra en estos niveles educativos implica haber asumido una visión particular sobre el aprendizaje del álgebra, que surge de una perspectiva más general de la educación matemática realista (Freudenthal, 1991; Treffers, 1987). Esta visión considera al álgebra como: (a) una actividad humana, (b) una actividad mental, (c) una actividad personal y (d) una actividad que da sentido a las cosas.

Early algebra

El inicio de los años 90 marca un precedente importante en la investigación relacionada con la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Comienzan a quedar atrás los esfuerzos por investigar lo que los estudiantes no podían hacer y cobra interés la idea de introducir y potenciar modos de pensamiento algebraico en la matemática escolar de los primeros cursos (Lins y Kaput, 2004; Molina, 2009). Bajo estas consideraciones surge la propuesta curricular conocida como *early algebra*, que busca "algebrizar" las matemáticas tradicionales presentadas en el currículo de los niveles iniciales (Carraher y Schliemann, 2007; Carraher y Schliemann, 2014; Kaput, 2000).

Carraher, Schliemann y Schwartz (2008) plantean que el *early algebra* se construye sobre tres elementos que se relacionan con los contenidos tratados en el currículo matemático, tal como se indica en la figura 2.

Notación algebraica introducida gradualmente



Relación entrelazada entre los contenidos matemáticos

Problemas contextualizados

Figura 2. Componentes del *early algebra* (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008)

Sumándose a esta idea, Blanton y Dougherty (2011) indican que esta propuesta ofrece múltiples puntos de entrada para trabajar aspectos asociados al pensamiento algebraico.

Sobre los aspectos centrales del *early algebra*, Kaput (2008) indica que el corazón de esta propuesta está centrado en la generalización de las ideas matemáticas, representación y justificación de las generalización empleando múltiples caminos. Apoyados en estas ideas, Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006) indican que el *early alge-*

bra se guía por la consideración de que la generalización se encuentra en el corazón del pensamiento algebraico, las operaciones aritméticas se pueden ver como funciones y la notación algebraica presta apoyo para el razonamiento algebraico.

Si bien la introducción del álgebra en los cursos iniciales es un desafío, una creciente cantidad de investigaciones a la luz del *early algebra* evidencian resultados que dan cuenta de que los estudiantes son capaces de manifestar pensamiento algebraico.

La propuesta *early algebra* considera el álgebra desde una faceta multidimensional. Desde los aportes de Usiskin (1988), Kaput (2000) propone cinco dimensiones: (a) generalización y formalización de patrones y contrastes; (b) una guía sintáctica que orienta la manipulación del formalismo; (c) el estudio de estructuras y sistemas abstractos; (d) el estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas; y (e) un grupo de modelización y control de fenómenos de lenguaje.

Pensamiento algebraico

Construir una definición de pensamiento algebraico es una tarea problemática (Castro, 2012; Kaput, 2008; Radford, 2006). Cañadas, Dooley, Hodgen y Oldenburg (2012) destacan que el pensamiento algebraico, entre otras características, ofrece la posibilidad de comprender la matemática escolar alejada de los enfoques puramente procedimentales, lo que permite que los estudiantes adquieran diferentes formas de ver y trabajar con elementos algebraicos.

En un primer acercamiento a esta noción, Kaput (2008) señala que el pensamiento algebraico impregna la forma en que los sujetos hacen, piensan y hablan sobre las matemáticas, relacionando así el álgebra con la propia actividad humana y de la cual puede emerger. Para este autor, el pensamiento algebraico, entendido como un objetivo de enseñanza, brinda dos oportunidades: (a) hacer generalizaciones; y (b) que los niños empleen símbolos para representar ideas, lo que les ayuda en la resolución de problemas y en la comunicación y argumentación de sus ideas. Respecto a la incorporación del pensamiento algebraico en las aulas, Carpenter y Levi (2000) señalan que este tarda mucho tiempo en desarrollarse, por lo que es necesario que se establezca desde los primeros niveles. Por otra parte, Kieran (1996, 2004) señala que el pensamiento algebraico es un enfoque que puede ser empleado, entre otras cosas, como un soporte cognitivo para ser introducido y nutrir el discurso más tradicional del álgebra escolar, donde su presencia en los primeros cursos envuelve el desarrollo de formas de pensar y el simbolismo algebraico puede ser usado como una herramienta. Complementando esta idea, Carraher y Schliemann (2007) señalan que el pensamiento algebraico es un proceso cognitivo envuelto en la solución de problemas que los matemáticos pueden expresar de manera fácil empleando notación algebraica. Otros consideran al pensamiento algebraico como un proceso cognitivo sobre el cual los estudiantes pueden establecer y construir relaciones matemáticas generales, las que pueden ser expresadas desde diferentes maneras; las que se van evolucionando con el tiempo (Soares, Blanton y Kaput, 2006).

Con base en la aproximación que realiza Cañadas (2015) sobre el pensamiento algebraico, consideramos que este involucra las formas de hacer, pensar y hablar sobre el álgebra. Del mismo modo, relaciona el desarrollo de modelos matemáticos y el uso de representaciones propias del álgebra, incluyendo el simbolismo algebraico.

Pensamiento funcional

Heid (1996) destaca el enfoque funcional como parte del pensamiento algebraico, sugiriendo que el estudio del álgebra debe centrarse en el desarrollo de expresiones con funciones y familias de funciones, a través de encuentros con situaciones de la vida real, donde las relaciones cuantitativas pueden ser descritas por estos modelos. El pensamiento funcional debe considerarse como una meta disciplinar y esencial en la enseñanza de las matemáticas, la que se refiere a la acción de "pensar en términos de y acerca de las relaciones" (Rico, 2007, p. 56), que puede ser expresada mediante diversos sistemas de representación. Smith (2008) define esta actividad cognitiva como una actividad focalizada "en la relación entre dos (o más) variables; específicamente los tipos de pensamiento que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones" (p. 143) y el cual es una hebra de un constructo mayor, el pensamiento algebraico.

Blanton (2008) considera que el pensamiento funcional corresponde a "un proceso de construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones. Este involucra el pensamiento algebraico que incluye la construcción de una generalización sobre variables que se encuentran relacionadas" (p. 30), lo que es complementado con las ideas de autores que indican que cuando el foco matemático del pensamiento algebraico está en las funciones, se habla de pensamiento funcional (e.g., Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Cañadas y Molina, 2016).

Si bien la función no es un contenido matemático que se encuentra en los currículos de los primeros cursos, Carraher y Schliemann (2007, 2014) sostienen que el enfoque funcional, donde el concepto de función opera como soporte para este tipo de pensamiento, se encuentra más subordinado a temas aritméticos que permitirán abstraer ideas y conceptos. A la luz de esta idea, la noción de adición, sustracción, multiplicación y división pueden ser tratadas como funciones, específicamente por las relaciones entre cantidades que pueden producirse. Por ejemplo, estos autores plantean que la multiplicación por tres puede verse como un subconjunto de la función $3n$. Además, este enfoque se basa en la multiplicidad de representaciones de las funciones, entre las cuales se destaca el lenguaje natural, tablas de funciones, gráficos y notaciones simbólicas. Es en este sentido, la función adquiere un rol importante que puede facilitar la integración del álgebra en los planes de estudios vigentes.

En una investigación centrada en el pensamiento funcional en segundo curso de primaria, Warren y Cooper (2005) establecen como conjetura que este tipo de pensamiento puede ayudar a que los estudiantes logren establecer relaciones y conexiones entre diferentes operaciones al trabajar desde la aritmética. La investigación se centra en tres cursos diferentes. Se incorporan problemas contextualizados, junto a materiales manipulativos que son pertinentes a la edad de los estudiantes, lo que permite generar una discusión entre los investigadores y estudiantes. La selección de la tarea se basa en la conjetura que los enfoques tradicionales de aritmética en los primeros cursos generan dificultades en los estudiantes cuando estos dejan de trabajar con casos particulares. Empleando como metodología los experimentos de enseñanza, los resultados de esta investigación dan cuenta de que los niños deben introducirse en el pensamiento funcional de manera gradual y con la consideración de un largo período de tiempo para consolidar los aprendizajes.

Cañadas y Molina (2016) mencionan elementos claves que permiten desarrollar el pensamiento funcional en los primeros cursos, destacando "las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas" (p. 212).

Blanton y Kaput (2004) lideran una investigación que está centrada en cómo los estudiantes de los primeros cursos evidencian pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones en la resolución de un problema que involucra relaciones funcionales. El problema seleccionado corresponde a un problema contextualizado, en el cual se evidencia una relación funcional entre una cantidad cualquiera de perros y la cantidad total de ojos y colas. La figura 3 da cuenta de uno de los problemas planteados.

> Supongamos que estabas en un refugio para perros y querías contar todos los ojos de los perros que observaste. Si había un perro, ¿cuántos ojos habían? ¿Y en dos perros ? ¿En tres perros? ¿En 100 perros ? ¿Ves alguna relación entre el número de perros y el total número de ojos ? ¿Cómo describirías esta relación ? ¿Cómo lo sabes?

Figura 3. Ejemplo de problema contextualizado (p. 136)

Este problema fue seleccionado por ofrecer oportunidades para buscar tendencias longitudinales en las maneras que se evidencia el pensamiento en estudiantes del nivel PK (4-5 años), hasta estudiantes de quinto de primaria (11-12 años). Las respuestas de los estudiantes fueron grabadas en vídeo y en las hojas de trabajo entregadas. Los resultados dan cuenta que los estudiantes de 4-5 años emplean material manipulativo y estrategias de conteo para determinar la cantidad de ojos en una cantidad variable de perros, donde se evidencia la existencia de correspondencia entre la variable dependiente e independiente, así como también la posibilidad de organizar la información en una tabla les ayuda a organizar cantidades que covarían. Los alumnos de 5-6 años son capaces de identificar un patrón y establecer relaciones sobre la paridad de datos. Los estudiantes de primero describen el patrón, empleando el concepto de doble y prediciendo la cantidad de ojos para 7 perros. Los estudiantes de tercero, cuarto y quinto son capaces de emplear, fluidamente, tablas para organizar la información, expresan reglas multiplicativas con palabras y símbolos, llegando a generalizar relaciones como $2n$.

En conclusión, los estudiantes fueron capaces de manifestar pensamiento funcional de manera progresiva entre educación infantil y quinto de primaria, empleando formas de representar los datos, articular y simbolizar patrones, y dar cuenta de cómo covarían las cantidades.

Sobre el conocimiento que deben poseer los profesores al promover actividades centradas en el enfoque funcional, Cañadas (en prensa) indica que es necesario indagar en los conocimientos que deben poseer los profesores para promover pensamiento funcional, mediante problemas que impliquen relaciones funcionales. Del mismo modo, enfatiza en la necesidad de profundizar en propuestas didácticas que orienten a los docentes.

A partir de los antecedentes presentados, consideramos que el pensamiento funcional es una actividad cognitiva que se inicia y desarrolla al trabajar sobre las relaciones entre cantidades que covarían. Por tanto, las funciones se consideran como el contenido matemático protagonista.

En una investigación centrada en distinguir diferentes niveles de generalización de relaciones funcionales en niños de los primeros cursos, Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015) buscan conocer los tipos de relaciones funcionales y niveles de sofisticación que se presentan en la manera en la cual los sujetos piensan sobre estas relaciones. Son ocho los niveles propuestos por los autores, que van desde un nivel preestructural hasta el considerar la función como un objeto, los que están directamente relacionados con la instrucción que reciban los estudiantes. Del mismo modo, estos niveles buscan ser vistos como una caracterización de la sofisticación que muestran los niños en su forma de pensar. No se espera que estos niveles sean considerados como etapas lineales por los cuales los niños deben progresar, sino que adquieren un rol descriptivo.

Desde otros marcos teóricos también se han establecido niveles de "algebrización" de la actividad matemática escolar (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegary y Lasa, 2015; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Estos niveles se definen en función de: (a) representaciones; (b) procesos de generalización implicados; y (c) cálculo analítico. Para estos autores, hay 4 niveles de algebrización, identificando en la educación primaria dos niveles primarios de razonamiento proto–algebraicos.

Función (lineal) y relaciones funcionales

El pensamiento funcional tiene como foco de contenido las funciones. El concepto de función no se introduce tradicionalmente en educación primaria. Nuestro interés en la función radica en que este concepto opera como un punto de entrada al álgebra en los primeros cursos y que este concepto, como soporte para el pensamiento funcional, entrega la oportunidad que los estudiantes puedan explorar el concepto de variable como una variación entre cantidades (Blanton y Dougherty, 2011). Apoyando la idea anterior, Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) se basan en que "en la educación matemática en la escuela primaria, las operaciones de la aritmética se pueden tratar como funciones" (p. 108). Estos autores plantean que en muchas ocasiones los profesores enseñan sobre las funciones antes de presentar la noción como tal. Por ejemplo, al presentar una tabla de multiplicar, esta puede ser relacionada con la expresión $y = mx$, donde x e y pueden ser considerados números a lo largo de columnas y m correspondería al número en la expresión "tabla del m". A partir de los elementos anteriores, podemos considerar la importancia del concepto de función en las matemáticas escolares de los cursos iniciales como una manera de resaltar el carácter algebraico de la aritmética y como un elemento que permite establecer conexiones y unificar contenidos del currículo matemático, tal como lo plantea Schwartz (1990). Por tanto, no se trata de cambiar los contenidos curriculares actuales; más bien de introducirlos de forma que se fomenten otros modos de pensamiento (Cañadas y Molina, 2016).

Azcárate y Deulofeu (1990) indican que la importancia del concepto de función se debe a su gran campo de aplicaciones prácticas, pero añaden que entregar una definición a esta noción no es una tarea sencilla. Para estos autores, el problema se sitúa en que las definiciones más intuitivas carecen de rigor, mientras que las más rigurosas pueden resultar más lejanas a los problemas concretos que la originan.

Dentro de nuestra revisión de literatura, destacamos la siguiente definición de función, que genera cierto consenso entre autores:

> *Una función es la relación que asocia de forma única los elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto. Formalmente, una función a partir de A hacia B es un objeto f tal que cada $a \in A$ está asociado únicamente con un*

> *objeto $f(a) \in B$. Por lo tanto, una función es una relación de muchos a uno (o una relación uno es a uno). El conjunto A de los valores en los que se define una función se llama dominio, mientas que el conjunto f(A) ∈ B de valores que la función puede producir es llamado rango. Aquí, el conjunto B es llamado codominio de f.* (Weisstein, 1999, viz., Function)

Thomas (2006) establece la existencia de diversos tipos de funciones, entre las que se encuentran: (a) funciones de potencia; (b) funciones polinómicas; (c) funciones racionales; (d) funciones algebraicas; (e) funciones trigonométricas; (f) funciones exponenciales; (g) funciones logarítmica; y (h) funciones transcendentes. Dentro de las funciones polinómicas encontramos las funciones lineales de la forma $f(x)= mx + b$, para constantes m y b. Para Martínez, Varas, López, Ortiz y Solar (2013) una función lineal implica que "la variación de la variable dependiente es directamente proporcional a la variación de la variable independiente" (p. 188). Este tipo de funciones son el foco de nuestra investigación, por ser aquellas que se consideran adecuadas según la bibliografía consultada para nuestra trabajo ateniendo a la edad de los estudiantes con los que trabajamos.

Sobre la noción de función que se presenta en el currículo escolar, Thompson (1994) indica que la atención se debe centrar, principalmente, en el concepto de función, relaciones y en la determinación de funciones inversas. Para este autor, una función se ha definido como una regla que establece una relación entre dos variables, donde el énfasis está dado sobre cómo los cambios de una variable se encuentra relacionado con los cambios de la otra variable. Sobre la idea de este autor y lo propuesto por Martínez, Varas, López, Ortiz y Solar (2013), consideraremos una función directa cuando el énfasis se centra en determinar el valor de la variable dependiente, mientras que una función inversa está centrada en la variable independiente. Volviendo a la figura 3, donde presentamos la tarea de los perros y ojos de Blanton y Kaput (2004) para los primeros cursos de primaria, la variable dependiente correspondería a la cantidad de ojos, que está en función de la cantidad de perros (variable independiente). En esta tarea, una pregunta que implica una función directa estaría centrada en conocer la cantidad de ojos dada una cantidad de perros. Por ejemplo, conocer la cantidad de ojos que tienen 10 perros. En cambio, preguntar por la cantidad de perros dada la cantidad de ojos estaría centrada en la variable independiente. En síntesis, la figura 4 da cuenta del tipo de funciones que se pueden establecer a partir de una variable dada.

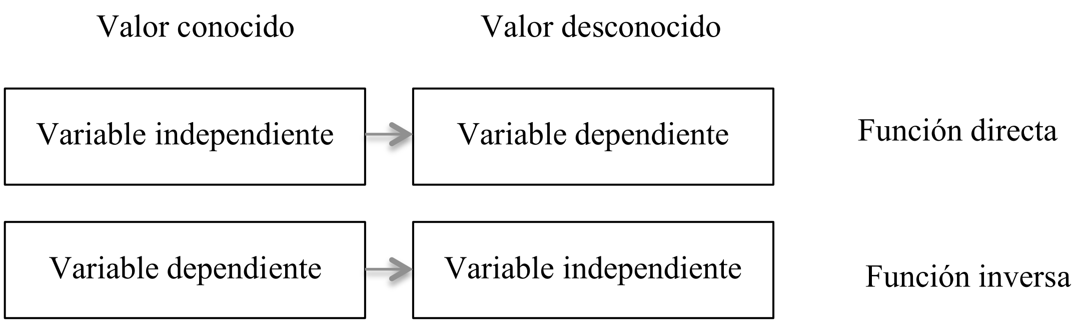


Figura 4. Función directa e inversa

Centrados en la enseñanza de las funciones, Confrey y Smith (1991) establecen un marco referencial basado en situaciones contextuales, múltiples relaciones, prototipos y transformaciones. Estos autores recogen la noción matemática de relación funcional para presentar dos aproximaciones para la enseñanza de las funciones: covariación y correspondencia.

Posteriormente, Smith (2008) establece modos de análisis de patrones y relaciones, definiendo tres tipos de relaciones funcionales: (a) patrones recursivos o recurrencia, que implica encontrar la variación o el patrón dentro de una secuencia de valores; (b) la correspondencia o relación de correspondencia, en la que se hace hincapié en la relación entre los pares correspondientes de la variable; y (c) pensamiento covariacional o covariación, donde el foco está dado por el análisis de cómo dos cantidades varían al mismo tiempo y cómo los cambios que se producen en una afectan a la otra. A partir de los elementos expuestos por este autor y apoyado en las ideas de MacGregor y Stacey (1995), entendemos una relación funcional como las diferentes maneras en las cuales las variables presentes en una función se relacionan, distinguiendo tres, las que llamaremos: (a) recurrencia, (b) correspondencia y (c) covariación. En la figura 5 mostramos estos tres tipos de relaciones funcionales para el problema de los perros y ojos que hemos utilizado para ejemplos anteriores.

Cantidad de perros (x)	Cantidad total de ojos (y)
1	2
2	4
3	6
100	200
…	…
n	2n

Correspondencia
El foco está centrado en la relación entre las variables. Por ejemplo: "si la cantidad de perros es 1, la cantidad de ojos es su doble".

Recurrencia
Centrada en el valor de una variable, ya sea la dependiente o independiente. En este caso, por ejemplo "la cantidad de ojos va aumentando de 2 en 2".

Covariación
En este caso, el foco está dado por los cambios entre las variables, al mismo tiempo. Ejemplo: "cuando x aumenta en 1, y aumenta en 2".

Figura 5. Ejemplo de relaciones funcionales (adaptado de Smith, 2008)

Patrones y generalización

Un patrón corresponde a una situación que se repite con cierta regularidad (Castro, 1995). Para Stacey (1989) y Castro (1995), el uso de patrones tiene diferentes aplicaciones y utilidades, desde donde se destaca que puede ser concebido como: (a) una importante estrategia para resolver problemas; (b) una herramienta que facilita la comprensión de los fenómenos que ocurren en el entorno; (c) una ayuda para comprender expresiones y relaciones que se pueden usar en estudios matemáticos posteriores; y (d) un elemento que puede incorporarse en las directrices curriculares, ya que permite organizar resultados de manera sistemática, mediante la búsqueda de un patrón, analizando nuevas formas. Complementando las ideas anteriores, Castro-Rodríguez y Castro (2016) indican que el concepto de patrón es el precursor del pensamiento algebraico, ya que permite establecer generalizaciones, contribuyendo a la capacidad de establecer modelos matemáticos y establecer los cimientos para desarrollar habilidades matemáticas.

Van de Walle, Karp y Bay-Williams (2010) indican que el trabajo con patrones no solo se puede llevar a cabo a través de actividades relacionadas con la extensión de estos. Los autores señalan que el trabajo con patrones permite, por una parte, establecer una generalización entre los elementos presentes en una secuencia, así como también permiten representar una función. La figura 6, tomada y adaptada de los autores, da cuenta de la manera en la cual se puede trabajar el concepto de función a través de una configuración puntual, donde se pueden identificar dos patrones geométricos diferentes ("agregando a la cantidad anterior" y "un cuadrado y una columna más").

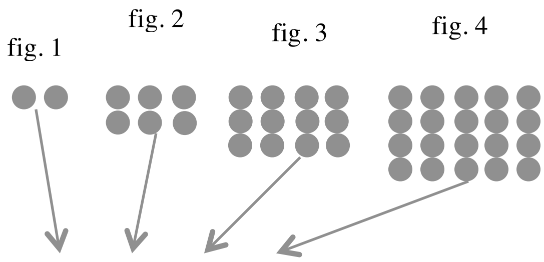
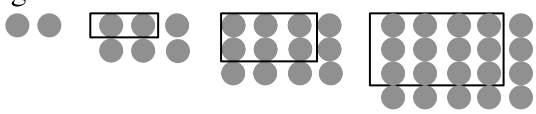


figura	1	2	3	4	5	6	…	20
nº puntos	2	6	12	20	30	¿?	¿?	¿?

+4 +6 +8 +10

(a) Agregando a la cantidad anterior



(b) un cuadrado y una columna más

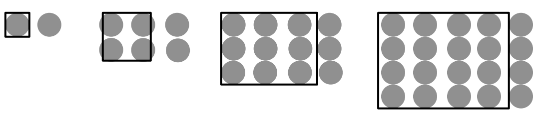


Figura 6. Ejemplos de configuraciones puntuales (p. 270)

Este tipo de actividades son utilizadas comúnmente en textos de estudio de primaria, los que pueden ayudar a que los estudiantes comiencen a pensar en las relaciones funcionales, ya que estos, por ejemplo, al identificar diferentes patrones pueden llegar a establecer relaciones entre las variables. En estos casos, el patrón se corresponde con la regularidad a través de cualquier de las tres relaciones funcionales que presenta Smith (2008).

El concepto de patrón adquiere un rol importante en el proceso de razonamiento inductivo, donde su presencia puede ayudar a potenciar el desarrollo de habilidades de generalización (Cañadas, 2007) y ha comenzando a cobrar relevancia investigativa en los últimos años (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008).

La generalización de patrones se considera como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Castro, 2012; Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Stacey, 1989; Vergel, 2015). Centrados en una primera definición sobre generalización, Mason (1996) indica que

> *la generalización es el latido de las matemáticas, y aparece de muchas formas. Si los maestros no son conscientes de su presencia, y no tienen la costumbre de lograr que los estudiantes trabajen en la expresión de su propia generalización, el pensamiento matemático no está teniendo lugar* (p. 65).

La idea del profesor Mason da cuenta del rol importante que adquiere la generalización en las matemáticas, las que expresan una notación concisa que se manipula con el fin de extraer más conclusiones que pueden ser expresadas en particular o general (Mason y Johnston-Wilder, 2004).

Sobre el comienzo del proceso de generalización, Mason, Burton y Stacey (1988) indican que este se inicia cuando se intuye cierto esquema subyacente, aunque todavía no se puede expresar claramente. Kaput (1999) indica que la generalización implica una ampliación deliberada de los razonamiento que van más allá de los casos particulares, centrándose en las relaciones entre modelos, procedimientos o estructuras. Este autor distingue dos fuentes de generalización y formalización: (a) desde contextos propiamente matemático y (b) desde situaciones fuera de la matemática, pero sujetos a “matematización”.

Mason, Graham y Johnston-Wilder (2005) señalan que el corazón de álgebra es la generalización y que cada alumno demuestra en la escuela su capacidad para generalizar y abstraer casos particulares, ya que esta actividad es “totalmente natural, placentera y parte del sentido de las decisiones humanas" (p. 2). Los niños que se enfrentan a tareas de generalización requieren tiempo y experiencias significativas para trabajar sobre estos procesos, ya que es una actividad que genera dificultades (Castro, 2012; Dreyfus, 1991).

En una investigación reciente, Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez (en prensa) realizan un estudio centrado en las relaciones funcionales y estrategias de resolución de problemas que evidencian estudiantes de primero de primaria al trabajar sobre un problema contextualizado que involucra la función lineal $f(x)=x+5$. El problema trata sobre las edades de dos hermanos: "dos niños, Álvaro y Carmen, se llevan por cinco años, siendo Carmen cinco años mayor que Álvaro" (p. 3). Las preguntas están centradas en determinar la edad de Carmen, conociendo la edad de Álvaro. Dentro de los resultados obtenidos, destacamos las evidencias de generalización que emplean los estudiantes de este curso al trabajar con casos particulares cercanos y lejanos. Los resultados dan cuenta que 10 niños llegan a establecer un proceso de generalización, empleando el sistema de representación verbal. Los autores enfatizan el rol que adquiere el problema contextualizado como un medio útil para promover en el aula el pensamiento funcional, donde este es un mediador para la generalización de la relación entre variables. A partir de este elemento, destacamos la importancia que adquieren los problemas contextualizados en las investigaciones centradas en el pensamiento funcional.

Problemas contextualizados

Castro (2002, 2008) señala que la resolución de problemas es parte esencial del quehacer científico, donde existe una relación indiscutible entre resolución de problemas y conocimientos científicos. Centrándonos específicamente en la relación entre las matemáticas y la resolución de problemas, Castro establece que la primera consiste "en esencia formular y resolver problemas" (p. 15), lo que permite comprender y centrar la atención en la resolución de problemas como parte de la naturaleza matemática. Si bien, hay muchos otros aportes teóricos que sin duda han contribuido a que la resolución de problemas sea un tema central en el contexto de la Educación Matemática, es de gran importancia mencionar a dos: Pólya (1981) y Schoenfeld (1985). El primero publicó un libro llamado *How to solve it?*, donde plantea la idea del resolutor ideal de una situación problema siguiendo cuatro fases: comprender el problema; concebir un plan; ejecutar un plan, y examinar la solución obtenida. En cada una de ellas establece subdivisiones y preguntas orientadoras. Por su parte, Schoenfeld publica en 1985 *Mathematical problem solving*, quién a diferencia de la propuesta de Polya expande la perspectiva a un modelo de resolución que comprende la metacognición y los afectos.

Existen diferentes formas de clasificar un problema matemático, dependiendo del criterio empleado. Los problemas matemáticos que se presentan en un contexto han recibido diversos nombres: problemas de la vida real, problemas sobre situaciones reales, problema de contexto real, entre otros. Consideraremos un problema contextualizado como aquel que presenta actividades cercanas a posibles situaciones reales, donde los resolutores requieren emplear habilidades, conceptos y procesos matemáticos. En síntesis, son considerados una herramienta que permite organizar, sintetizar y representar los datos, otorgándole significado a las decisiones tomadas (Blanco, 1991).

Diferentes autores han destacado el rol de los problemas contextualizados como una herramienta que permita situar y profundizar el aprendizaje del álgebra; así como favorecer la posibilidad de generalizar sobre cantidades (Carraher y Schliemann, 2007; Carraher, Martinez y Schliemann, 2008; Kieran, 2007). Para Confrey (1991), la resolución de problemas es una actividad intelectual que permite situarla desde una mirada constructivista, donde el resolutor construye su conocimiento estableciendo redes conceptuales con estructuras previas.

Confrey y Smith (1991) proponen un marco para la enseñanza de las funciones en la educación secundaria, basados en el uso de problemas contextualizados, prototipos, representaciones múltiples y transformaciones entre aquellas representaciones. Centrado en el pensamiento funcional, Smith (2008) plantea que para iniciar el estudio de actividades que impliquen funciones, se deben crear diversas situaciones problemáticas para que los estudiantes, de manera individual, se centren la relación entre dos cantidades que covarían conjuntamente. Este autor destaca la resolución de problemas contextualizados como un proceso individual, donde "la génesis del pensamiento funcional ocurre cuando un individuo se involucra en una actividad, opta por prestar atención a dos o más cantidades que varían, y luego comienza a centrarse en la relación entre estas cantidades" (p. 145). Los problemas contextualizados, siguiendo la idea de Smith, permiten que los estudiantes logren comprender la relación entre cantidades que co-varían y en donde los problemas contextualizados descritos por Confrey y Smith (1991) son construcciones sociales diseñados para facilitar este proceso. Si bien la resolución de problemas es una construcción individual, el rol de los profesores, mediante la creación de actividades, la descripción de cantidades variables y el planteamiento de preguntas adecuadas para generar diálogo en el aula, proporciona la oportunidad para participar en actividades que fomenten y desarrollen el pensamiento funcional.

Representaciones y sistemas de representación

Las representaciones tienen gran relevancia en las investigaciones en Educación Matemática por su importante rol en la construcción de conocimiento matemático (Castro y Castro, 1997). Glasersfeld (1995) plantea que las representaciones pueden ser activadas por muchas razones, considerándolas como un acto mental que trae consigo una experiencia previa que ha vivido un sujeto. Usualmente, se suele distinguir entre representaciones externas y representaciones internas. Las primeras hacen referencia a las operaciones convenidas con las que comunicamos nuestro conocimiento matemático, mientras que las internas hacen referencia al pensar sobre objetos matemáticos, formando imágenes mentales. En este trabajo nos centramos en las externas, haciendo referencia a ellas como representaciones. Castro y Castro (1997) señalan que las representaciones son notaciones que expresan conceptos y procedimientos matemáticos construidos por un sujeto, dando cuenta de sus características y propiedades relevantes. Las representaciones permiten que los sujetos elaboren imágenes mentales, potenciando así su conocimiento matemático. La diversidad de representaciones sobre un mismo objeto produce un aumento en la capacidad cognitiva que tienen los sujetos al pensar sobre este. En este contexto, el interés de nuestra investigación está centrada en las representaciones externas, específicamente en la manera que los estudiantes son capaces de evidenciar su tratamiento sobre conceptos y procedimientos matemáticos.

Las representaciones son herramientas, un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos, con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, lo que permite realzar la posibilidad de que los sujetos puedan acercarse y establecer una relación con un determinado objeto matemático. De esta forma, una representación no se puede concebir de manera aislada, ya que estas adquieren significado y sentido al considerarlas dentro de un sistema más amplio que establece determinados significados y convenciones (Goldin y Shteingold, 2001; Rico, 2009). Por esta razón, hablaremos de sistemas de representación.

Diferentes representaciones ponen en juego distintos signos y reglas. Además, se pueden organizar atendiendo a sus similitudes y diferencias. En una primera aproximación a la noción de sistema de representación, Castro, Rico y Romero (1997) indican que los sistemas de representación son formas de expresar y simbolizar ciertas estructuras numéricas mediante el uso de signos, reglas y enunciados, donde los sistemas de representación por sí solo no agotan el concepto que representan. Siguiendo esta idea, entenderemos que un sistema de representación: (a) organiza los símbolos por los cuales se hacen presentes los conceptos matemáticos; (b) diferentes sistemas de representación aportan diferentes significados para cada concepto; y (c) un mismo concepto admite y necesita diferentes sistemas de representación complementarios. Esta complejidad que entrañan las representaciones hace que se hable de sistemas de representación (Gómez, 2007). Un sistema de representación desempeña un papel crítico en la determinación de la estructura de los procesos de pensamiento de una persona (Kaput, 1991). Los sistemas de representación en matemáticas poseen una estructura, de modo que las diferentes representaciones están relacionadas dentro de un sistema. Cada sistema de representación se encuentra sujeto a un conjunto de reglas que están condicionadas por las matemáticas y por el concepto matemático específico al que refieren (Goldin y Shteingold, 2001).

En el contexto específico del álgebra escolar, Molina (2014) destaca que “conviven diferentes sistemas de representación externas, que ayudan a hacer presentes los objetos matemáticos abstractos. Estos sistemas son, principalmente, el simbolismo algebraico, el lenguaje verbal y los sistemas de representación tabular, gráfico y numérico” (p. 559). Utilizar y transitar con fluidez entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos es una importante expectativa a cumplir durante la educación obligatoria, ya que los estudiantes desarrollarán una comprensión más profunda de conceptos del álgebra escolar. Sobre esta idea, se recomienda el uso de variadas representaciones para la enseñanza de las funciones, donde el uso de las representaciones permitiría que el sujeto exprese sus propias ideas sobre las funciones (Confrey y Smith, 1991).

El empleo de diferentes tipos de representación asociados a un mismo objeto matemático no solo requiere la comprensión de cada una por separado, sino que también “aparece la necesidad de poder traducir, de un tipo de representación a otros tipo de representación los objetos matemáticos expresados, para poder asegurar la comprensión y aprendizaje de dichos objetos” (Martínez, 2011, p. 21). Para la autora, el proceso de traducción conlleva una serie de dificultades que han sido estudiado por investigadores (Duval, 1999; Janvier, 1987) y donde se diferencian dos procesos: el tratamiento y conversión.

Un mismo concepto u objeto matemático se puede representar por diferentes sistemas de representación, donde es posible y agrupar en cuatro categorías las operaciones que se pueden realizar sobre aquellos signos que pertenecen a dichos sistemas de representación. Una de las categorías en la que se apoya este autor es la traducción entre sistemas de representación, el cual es entendido como un procedimiento en el cual “se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero pertenecen a diferentes sistemas de representación” (Gómez, 2007, p. 43).

Algunos investigadores concuerdan que el empleo de representaciones múltiples entre sistemas de representaciones (gráficos, tabulares, verbales y simbólicas) permite a los estudiantes establecer relaciones al enfretarse a situaciones problemáticas, donde estos pueden desarrollar una comprensión más profunda de las relaciones y conceptos matemáticos involucrados, disminuyendo las dificultades que pueden presentar los estudiantes durante la resolución de problemas (Brizuela y Earnest, 2008; Dufour-Janvier, Berdnaz y Belanger, 1987; Hiebert y Carpenter, 1992; Kaput, 1989).

En una aproximación a la noción de representación múltiple, Özgün-Koca (1998) las define como “la materialización de ideas matemáticas externas y conceptos que proporcionan la misma información en más de una forma” (p. 3). Para esta autora, las representaciones múltiples brindan un ambiente que permite a los estudiantes abstraer y establecer una comprensión de conceptos matemáticos, por lo que se hace necesario entender la manera en la que los estudiantes emplean estas representaciones. Entenderemos, de esta forma, que una representación múltiple es emplear conjuntamente dos o más sistemas de representación al mismo tiempo.

Las representaciones sintéticas son un tipo de representación múltiple. Cuando se utiliza más de un sistema de representación pero ninguno de ellos cobra sentido por separado; deben ser considerados conjuntamente para que tengan significado, hablamos de representación sintética (Cañadas y Figueiras, 2011).

Algunas investigaciones que se centran en los sistemas de representación que emplean los estudiantes al participar en actividades que buscan fomentar el pensamiento funcional, son en las que nos centramos a continuación. Carraher y Schliemann (2007) conducen tres estudios longitudinales que buscan documentar cómo los niños piensan algebraicamente y emplean representaciones. El primer estudio se centra en un tercer grado, donde se realizan 16 lecciones a la luz del *early algebra*. El segundo estudio se centra en cuatro clases diferentes desde segundo de primaria hasta finalizar cuarto, mediante la ejecución de clases de 90 minutos semanales. Finalmente, el tercer estudio está centrado en analizar cómo 26 estudiantes progresan desde tercer a quinto año de primaria. Mostramos algunas de los principales representaciones empleadas por estudiantes al trabajar en problemas contextualizados. En la figura 7 recogemos un ejemplo de un sistema de representación pictórico empleado por estudiantes de tercero de primaria en la resolución del problema contextualizado *the candy boxes*. Por otro lado, en la figura 8 presentamos una combinación de sistema de representación pictórico, verbal y simbólico-numérico empleados por estudiantes de cuarto de primaria para representar la cantidad en un problema contextualizado llamado *the wallet.*

Figura 7. Ejemplo de sistema representación pictórico (p. 693)

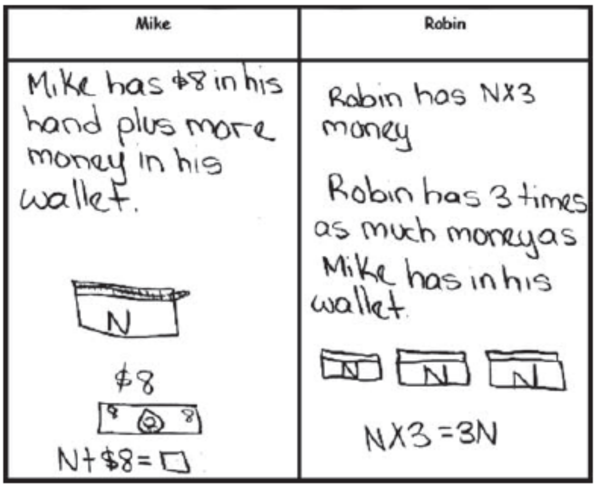


Figura 8. Ejemplo de combinación de sistemas de representación (p. 693)

Una de las principales conclusiones es que, una vez que los estudiantes experimentan con problemas contextualizados, son capaces de trabajar con más de una función al mismo tiempo, analizando los patrones en relaciones entre cantidades que co-varían. Esto permite que los estudiantes comiencen a interactuar con los diversos sistemas de representación que usan.

En el contexto español, destacamos los trabajos de Merino, Cañadas y Molina (2013) y Cañadas y Fuentes (2015) sobre sistemas de representación dentro de un enfoque funcional del álgebra escolar.

Merino, Cañadas y Molina (2013) centran su investigación en un quinto año de primaria. El foco de la investigación, donde se trabaja a la luz de la relación funcional *f(x)=2x+2*, atiende a los sistemas de representación y patrones que emplean 20 estudiantes del curso descrito, en un problema contextualizado. Los principales resultados evidencian que siendo el sistema de representación verbal el más utilizado, también se evidencia con frecuencia el pictórico. Por otro lado, las representaciones múltiples adquieren gran presencia en las cuestiones, donde, por ejemplo, 18 de ellos emplean este tipo de representación en una cuestión. Entre estos, los sistemas de representación más empleados conjuntamente son el pictórico y verbal, seguida de una combinación numérica y verbal. La figura 9 da cuenta de la representación múltiple más empleada por los estudiantes.

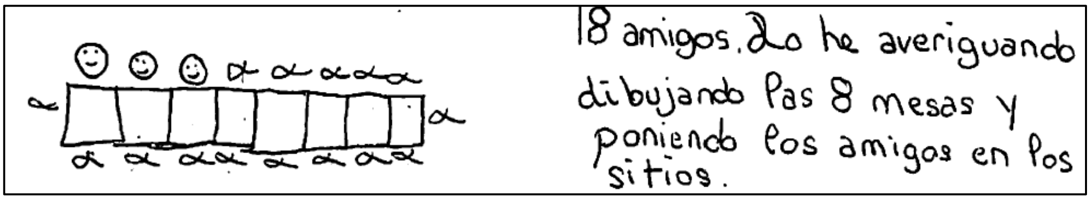


Figura 9. Ejemplo de representación múltiple (p. 33)

En el contexto australiano, Wilkie (en prensa) realiza una investigación con estudiantes de 12 y 13 años, intentando describir la manera en la cual la generalización de un patrón se ve reflejada en la capacidad de emplear variables y representaciones múltiples en diferentes contextos, así como conocer sus pensamientos sobre relaciones funcionales. Para esta autora, aún se sabe poco sobre cómo los estudiantes emplean sus conocimientos algebraicos a través de las representaciones. Se plantea, por ejemplo, que la posibilidad que estudiantes empleen sistemas de representaciones gráficas y simbólico-algebraicas para referirse a un objeto matemático, es visto como "un elemento fundamental para que los estudiantes desarrollen flexibilidad y fluidez en la interacción con múltiples representaciones" (p. 6).

Finalmente, destacamos la investigación de Cañadas y Fuentes (2015), quienes realizan una investigación sobre el pensamiento funcional que manifiestan 32 estudiantes de primer curso de primaria a partir de un problema contextualizado que involucra una relación funcional del tipo *f(x)=5x*. En esta investigación, uno de los focos estaba centrado en los sistemas de representación que emplean los estudiantes de este nivel, donde el proceso lector y escritor estaba recién construyéndose. Los principales resultados, que se materializan en las respuestas escritas en un cuestionario, dan cuenta que el sistema de representación más empleado es el pictórico, salvo en la actividad que implica una generalización, primando el sistema de representación verbal. También se emplean sistemas de representación numéricos y verbal, donde en esta última se caracteriza por un escaso vocabulario para expresar las ideas. En ciertas respuestas de los estudiantes se observan representaciones múltiples que combinan los sistemas pictóricos y numérico-simbólico.

CAPÍTULO 3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

A partir de los elementos anteriormente expuestos, consideramos dos objetivos generales para esta investigación, que se desglosan en sus respectivos objetivos específicos (OE).

El primer objetivo general es:

OG1. Identificar estudiantes de tercer curso de primaria que manifiestan pensamiento funcional.

Este objetivo se desglosa a través de los objetivos específicos siguientes.

- OE1. Describir las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes de tercero de educación primaria.
- OE2. Describir la generalización empleada por aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional.

Del mismo modo, hemos planteado un segundo objetivo general:

OG2. Describir los sistemas de representación que utilizan los estudiantes de tercero de educación primaria que manifiestan pensamiento funcional.

Para conseguir este objetivo, hemos planteado los siguientes objetivos específicos.

- OE3. Identificar los sistemas de representación que emplean los estudiantes.
- OE4. Describir las representaciones múltiples que emplean los estudiantes.

CAPÍTULO 4. MÉTODO

En este apartado presentamos los elementos que describen el marco metodológico empleado en esta investigación. Describimos el tipo de investigación, los participantes en el estudio empírico, el diseño de la recogida de información, la implementación, las categorías para el análisis de datos y la manera en la que abordamos el análisis de datos.

Tipo de investigación

Esta investigación tiene un planteamiento cualitativo, donde el interés está puesto en comprender y describir los fenómenos, "explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto" (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 364). Tal como hemos descrito, nuestro interés se centra en describir el pensamiento funcional de estudiantes de tercero de educación primaria a partir de un problema contextualizado.

Este trabajo se enmarca dentro de una investigación más amplia centrada en el pensamiento funcional de los estudiantes de tercero de educación primaria en la que se siguen las directrices de la investigación de diseño. Este tipo de investigación considera la complejidad de los contextos de enseñanza-aprendizaje y donde los resultados obtenidos se sustentan en el contexto social en el cual de enmarcan, los que pueden adquirir un potencial para influir en la práctica educativa (Barab y Squire, 2004; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Específicamente, el tipo de diseño empleado es un experimento de enseñanza. Este tipo de estudio es el más frecuente en las investigaciones de diseño y se realizan para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). En este tipo de diseño se establecen tres fases: (a) la preparación del experimento; (b) la experimentación; y (c) ejecución del análisis retrospectivo (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la segunda fase, centrada en las intervenciones en el aula, se producen las iteraciones del ciclo de tres pasos: (a) diseño y reformulación de la hipótesis; (b) intervención en el aula y recogida de datos; y (c) análisis de los datos, revisión y reformulación de la hipótesis.

Por la naturaleza de la investigación, en cada sesión planteamos un problema contextualizado en el que aparecía involucrada una función lineal. En la figura 10 recogemos un esquema de las diferentes sesiones que constituyeron el experimento de enseñanza para tercer curso y algunas de las ideas que desarrollamos en este apartado.

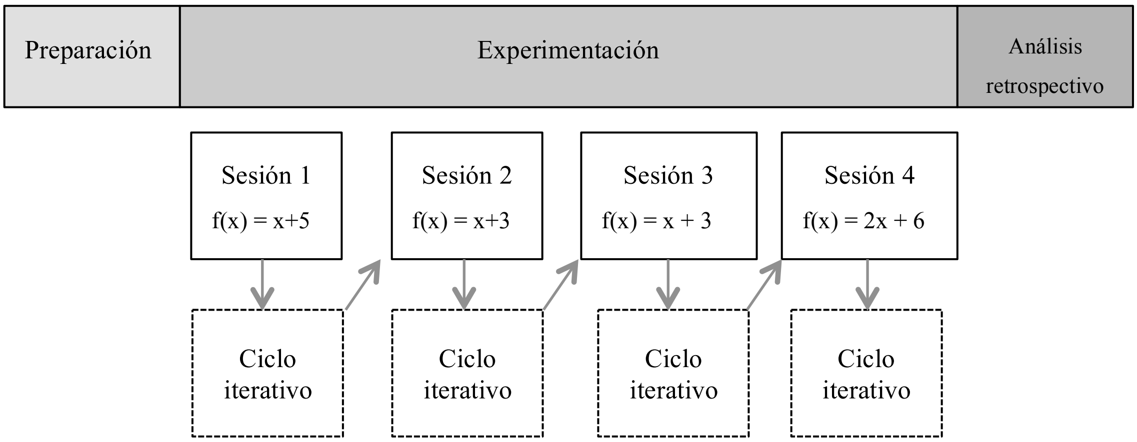


Figura 10. Diseño de la investigación

En esta memoria nos centramos en la cuarta y última sesión por dos razones principales: (a) el problema propuesto en esa sesión se ha trabajado también con estudiantes de otras edades en el contexto español y se pueden establecer comparaciones en un futuro y (b) los estudiantes estaban más familiarizados con el equipo investigador al ser la última sesión.

Sujetos

Trabajamos con un grupo de 24 estudiantes de tercero de educación primaria (8-9 años de edad), durante el curso 2014-2015. El centro educativo es privado de una línea y recibe a estudiantes de hasta los 12 años de edad. La muestra de esta investigación fue de carácter intencional, según la disponibilidad del centro y de los docentes del mismo.

Previo a las sesiones de la investigación, los estudiantes no habían trabajado con problemas que involucraban relaciones funcionales. Los estudiantes habían trabajado la suma y la resta, así como el conteo de uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez. Hay 3 estudiantes diagnosticados de altas capacidades y otros tantos con alguna dificultad de aprendizaje. Ninguno de ellos tenía adaptación curricular.

Diseño e implementación de la recogida de información

A continuación, describiremos la manera en la cual se llevó a cabo la sesión 4, en la que nos centramos en esta memoria. Del mismo modo, describiremos cómo se realizó el diseño del cuestionario empleado.

Descripción de la sesión 4

En la recogida de información participaron tres investigadores, con tres roles diferentes: (a) profesora-investigadora, (b) apoyo a la profesora-investigadora y (c) técnico de cámara. A estos tres investigadores los denominamos “equipo de investigación” a partir de aquí.

La sesión se organizó en tres partes. En la primera, la profesora-investigadora introdujo el contexto del problema y solicitó a los estudiantes que leyeran individualmente la situación. Los estudiantes estaban organizados en grupos de 4 ó 5, que es como solían trabajar en el aula con su maestra habitualmente. Transcurridos unos minutos, realizó preguntas hasta comprobar que los estudiantes habían comprendido la situación.

En la segunda parte de la clase, los alumnos trabajaron individualmente en un cuestionario individual escrito (Anexo A), donde se planteaba un problema contextualizado (lo describimos y presentamos en el siguiente apartado de esta memoria). Durante esta parte, el equipo de investigación supervisó el trabajo de los estudiantes, resolviendo dudas sobre la realización del trabajo. Durante este momento de la clase, grabamos con la cámara móvil el trabajo de algunos estudiantes.

En la tercera parte, se hizo una puesta en común en gran grupo sobre el trabajo realizado en el cuestionario, con la mediación de la profesora-investigadora. En este momento de la clase, se presentaron algunas preguntas y se solicitó a los estudiantes explicar y justificar los razonamientos empleados para obtener las respuestas.

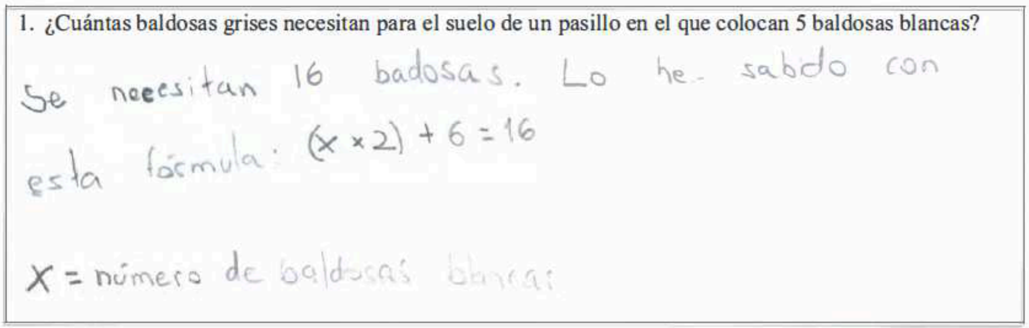
Las fuentes de información fueron tres: (a) grabaciones mediante vídeo-cámara del trabajo en gran grupo; (b) notas de los investigadores; y (c) cuestionario individual escrito para los estudiantes.

Las grabaciones mediante vídeo-cámara se realizaron con una cámara fija y una móvil. La cámara fija quedó ubicada al final de la sala de clases, mientras que con la cámara móvil intentamos recoger ideas verbales y explicaciones que brindan los estudiantes mientras trabajan con el cuestionario. En los Anexos B y C presentamos las transcripciones de las grabaciones realizadas por la cámara fija y móvil, respectivamente.

Diseño del cuestionario

El cuestionario estaba constituido por una presentación del problema y diferentes cuestiones. Planteamos el conocido problema de las baldosas, donde la relación funcional presente es $f(x)=2x+6$, involucrando tanto la estructura aditiva como la multiplicativa.

El problema de las baldosas lo han empleado diferentes investigadores para trabajar aspectos asociados al aprendizaje del álgebra. Küchemann (1981) establece una clasificación de la interpretación que los estudiantes pueden otorgar a las letras en el contexto algebraico. Como propuesta de enseñanza, el autor plantea el problema de las baldosas como una posibilidad de presentar un patrón mediante baldosas grises y blancas que conforman una regla y donde se pide a los estudiantes encontrar la cantidad de baldosas blancas para 10, 20 ó 100 baldosas grises. Para este autor, la relación entre la cantidad de baldosas blancas y grises está lejos de ser obvia y se pueden establecer diferentes maneras de representarlo. Las diferentes representaciones que pueden emplear los estudiantes son un desafío, por lo que vale la pena analizar la manera en la cual se otorga significado a las letras en el contexto algebraico. En el marco de su investigación doctoral sobre la descripción y caracterización del razonamiento inductivo en estudiantes de secundaria, Cañadas (2007) emplea el problema de las baldosas como parte de las tareas que se presentaron a los estudiantes. Esta autora presenta el contexto de las baldosas y se pregunta a los estudiantes por la cantidad de baldosas grises si se tienen 1320 baldosas blancas. El Ministerio de Educación de Canadá (Ministry of Education, 2008) presenta un documento de apoyo a la docencia que busca ser una guía para la enseñanza de las matemáticas desde la educación infantil a sexto grado de primaria. Específicamente, en el documento referido patrones y álgebra de cuarto a sexto de primaria, sugieren emplear este problema. Se enfatiza la necesidad de emplear sistemas de representaciones pictóricos, tabulares y gráficos para dar cuenta de diferentes maneras de expresar la relación entre las variables. A su vez, se hace énfasis en la necesidad de brindar tiempo a los estudiantes para realizar la actividad y dar espacio para justificar las maneras en las cuales enfrentaron la situación problema. La incorporación más reciente del problema de las baldosas fue empleada por Yáñez (2015), dentro del mismo proyecto de investigación en el que se desarrolla este trabajo. El autor se centró en el pensamiento funcional que puede ser manifestado por estudiantes de 5º año de primaria, específicamente en las relaciones funcionales y representaciones empleadas por estos. La figura 11, obtenida de esta investigación, da cuenta de la aparición del sistema de representación simbólico-algebraico en las respuestas de los estudiantes.


1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

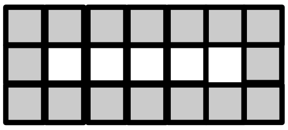
Se necesitan 16 badosas. Lo he sabdo con esta fórmula: $(x \times 2) + 6 = 16$

x = número de baldosas blancas

Figura 11. Ejemplo de sistema de representación simbólico-algebraico (p. 32)

En la figura 12 mostramos la presentación del problema contextualizado, tal y como se les presentó a los estudiantes en el cuestionario. Se ofreció a los estudiantes la posibilidad de utilizar materiales manipulativos que representaban los diferentes tipos de baldosas: cuadrados blancos y grises.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

Figura 12. Problema de las baldosas

A continuación, se plantearon una serie de cuestiones relativas a casos particulares consecutivos, otros lejanos, hasta llegar a la generalización. En el planteamiento de estas cuestiones, seguimos en modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007). En todas las preguntas se hacía énfasis en que justificaran sus respuestas. Las cuestiones fueron las siguientes.

C1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas? ¿Cómo lo sabes?

C2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas? ¿Cómo lo sabes?

C3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas? ¿Cómo lo sabes?

C4A. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas? ¿Cómo lo sabes?

C4B. Ahora hazlo de una forma diferente y explícalo aquí.

C5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

C6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?

C7. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan? ¿Cómo lo sabes?

En síntesis, en el diseño del instrumento contempla un problema contextualizado que se encuentra apoyado por un sistema representación manipulativo (baldosas de papel grises y blancas) y pictórico. Las primeras cuatro preguntas responden a una función directa (la variable independiente es el número de baldosas blancas), presentándose casos particulares no consecutivos. La pregunta 5 está diseñada con la intención que los estudiantes puedan expresar y representar la generalización de la relación entre las variables. Las preguntas 6 y 7 responden a una función inversa, donde se presentan casos particulares cercanos

Categorías de análisis

La construcción de las categorías se apoya en la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), la cual dispone de procedimientos específicos para la recogida y análisis de datos. Siguiendo esta idea y puesto que los fenómenos no se conciben como estáticos, ya que estos cambian continuamente en respuesta a los cambios, construimos las categorías en función de elementos teóricos presentados en los capítulos previos (e.g., Cañadas, en prensa; Cañadas y Molina, 2016; Confrey y Smith, 1991; Martínez et al., 2013; Molina, 2014; Smith, 2008; Thompson, 1994; Wilkie, en prensa), así como nuestros antecedentes sobre pensamiento funcional (Blanton et al., 2015; Brizuela y Earnest, 2008; Cañadas y Fuentes, 2015; Carraher y Schliemann, 2007; Fuentes, 2014; Merino, 2012; Merino, Cañadas y Molina, 2013). Adicionalmente, resolvimos la tareas pensando en posibles respuestas de los estudiantes.

Presentamos las categorías para el análisis de los datos en la tabla 1.

Tabla 1. *Categorías para el análisis de datos*

Categorías	Subcategorías
Relaciones funcionales	Recurrencia
	Correspondencia
	Covariación
Generalización	Correcta
	Incorrecta
Sistemas de representación	Verbal
	Manipulativo
	Pictórico
	Simbólico-numérico
	Simbólico-algebraico
Representaciones múltiples	*

Nota. * = Por la gran cantidad de posibles combinaciones entre diferentes sistemas de representación, subcategorías asociadas al sistema de representación múltiples, hemos decidido no registrar la totalidad de posibles combinaciones.

Siguiendo la propuesta de Cañadas (en prensa), consideraremos presencia de pensamiento funcional en las respuestas de los estudiantes cuando al analizar de forma conjunta la totalidad de las respuestas, identificamos, al menos, una relación funcional en, al menos, dos de las cuestiones empleadas. Por ejemplo, si un estudiante responde a las cuestiones 2 y 3 empleando una misma relación funcional, de correspondencia, consideraremos que este manifiesta pensamiento funcional y que la relación que identifica es la de correspondencia. Las figuras 13 y 14 evidencian esta situación que, hipotéticamente, podría presentarse al momento de analizar dos de las respuestas.

2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

He sumado las baldosas de grises de arriba, las de abajo, las de la derecha y la de la izquierda. Entonces, 8 + 8 + 3 + 3 = 22.

Figura 13. Ejemplo de relación funcional de correspondencia para C2

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

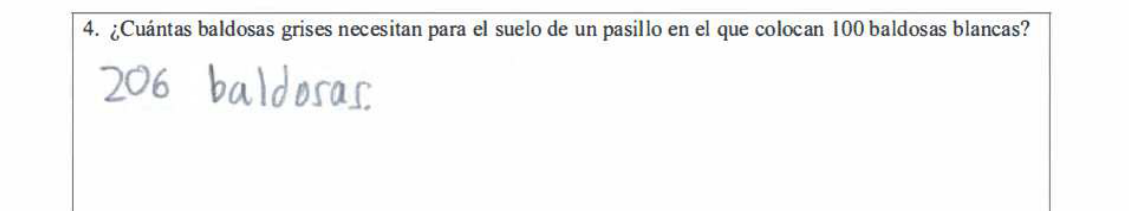
26

¿Cómo lo sabes?

He sumado las baldosas de grises de arriba, las de abajo, las de la derecha y la de la izquierda. Entonces, 10 + 10 + 3 + 3 = 26.

Figura 14. Ejemplo de relación funcional de correspondencia para C3

En otros casos diferentes de aquel donde hemos descrito que consideramos que hay evidencia de pensamiento funcional, tendremos en cuenta que no hay pensamiento funcional. La figura 15, tomada de Yáñez (2015), da cuenta de una respuesta donde no es posible identificar una relación funcional, ya que establece una respuesta directa que determina la cantidad de baldosas grises dada cien baldosas blancas.


4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

206 baldosas

Figura 15. Ejemplo de respuesta directa (Yáñez, 2015, p. 28)

Categoría relaciones funcionales

Apoyados en los aportes de Confrey y Smith (1991) y Smith (2008), analizamos las relaciones funcionales de: (a) recurrencia; (b) correspondencia; y (c) covariación. Por ejemplo, en la figura 13 el estudiante consideraría la cantidad de baldosas superiores (8) e inferiores (8), la cantidad de baldosas laterales derechas (3) y la cantidad de baldosas laterales izquierdas (3), A continuación, realiza una suma entre los valores de la figura descompuesta, con lo que obtiene la cantidad total de baldosas grises. Utiliza esta misma relación funcional para los casos de 10 baldosas blancas (ver figura 14). En estos casos, se observa que relaciona pares de valores (a, f(a)) para valores de a correspondientes a los casos particulares (8 y 10), y establece la relación con los números de baldosas grises 22 y 26, respectivamente. Por eso interpretamos que un estudiante con esas respuestas identificaría una relación de correspondencia.

Categoría generalización

A partir de los elementos provenientes de la teoría e investigación, consideramos dos opciones de generalización que pueden manifestar los estudiantes de tercero de educación primaria que manifiestan pensamiento funcional: (a) generalización correcta; y (b) generalización incorrecta. En el cuestionario empleado, la cuestión 5 busca que los estudiantes manifiesten mediante algún sistema de representación la relación general entre las variables. Un ejemplo de una generalización correcta que podría presentarse en las respuestas de los estudiantes se muestra en la figura 16.

5. Los albañiles de la empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas? **Pues, sumando dos veces la cantidad de baldosas blancas más las baldosas laterales de la derecha e izquierda, que son 3 y 3.**

Figura 16. Ejemplo de generalización

En la respuesta brindada en la figura 16, es posible identificar la manera en la cual se establece una relación entre la variable independiente (baldosas blancas) y la variable dependiente (baldosas grises). En síntesis, en este ejemplo es posible determinar la cantidad de baldosas grises dada *n* baldosas blancas.

Dentro de las generalizaciones incorrectas, consideramos aquellas donde los estudiantes plantean: (a) una respuesta completamente incorrecta; (b) un intento de generalización pero incompleto; o (c) respuesta directa. En la figura 17 mostramos un ejemplo una generalización incorrecta e incompleta.

5. Los albañiles de la empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas? **Sumando el doble de baldosas blancas.**

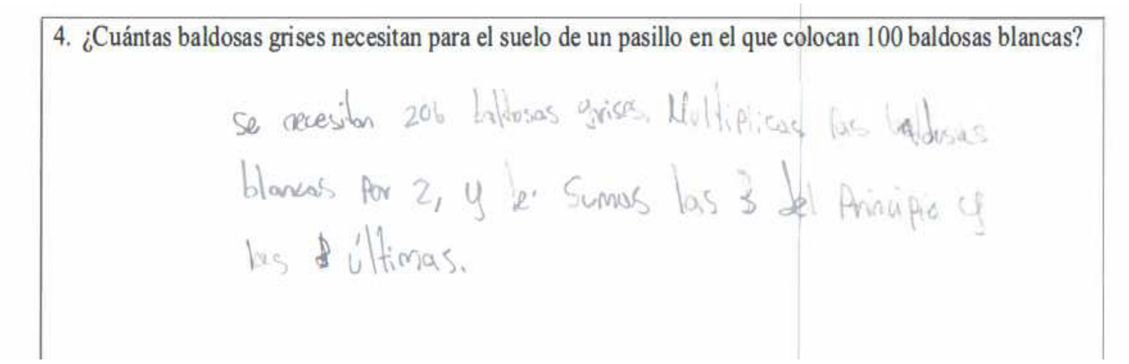
Figura 17. Ejemplo de generalización incorrecta e incompleta

En la respuesta de la figura 17 se observa que, aunque la idea de "sumar el doble" está bien orientada en el contexto del problema, le faltaría agregar las seis baldosas de los lados.

Categoría sistemas de representación

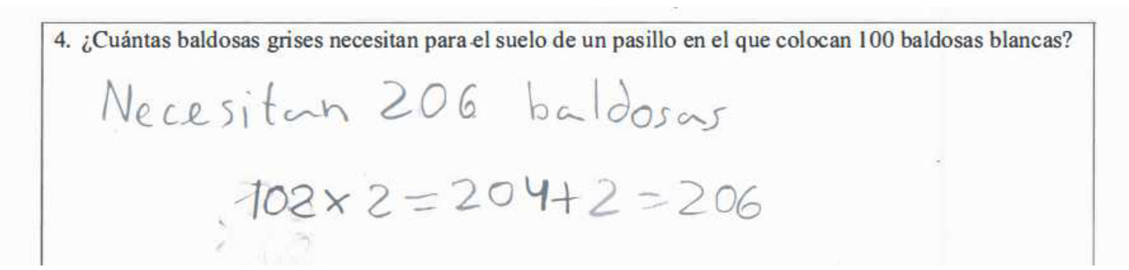
Considerando el curso en el que centramos esta investigación, tercero de educación primaria, en las características específicas de la tarea y en los aportes teóricos provenientes de la teoría (Molina, 2014) y de la investigación (Brizuela, 2005; Fuentes, 2014; Merino, 2012; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Yáñez, 2015), analizamos los sistemas de representación que emplean aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional en sus respuestas. Consideramos que los sistemas de representación que pueden emplear los estudiantes son: (a) verbal; (b) manipulativo; (c) pictórico; (d) simbólico-numérico; y (e) simbólico-algebraico. También en esta sección destacamos la posibilidad que los estudiantes emplean representaciones múltiples como una combinación al usar dos o más sistemas de representación.

En las figuras 18, 19 y 20 presentamos ejemplos de diferentes sistemas de representación empleados por estudiantes de quinto de educación primaria en el problema de las baldosas (Yáñez, 2015).


4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

Se necesitan 206 baldosas grises. Multiplicas las baldosas blancas por 2, y le sumas las 3 del principio y las 3 últimas.

Figura 18. Ejemplo de sistema de representación verbal. (Yáñez, 2015, p. 29)


4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

Necesitan 206 baldosas

102 × 2 = 204 + 2 = 206

Figura 19. Ejemplo de sistema de representación simbólico-numérico (Yáñez, 2015, p. 29)

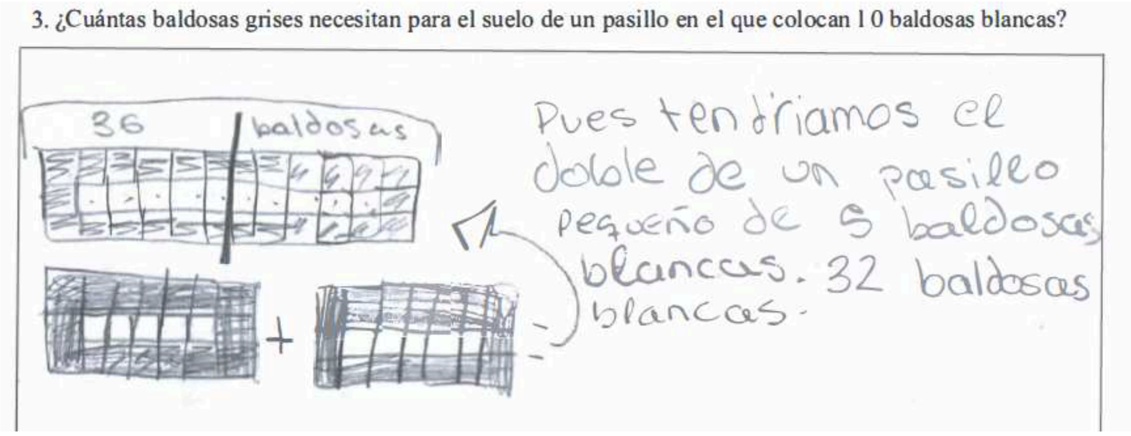


Figura 20. Ejemplo de sistema de representación pictórico y verbal (Yáñez, 2015, p. 29)

Los sistemas de representación no son mutualmente excluyentes por lo que, para el análisis consideramos la posibilidad de que aparecieran representaciones múltiples (ver figura 20) y sintéticas.

Análisis de datos

Analizamos las respuestas escritas de los estudiantes en los cuestionarios, complementando esta información con respuestas orales que manifestaron durante la parte de la sesión en gran grupo. Para la codificación de las respuestas de los alumnos, a cada uno de estos se le atribuyó un código específico (Ai, con i=1, … 24).

Para el análisis de la información, nuestra unidad de análisis fueron los estudiantes, considerando los focos establecidos en las categorías, que responden a los objetivos presentados: (a) relaciones funcionales empleadas; (b) generalización; y (c) sistemas de representación.

Una vez que los estudiantes han recibido un código, se ha identificado la cantidad de estudiantes, de un total de 24, que no han respondido la cuestión planteada. Luego, identificamos aquellos que brindan respuestas directas, en donde no es posible identificar los elementos que nos hemos propuesto para esta investigación. De los estudiantes restantes, analizamos sus respuestas.

Analizamos la totalidad de las respuestas que brindan los estudiantes a las cuestiones del problema. Comenzamos por establecer la presencia o ausencia de relaciones funcionales en cada una de las cuestiones, lo que nos permitió identificar aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional. Consideramos que los estudiantes que manifiestan pensamiento funcional son los que identifican, al menos, una relación funcional en, al menos, dos de las cuestiones planteadas.

Para este análisis, empleamos una hoja de cálculo: en una primera columna identificamos a los estudiantes; en una segunda columna registramos si hay respuesta a la cuestión 1 y en la tercera columna registramos que relación funcional se evidencia, en caso de existir. Repetimos este procedimiento para las ocho cuestiones. La figura 21 muestra la manera en la cual analizamos estos datos en las tres primeras cuestiones.

	A	B	C	D	E	F	G
1		C1		C2		C3	
2	Sujeto	R / NR	Rel. Func.	R / NR	Rel. Func.	R / NR	Rel. Func.
3	A01	1	-	1	-	1	cov
4	A02	1	-	1	-	1	-
5	A03	1	-	1	-	1	cov
6	A04	1	-	1	-	1	-
7	A05	1	corr	1	corr	1	corr
8	A06	1	corr	1	cov	1	corr
9	A07	1	-	1	-	1	-
10	A08	1	-	1	-	1	-
11	A09	1	-	1	corr	1	corr
12	A10	1	-	1	-	1	-
13	A11	1	corr	1	corr	1	-
14	A12	1	-	1	cov	1	cov
15	A13	1	-	1	-	1	corr
16	A14	1	-	1	corr	1	corr
17	A15	1	-	1	-	1	-
18	A16	1	-	1	-	1	-
19	A17	1	-	1	-	1	-
20	A18	1	-	1	-	1	-
21	A19	1	corr	1	-	1	corr
22	A20	1	-	1	-	1	-
23	A21	1	-	1	-	1	-
24	A22	1	corr	1	corr	1	corr
25	A23	1	-	1	-	1	-
26	A24	1	-	1	-	1	corr

Figura 21. Análisis de datos para identificar relaciones funcionales

A continuación, clasificamos las respuestas de los estudiantes en dos grupos: (a) aquellos que evidencian pensamiento funcional; y (b) aquellos que no manifiestan pensamiento funcional.

A partir de los estudiantes que manifiestan pensamiento funcional, clasificamos las respuestas a la pregunta sobre generalización (C5). Para esto, categorizamos las respuestas en: (a) generalización correcta; o (b) generalización incorrecta. Dentro de las incorrectas, realizamos una nueva clasificación, las que pueden ser generalizaciones: (a) respuesta completamente incorrecta; (b) un intento de generalización pero incompleto; o (c) respuesta directa. Destacamos que en caso de existir generalización en las respuestas de los estudiantes, esta generalización se puede emplear en cualquiera de las tres relaciones funcionales identificadas.

Finalmente, del grupo de estudiantes que evidencian pensamiento funcional, analizamos el tercer elemento de interés: los sistemas de representación. Para esto, registramos nuevamente en una hoja de cálculo el o los sistemas de representación empleados por cada una de las cuestiones. En la figura 22 presentamos un ejemplo del análisis realizado para la primera cuestión, según el sistema de representación empleado.

	A	B	C	D	E	F
1		C1				
2	Sujeto	Ver.	S. Num.	Alg.	Pict.	Man.
3	A3	0	0	0	1	0
4	A5	0	1	0	0	0
5	A6	1	0	0	0	0
6	A9	0	0	0	1	0
7	A11	1	0	0	0	0
8	A12	1	0	0	0	0
9	A13	0	0	0	1	0
10	A14	0	0	0	1	0
11	A19	0	1	0	1	0
12	A22	0	1	0	0	0
13	A24	0	0	0	1	0

Figura 22. Análisis de datos para identificar sistemas de representación

CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo presentamos los resultados y la discusión de los mismos. Tras centrarnos en resultados generales, pasamos a resultados más particulares, relacionados con los objetivos de investigación y que organizamos en tres apartados relativos a las relaciones funcionales, la generalización y los sistemas de representación.

Todos los estudiantes respondieron a las tres primeras cuestiones del problema. Veintitrés estudiantes respondieron a C4A., mientras que catorce estudiantes entregaron una respuesta escrita en C4B. En C5, C6 y C7 la cantidad promedio de alumnos que respondieron las cuestiones es de dieciséis. Con base en estos datos, creemos que las primeras preguntas tienen mayor cantidad de respuestas por tratarse de cuestiones que abarcan casos particulares no consecutivos con números pequeños. Del mismo modo, el alto nivel de respuestas en blanco en C5 responde a la complejidad que supone generalizar la relación entre variables, considerando la edad de los estudiantes. Conjeturamos que las funciones inversas también suponen un desafío mayor para los estudiantes, lo que interpretamos a partir de la cantidad de preguntas respondidas en C6 y C7.

Relaciones funcionales

En este apartado, recogemos los principales resultados sobre las relaciones funcionales, presentando evidencias de respuestas que consideramos más representativas, ya que son ejemplos que se repiten. En síntesis, del total de respuestas analizadas, 11 estudiantes manifiestan pensamiento funcional, mientras que en 13 de ellos no es posible determinar este tipo de pensamiento a partir de sus respuestas en los cuestionarios.

En la tabla 2 presentamos las relaciones funcionales que emplean aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional, por cada una de las cuestiones.

Tabla 2. *Relaciones funcionales utilizadas por los estudiantes en cada cuestión*

C	RF	Alumno											Total
		A3	A5	A6	A9	A11	A12	A13	A14	A19	A22	A24	
C1	Cr		✓	✓		✓				✓	✓		5
	Cv												0
C2	Cr		✓	✓	✓	✓			✓		✓		6
	Cv						✓						1
C3	Cr		✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	8
	Cv	✓					✓						2
C4.A.	Cr	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓	9
	Cv												0
C4.B.	Cr			✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓	7
	Cv												0
C5	Cr	✓				✓						✓	3
	Cv			✓	✓						✓		3
C6	Cr				✓	✓					✓		3
	Cv	✓											1
C7	Cr	✓		✓	✓	✓			✓		✓		6
	Cv												0
Total		5	4	7	7	7	2	3	5	2	8	4	

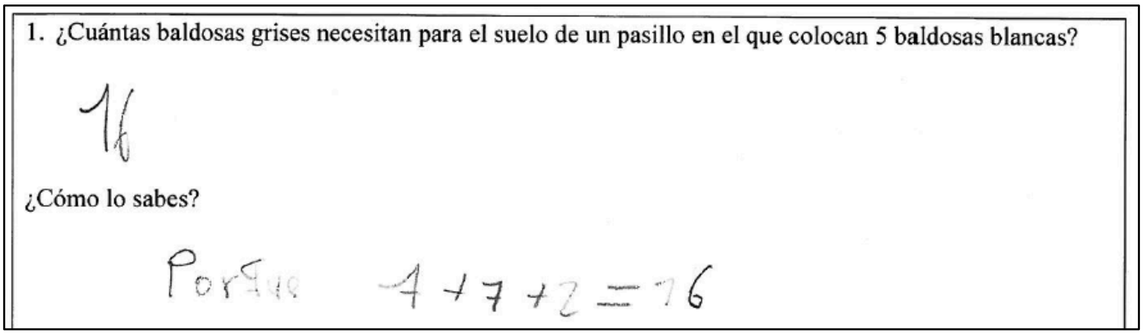
Nota. C= cuestión; RF = relación funcional; Cr = correlación; Cv = covariación; A = alumno.

Sobre las relaciones funcionales que utilizan los 11 alumnos que ponen de manifiesto este tipo de pensamiento, ningún estudiante pone de manifiesto la relación de recurrencia. Cada uno de los estudiantes identificados en esta tabla manifiestan pensamiento funcional, ya que emplean una relación funcional en, al menos, dos de las cuestiones presentadas. Por ejemplo, en las respuestas de A12 es posible identificar dos relaciones funcionales en dos cuestiones diferentes, mientras que en las respuestas escritas de A22 es posible identificar una relación funcional en cada una de las cuestiones.

De los 11 estudiantes que manifiestan pensamiento funcional, resulta interesante destacar la manera en la cual cuatro estudiantes (A3, A6, A9 y A22) dan cuenta de dos relaciones funcionales diferentes al responder las cuestiones planteadas en el cuestionario: correspondencia y covariación. Por ejemplo, en las respuestas de A3 es posible identificar relación de correspondencia en tres cuestiones (C4A., C5 y C7) y la relación de covariación en dos cuestiones (C3 y C6). Es importante señalar que ningún estudiante presenta dos relaciones funcionales diferentes en una misma cuestión. Este hallazgo coincide con los resultados de Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez (en prensa), quienes muestran como dos alumnos de primero de primaria, al trabajar sobre una tarea que involucra una función lineal, emplean también las mismas dos relaciones funcionales al trabajar sobre un problema contextualizado. Sobre este antecedente, concordamos que un mismo alumno puede trabajar sobre una tarea en la que emplea más de una relación funcional.

Los demás estudiantes (A5, A11, A12, A13, A14, A19 y A24) manifiestan la misma relación funcional, de correspondencia, en las cuestiones identificadas.

La mayoría de las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes de tercero son de correspondencia. A22 es un estudiante donde consideramos que hay manifestación de pensamiento funcional porque en más de dos cuestiones responde siguiendo una misma relación funcional, de correspondencia. Las figuras 23, 24 y 25 dan cuenta de la predominancia de esta relación funcional.


1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

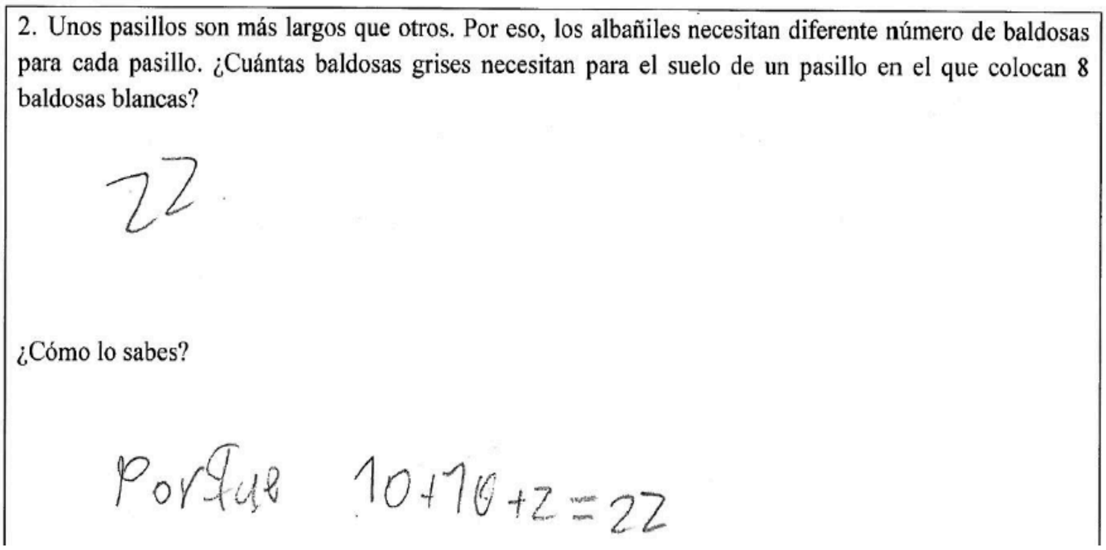
16

¿Cómo lo sabes?

Porque 7+7+2=16

Figura 23. Respuesta de A22 en C1

En la figura 23 el estudiante considera el número de baldosas blancas dadas (5) y le añade dos (7). Así, tendría el número de baldosas grises en uno de los laterales (superior o inferior). A continuación, suma ese número consigo mismo (7+7), con lo que obtiene el número de baldosas grises en los laterales superior e inferior de las baldosas blancas. Finalmente, añade dos, que se corresponden con las baldosas a los lados derecho e izquierdo de las baldosas blancas (7+7+2).



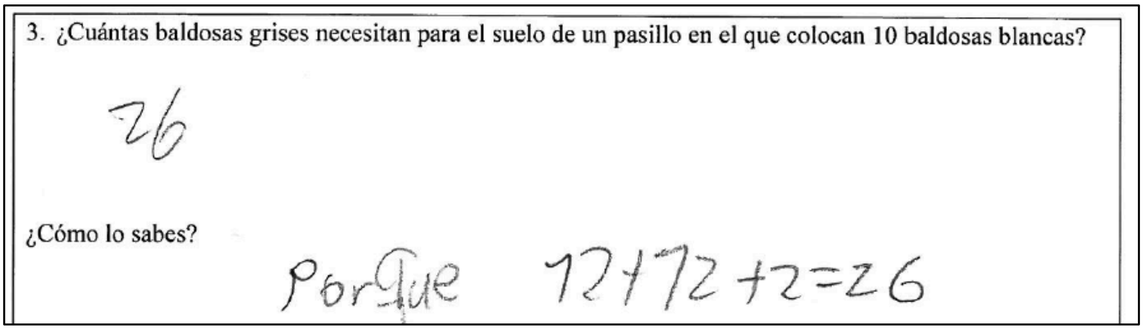
2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

Porque 10+10+2=22

Figura 24. Respuesta de A22 en C2



3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

26

¿Cómo lo sabes?

Porque 12+12+2=26

Figura 25. Respuesta de A22 en C3

Utiliza esta misma relación funcional para los casos de 8 y 10 baldosas blancas (ver figuras 24 y 25). En los tres casos, se observa que relaciona pares de valores (a, $f(a)$) para valores de a correspondientes a los casos particulares (5, 8 y 10), y establece la relación con los números de baldosas grises 16, 22 y 26, respectivamente.

Junto con las respuestas escritas al cuestionario, este mismo estudiante respondió oralmente a C4.A., donde emplea la misma relación funcional usada en las cuestiones anteriores. El siguiente extracto es parte del diálogo entre el estudiante y la profesora-investigadora, en la cual se busca justificar la manera de obtener la respuesta a la situación. Acompañamos la explicación del alumno en el relato con imágenes, provenientes de la grabación, que reflejan la explicación brindada por él (ver figuras 26 y 27).

A22: Tenemos cien baldosas, entonces, arriba hay cien. Pero yo, como hay más a los lados, hay ciento dos.

Profesora-Investigadora1: (representa en la pizarra la parte superior del dibujo). Pues, aquí tienes cien, ¿no?, por ejemplo. ¿Y a los lados?

A22: A los lados le sumamos uno. Entonces serían dos más, y es ciento dos. Y luego abajo, hacemos lo mismo...

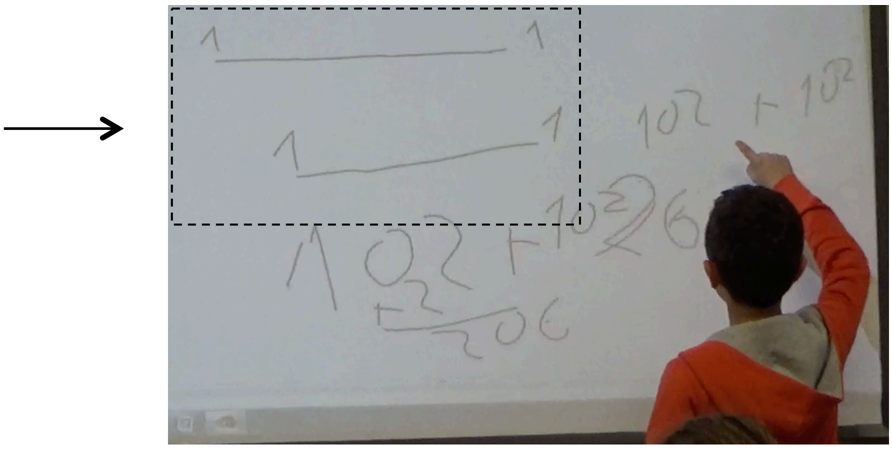


Figura 26. Explicación de A22 (parte 1)

Profesora-Investigadora1: Vale, hazlo si quieres para que te entiendas mejor.

A22: Hacemos lo mismo, y entonces es ciento dos, porque le he sumado dos al cien más ciento dos. Y entonces, como en los lados, en el medio, pues como aquí hay uno y aquí otro (haciendo referencia a las baldosas grises laterales a las baldosas blancas). Pues entonces, ciento dos más ciento dos, doscientos cuatro, más dos. Igual a doscientos seis.

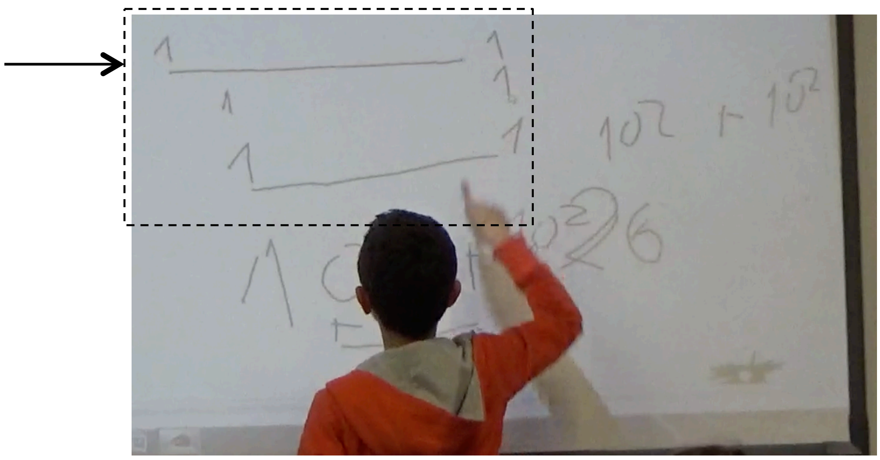


Figura 27. Explicación de A22 (parte 2)

Profesora-Investigadora1: Muy bien, ¿habéis entendido ahora mejor?

Alumnos: Sí.

En este extracto, es posible analizar la manera en la cual el estudiante emplea el patrón para determinar la cantidad total de baldosas grises dadas 100 blancas. Al finalizar su explicación, el estudiante da cuenta de la expresión simbólica-numérica (102 + 102 + 2 = 206), que le permite obtener la cantidad de baldosas grises dada 100 blancas. La figura 28 da cuenta de esta expresión.

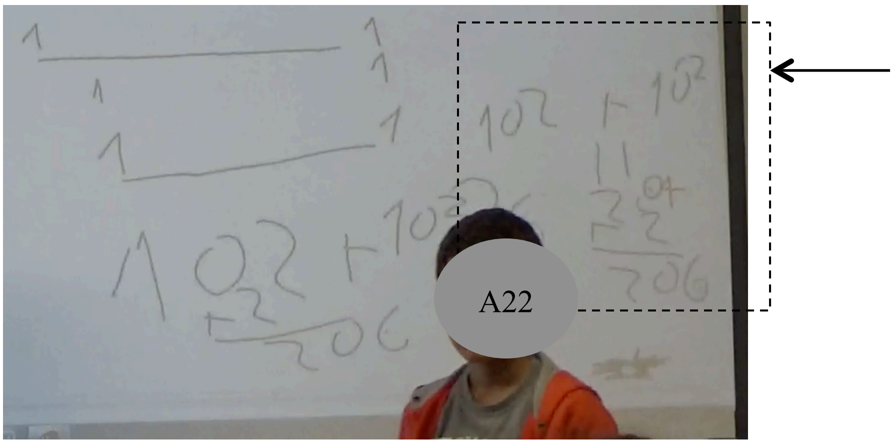
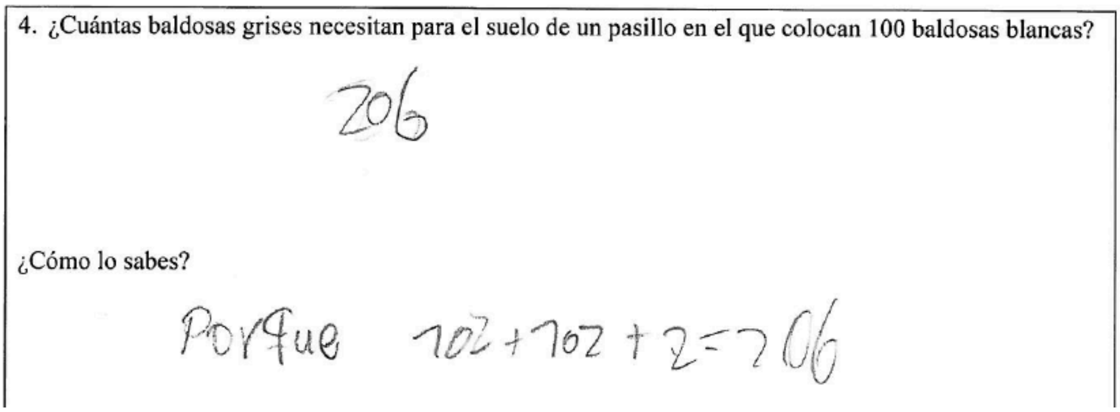


Figura 28. Expresión simbólico-numérico de A22

En la respuesta oral y escrita brindada por A22, es posible identificar el patrón que coincide con la respuesta que entregó al cuestionario. La figura 29 da cuenta del patrón empleado por este estudiante.


4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

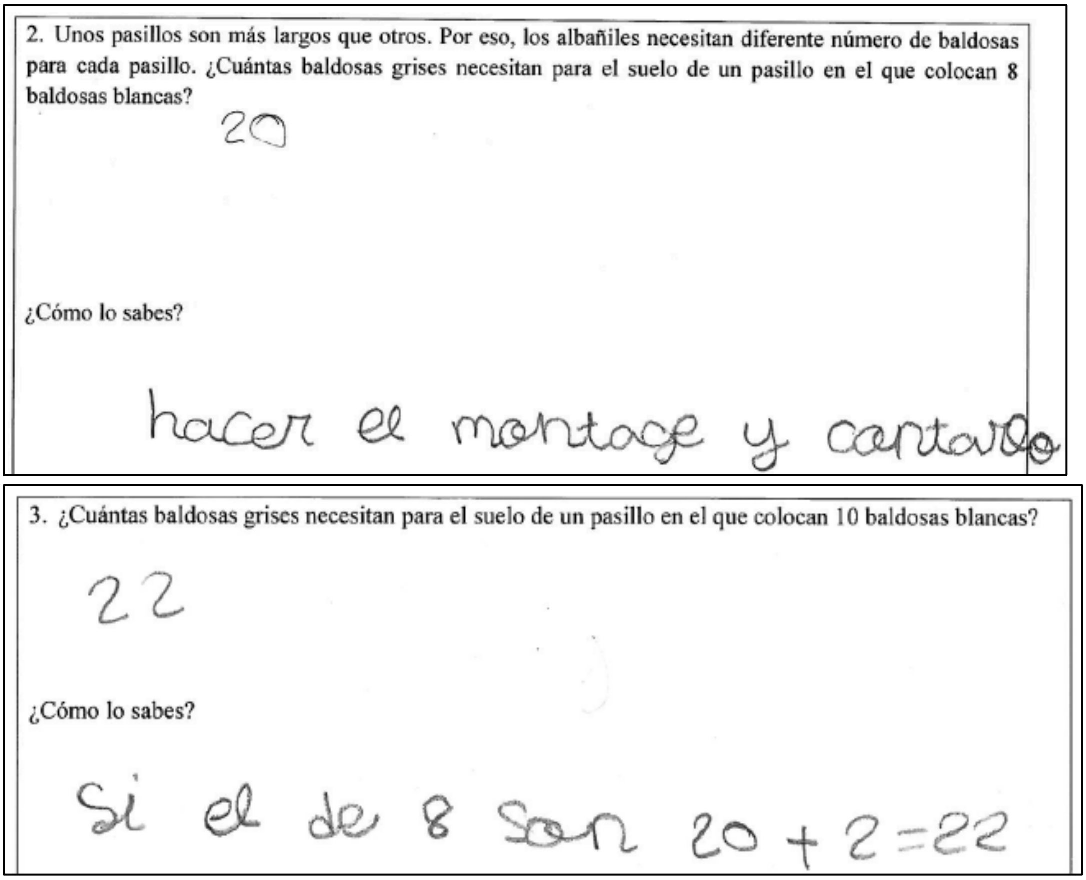
206

¿Cómo lo sabes?

Porque 102 + 102 + 2 = 206

Figura 29. Respuesta de A22 a C4.A

También encontramos ejemplos de relaciones de covariación. En la figura 30 presentamos un ejemplo de la respuesta de A3 a C2 y C3.


2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

20

¿Cómo lo sabes?

hacer el montage y cantarlo

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

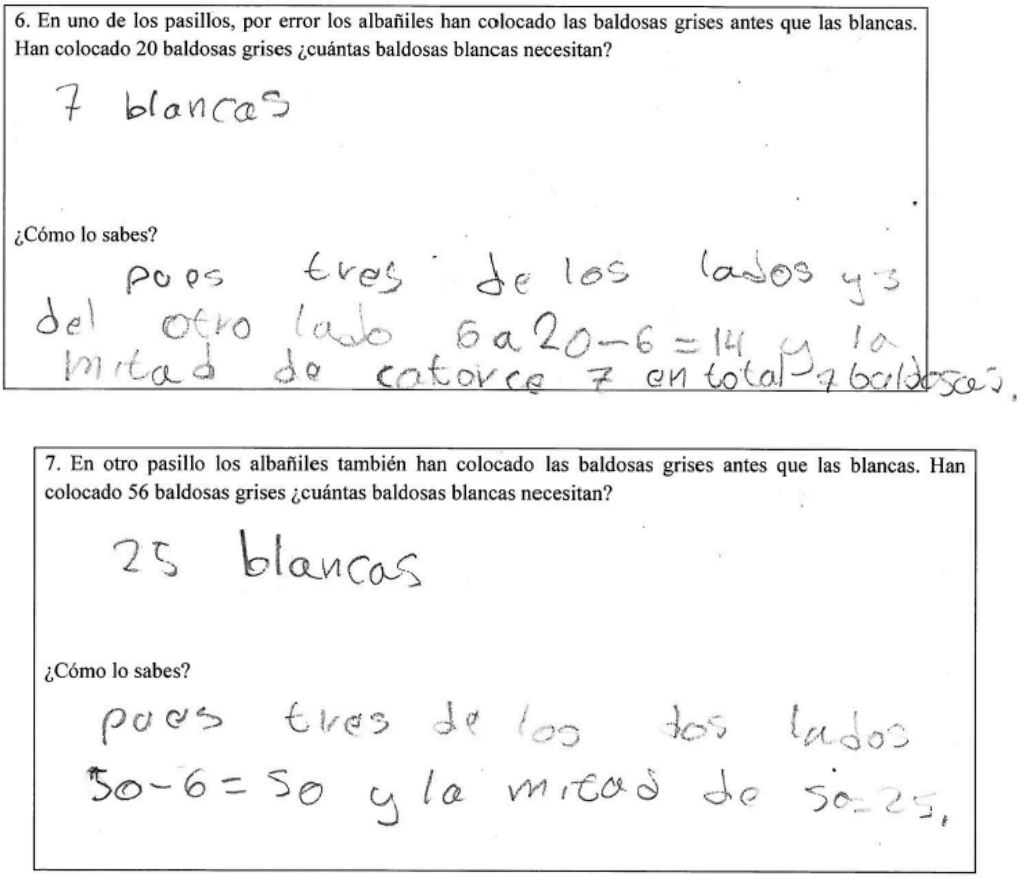
Si el de 8 son 20 + 2 = 22

Figura 30. Respuestas de A3 en C2 y C3

La estudiante A3 (ver figura 30) a pesar de entregar una respuesta errónea, al responder la tercera pregunta utiliza el resultado obtenido en la pregunta anterior, sobre la que construye un procedimiento (sumar 2) para llegar a la respuesta. En este caso, observamos que la estudiante se centra en la variación que hay en el número de baldosas blancas (entre 8 y 10, hay un aumento de dos baldosas blancas) para calcular el número de baldosas grises, para las que concluye que la variación también ha de ser de dos. Por tanto, puesto que se centra en cómo la variación entre dos valores de la variable independiente afecta a la variación que se produce entre dos valores de la variable dependiente, se trata de una relación de covariación.

La utilización con mayor frecuencia de la correspondencia, entendida como la relación entre los pares correspondientes de la variable (Smith, 2008), es posible relacionarla con las experiencias a las cuales los estudiantes se encuentran más habituados, como puede ser el trabajo con patrones numéricos y la obtención de regularidades. En este sentido, parece que, de forma natural (puesto que no lo han trabajado en clase), los estudiantes han superado la relación de recurrencia, que es la que se suele trabajar a través de patrones en educación infantil y primeros cursos de educación primaria y se considera la más básica; pasando a relaciones en las que aparecen implicadas valores de las dos variables: correspondencia y covariación. Tal como lo mencionábamos en el marco teórico, Blanton et al. (2015) realizan una investigación centrada en los niveles de sofisticación de pensamiento que pueden presentar los estudiantes durante la educación primaria, específicamente al momento de generalizar relaciones funcionales. En estos niveles, que tienen un carácter descriptivo, se evidencia que los estudiantes transitan por relaciones funcionales de recurrencia hasta llegar a la correspondencia y a la covariación.

En el caso de la función inversa, otro estudiante, A11, emplea una relación funcional de correspondencia en cada una de estas cuestiones, tal como se presenta en la figura 31.


6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

7 blancas

¿Cómo lo sabes?

pues tres de los lados y 3 del otro lado 6 a 20-6 = 14 y la mitad de catorce 7 en total 7 baldosas.

7. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

25 blancas

¿Cómo lo sabes?

pues tres de los dos lados 50-6 = 50 y la mitad de 50=25,

Figura 31. Respuestas de A11 a C6 y C7

En ambas respuestas de A11 se evidencia el patrón que permite determinar la cantidad total de baldosas blancas dadas las grises. Esta situación, descrita en la figura 31, es poco frecuente en las respuestas de los estudiantes, ya que de manera similar a lo que presenta Merino (2012) y Merino, Cañadas y Molina (2013), la mayoría de los estudiantes en este tipo de relaciones funcionales sigue trabajando y alude a la relación directa, así como también se evidencia la presencia de la estrategia de ensayo-error. Estos elementos dan cuenta, desde nuestra perspectiva, de la complejidad que supone enfrentar las funciones inversas en el enfoque funcional del álgebra escolar, lo que se relaciona con lo indicado por Warren y Cooper (2005).

Generalización

En el cuestionario empleado, la cuestión 5 busca que los estudiantes establezcan la relación general entre las variables, conocida la variable independiente. Una respuesta dada por A9, que consideramos una respuesta en la que evidencia generalización, es la siguiente “el número de baldosas blancas se suma dos veces y se le añaden 6”. En esta respuesta, que es la única que indica generalización correcta, es posible identificar, mediante un sistema de representación verbal, la relación existente entre la variable dependiente e independiente. Creemos que la existencia de una sola respuesta donde es posible evidenciar generalización se debe a las experiencias a las que son expuestos los estudiantes en sus aprendizajes matemáticos, los que están recién comenzando la educación formal.

Si bien solo encontramos un estudiante que realiza una generalización correcta a partir de la situación planteada, destacamos las respuestas que brindan dos estudiantes, en las cuales es posible identificar indicios de generalización.

Un primer estudiante que realiza un intento de generalización, pero incompleto, es A11. La figura 32 presenta la respuesta del estudiante.

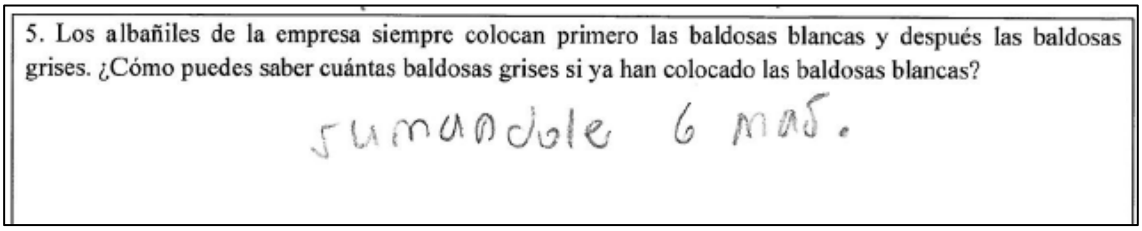
5. Los albañiles de la empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

Pues si son 50 baldosas
pues le sumo 50+50 y
luego los de los lados
3+3 en total 106.

Figura 32. Respuesta de A11 en C5

En esta respuesta es posible identificar que el alumno establece la relación del doble de baldosas blancas pero la sitúa en un caso particular. Este estudiante identifica correctamente el valor que se mantiene constante en la función: la cantidad de baldosas grises laterales.

Un segundo estudiante que presenta un intento de generalización, pero este es incompleto es A22. La figura 33 muestra la respuesta del alumno.


5. Los albañiles de la empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

sumandole 6 mas.

Figura 33. Respuesta de A22 en C5

En la respuesta brindada por A22 (ver figura 33) es posible identificar que el estudiante solo ha identificado, al igual que el estudiante anterior, la cantidad de baldosas grises que se mantiene constante. La diferencia con la respuesta anterior, es que en esta no hay información explícita asociada a la relación entre baldosas grises y blancas.

En síntesis, de los 11 estudiantes en los que es posible evidenciar pensamiento funcional, uno de ellos establece una generalización correcta y en los restantes 10 alumnos es posible identificar una generalización incorrecta. De este último grupo de alumnos, en dos respuestas es posible identificar un intento de generalización, pero este es incorrecto. Por otra parte, ocho estudiantes presentan una generalización completamente incorrecta.

Sistemas de representación

En la tabla 3 organizamos los resultados relativos a los sistemas de representación empleados por los estudiantes que manifiestan pensamiento funcional en cada una de las cuestiones.

Tabla 3. *Sistemas de representación empleados por los estudiantes en cada cuestión*

Alumnos	Cuestiones							
	C1	C2	C3	C4A	C4B	C5	C6	C7
A3	p	m	v; n	n	n	v	v	n
A5	n	n	n	n	-	-	-	-
A6	v	v	n	n	n	v	v	n
A9	p	n	n	n	v	v	v	v
A11	v	v; n	v	v; n	n	v; n	v; n	v; n
A12	v	v; n	n	n	v; n	v	-	-
A13	p	m	v	v	n	m	m	m
A14	p	v	v; n	n	n	v	v	v
A19	p; n	v	v; n	n	-	n	p	p
A22	n	n	n	n	v	v	n	n
A24	p	m	v; n	n	v; n	p	m	m

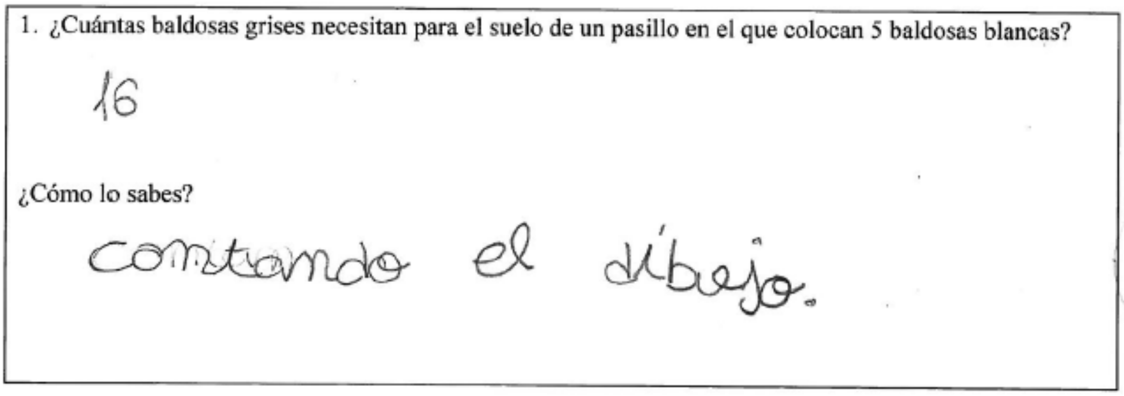
Nota. p = pictórico; n = simbólico-numérico; v = verbal; m = manipulativo.

En términos generales, la mayoría de los estudiantes emplean los sistemas de representación verbal y simbólico-numérico y, en menor medida, los sistemas de representación pictórico y manipulativo. Los alumnos no emplean el sistema de representación simbólico-algebraico en ningún caso.

Específicamente, del total de las respuestas analizadas en los cuestionarios, en 29 respuestas es posible identificar la presencia de un sistema de representación simbólico-numérico, mientras que en 23 respuestas es posible identificar un sistema de representación verbal. Hay ocho respuestas en donde es posible identificar un sistema de representación manipulativo y otras ocho respuestas con presencia pictórico.

Destacamos que dos estudiantes (A3 y A13) emplean cuatro sistemas de representación diferentes en sus respuestas a las cuestiones (manipulativo, pictórico, verbal y simbólico-numérico), presentándose un único sistema de representación por cuestión. Por otra parte, el promedio de diferentes sistemas de representación empleados por los estudiantes en las cuestiones es 3. Principalmente, estos estudiantes emplean los sistemas de representación verbal, pictórico y simbólico-numérico.

Sobre esta última idea, nos parece interesante destacar la manera en la cual los estudiantes emplean diferentes sistemas de representación a medida que responden las cuestiones. Por ejemplo, hay seis estudiantes que comienzan empleando un sistema de representación pictórico o manipulativo para las primeras cuestiones y luego emplean sistemas de representación verbal o numérico. En las figuras 34, 35 y 36 presentamos ejemplos de respuestas que se relacionan con lo que estamos describiendo.


1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

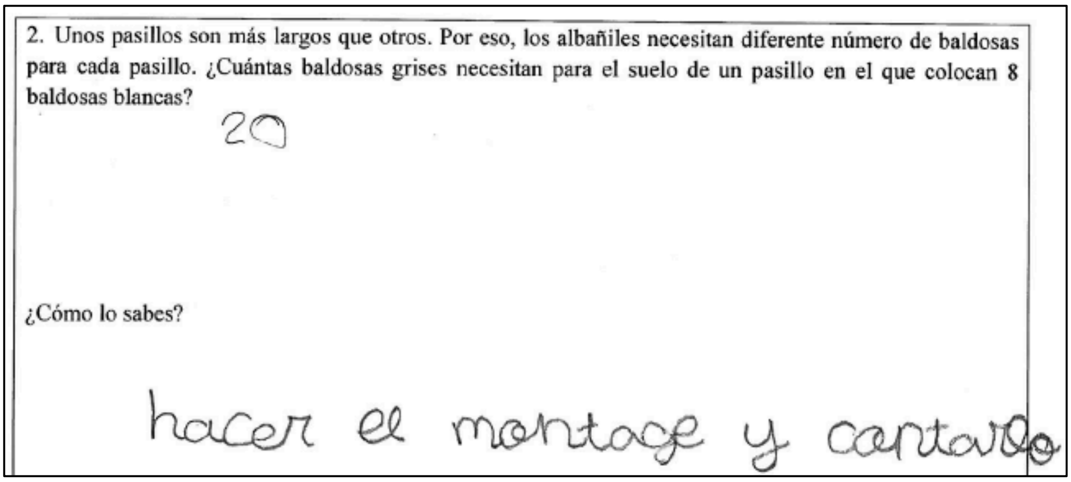
16

¿Cómo lo sabes?

contando el dibujo.

Figura 34. Respuesta de A3 a C1

En la figura 34, es posible identificar la manera en la cual el estudiante emplea el sistema de representación pictórico, proporcionado en el problema contextualizado, para obtener la respuesta a la situación. En esta situación, el estudiante realiza un conteo de las baldosas grises.


2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

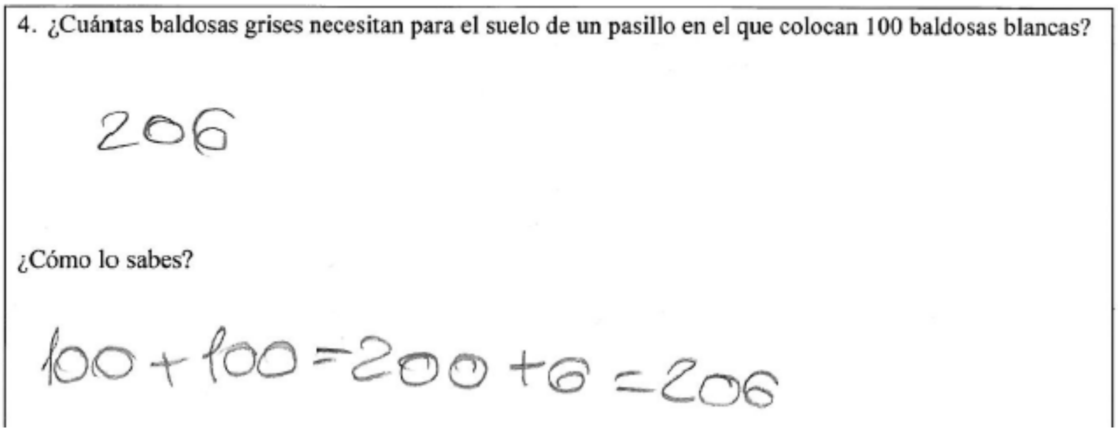
20

¿Cómo lo sabes?

hacer el montage y contarlo

Figura 35. Respuesta de A3 a C2

En la figura 35 identificamos el empleo de un sistema de representación manipulativo. En esta evidencia, el estudiante emplea el material manipulativo proporcionado por el equipo de investigación (baldosas de papel blancas y grises), para luego establecer mediante un conteo la cantidad de baldosas grises dada 8 baldosas blancas.


4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

206

¿Cómo lo sabes?

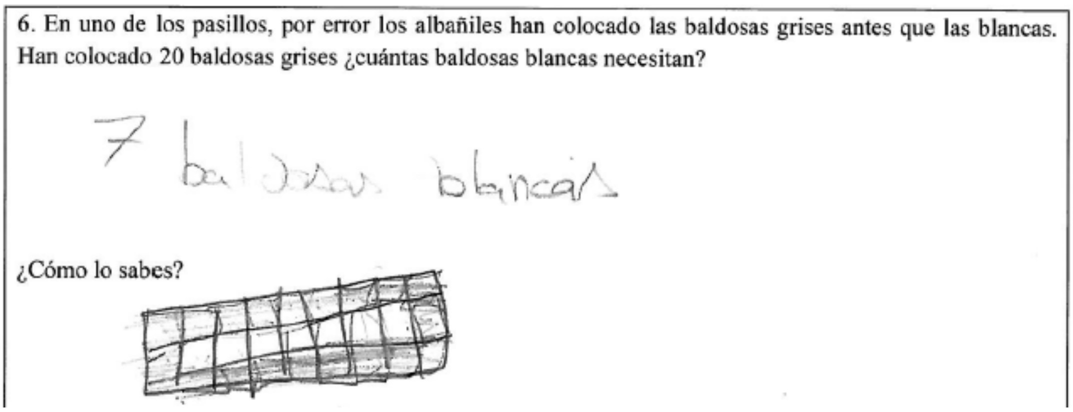
100 + 100 = 200 + 6 = 206

Figura 36. Respuesta de A3 en C4

En esta respuesta, de la figura 36, identificamos que el estudiante emplea un sistema de representación simbólico-numérico al determinar la cantidad de baldosas grises dada

100 blancas. Aquí, el alumno realiza una suma entre la cantidad de baldosas grises superiores (100) e inferiores (100), para luego sumar la cantidad de baldosas laterales (6). En total, la expresión simbólica-numérica permite al estudiante obtener la cantidad total de baldosas grises dada 100 baldosas blancas. Pareciera que este estudiante, luego de emplear sistemas de representación pictórico y manipulativo, ha encontrado el patrón numérico que le permite determinar la cantidad de baldosas grises.

Dentro del grupo de alumnos que comienzan empleando sistemas de representación manipulativo o pictórico para las primeras cuestiones, y luego emplean verbales o simbólicos-numérico, existen tres estudiantes que emplean sistemas de representación pictórico o manipulativo para las últimas cuestiones. La figura 37 muestra esta situación.


6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

7 baldosas blancas

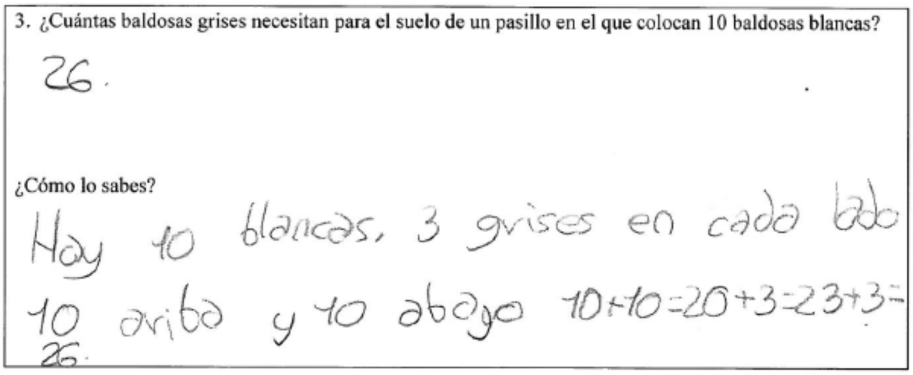
¿Cómo lo sabes?

Figura 37. Respuesta de A19 a C6

En la respuesta de la figura 37, el estudiante se apoya en un sistema de representación pictórico (dibuja las baldosas) para encontrar la respuesta a esta situación. Creemos que la dificultad que supone para los estudiantes la relación funcional inversa, como lo presentamos en la sección anterior, hace necesario, desde nuestra perspectiva, la utilización un sistema de representación pictórico o manipualativo al no encontrar un patrón o regla que permita determinar la cantidad total de baldosas blancas dada las grises.

Hay dos estudiantes (A5 y A22) que emplean el sistema de representación numérico-simbólico, principalmente. Por ejemplo A22, tal como lo presentamos en la sección de relaciones funcionales (ver figuras 23, 24, 25 y 29), emplea este sistema de representación en seis de las ocho cuestiones presentadas en el cuestionario. Creemos que esta situación se debe a la facilidad con la que algunos estudiantes han identificado un patrón y han determinado una relación entre las variables implicadas.

Otro elemento que destacamos hace relación a que en la respuestas de seis estudiantes (A3, A11, A12, A14, A19 y A24) hemos identificado dos sistemas de representación diferentes en los cuales se apoyan para establecer la relación funcional: representaciones múltiples. La figura 38 presenta la respuesta de A24 para la cuestión 3.


3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

26.

¿Cómo lo sabes?

Hay 10 blancas, 3 grises en cada lado 10 arriba y 10 abajo 10+10=20+3=23+3= 26.

Figura 38. Respuesta de A24 en C3

En la figura 38 se observa que ambos sistemas de representación aportan información y, aunque tienen significados independientes, se necesitan para dar respuesta completa a la cuestión. Según la revisión teórica realizada, se considera una representación múltiple. Siguiendo esta idea, pero bajo la combinación de sistema de representación pictórico y simbólico-numérico, A19 emplea conjuntamente estos dos sistemas de representación, donde es necesario analizarlos simultáneamente para que adquieran significado. Consideramos que en esta respuesta es posible identificar un representación múltiple y, además, sintética. La figura 39 evidencia este tipo de sistema de representación, donde mediante una disposición pictórica, A19 registra los números que representan la cantidad de baldosas superior, inferior, lateral-derecha y lateral-izquierdo para la cuestión 1.

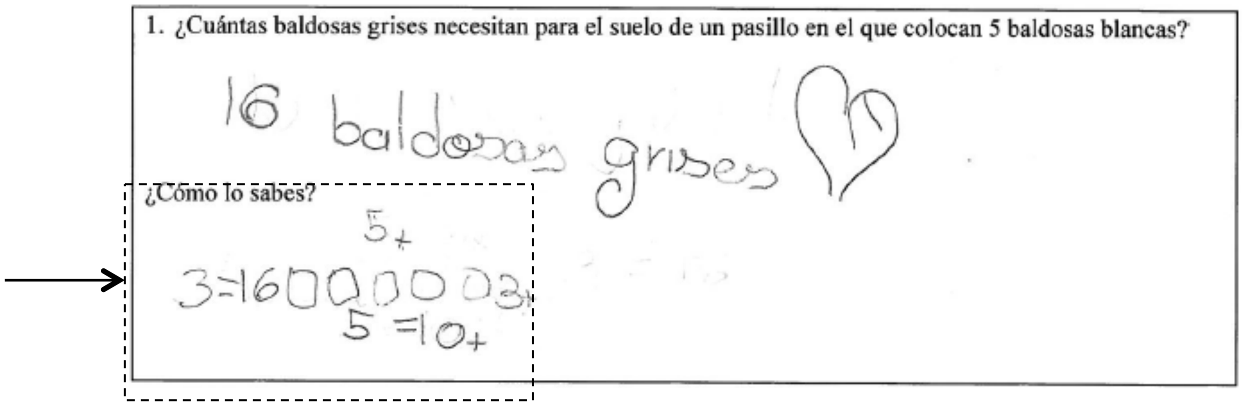


Figura 39. Respuesta de A19 a C1

Del mismo modo que la respuesta de A19 es considerada una representación múltiple y, además, sintética, encontramos la respuesta de A11, en la que frente a la cuestión 6, expresa: “pues tres de los lados y 3 del otro lados 6, a 20 – 6 = 14 y la mitad de catorce 7. En total 7 baldosas”. También se presentan los sistemas de representación simbólico-numérico y verbal pero cada uno de ellos no tiene significado por separado, considerándose como una representación múltiple y sintética.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

Estructuramos este último capítulo de la memoria, las conclusiones, en tres partes: (a) logro de los objetivos y principales aportes de la investigación; (b) limitaciones; y (c) principales líneas abiertas que deja el estudio.

Logro de objetivos y principales aportes

Las respuestas escritas que los estudiantes han planteado en el cuestionario, así como la información proveniente de la última sesión del experimento de enseñanza, nos permiten abordar los objetivos de investigación planteados. Por un lado, hemos identificado los estudiantes de tercero de educación primaria que ponen de manifiesto el pensamiento funcional a partir de un problema contextualizado. Entre estos alumnos, hemos descrito el tipo de relación funcional que utilizan, la presencia de generalización y describimos los sistemas de representación que emplean.

El primer objetivo general era "identificar estudiantes de tercer curso de primaria que manifiestan pensamiento funcional". Hemos identificado 11 estudiantes del curso descrito que manifiestan pensamiento funcional, por lo que consideramos que este objetivo está cumplido. Para dar respuesta a este objetivo, hemos aplicado un criterio para determinar cuándo un estudiante evidencia pensamiento funcional. Este criterio consiste en considerar que un estudiante evidencia pensamiento funcional cuando ponen de manifiesto, al menos, una relación funcional en, al menos dos cuestiones planteadas.

Este objetivo general trae consigo dos objetivos específicos, los que detallamos a continuación. El objetivo específico 1 era "describir las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes de tercero de primaria", podemos indicar que este se ha cumplido, ya que identificamos y describimos su presencia en cada una de las cuestiones. Las relaciones funcionales mostradas por los estudiantes permiten detectar los alumnos que manifiestan este tipo de pensamiento, así como la manera en la cual estos se enfrentan a problemas contextualizados que involucran funciones lineales. A partir de los resultados obtenidos, destacamos la manera en la cual adquiere predominancia la relación de correspondencia, y en menor medida, la covariación. Esta información se relaciona con los resultados de la investigación de Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez (en prensa), quienes destacan que en las relaciones funcionales que manifiestan estudiantes de primero de primaria al responder un cuestionario que implica un problema contextualizado, se pueden hallar dos relaciones funcionales diferentes.

En relación con nuestro segundo objetivo específico, "describir la generalización empleada por aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional", consideramos que también se ha cumplido. Si bien encontramos un estudiante que entregó una respuesta en donde fue posible identificar una generalización entre las variables presentadas en el problema y algunas evidencias que muestran generalizaciones incompletas por parte de otros estudiantes, consideramos que estos hallazgos dan cuenta que este tipo de problemas son posibles de realizar por estudiantes de tercer curso de primaria. Tal como lo plantean algunos autores, que los niños que se enfrentan a tareas que involucran generalización requieren de tiempo y experiencias significativas para trabajar sobre estos procesos, ya que no se una tarea simple (Castro, 2012; Dreyfus, 1991). A partir del elemento anterior, promover problemas de generalización en los estudiantes de los primeros cursos permite favorecer y potenciar la promoción de modos de pensamiento algebraico, tal como se evidencian en investigaciones a la luz del *early algebra* (eg., Blanton, 2008; Carraher y Schliemnan, 2014; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006, Molina, 2006).

Nuestro segundo objetivo general, "describir los sistemas de representación que utilizan estudiantes de tercero de educación primaria que manifiestan pensamiento funcional", nos llevó a identificar y presentar los sistemas de representación que emplearon los estudiantes a partir de su trabajo en el problema contextualizado. Proporcionamos resultados que dan cuenta del logro del objetivo, detallado en los objetivos específicos 3 y 4.

En el tercer objetivo específico, "identificar los sistemas de representación que emplean los estudiantes", hemos destacado la predominancia del sistema de representación simbólico-numérico, seguido del sistema de representación verbal, caracteriza a los estudiantes de tercero de primaria que evidencian pensamiento funcional a partir del problema presentado. Junto con esto, la presencia de otros sistemas de representación va cambiando según las exigencias que plantea cada cuestión. Consideramos que este objetivo está cumplido. A partir de esta investigación, concluimos que el material manipulativo entregado a los estudiantes parece no haber tenido un impacto significativo, ya que fueron pocos los estudiantes que lo emplearon. A partir de estos elementos, y comparando los resultados con los obtenidos por Yáñez (2015), quien emplea el mismo problema contextualizado en quinto de primaria, destacamos la diferencia existente entre la variedad de sistemas de representación empleados en tercer curso de primaria, ya que en quinto predomina el sistema de representación verbal y emerge el uso del sistema de representación simbólico-algebraico.

El último objetivo específico era "describir las representaciones múltiples que emplean los estudiantes", lo que se realizó analizando las respuestas escritas de los estudiantes. Hemos identificado y descrito representaciones múltiples que se presentaron en las respuestas de los estudiantes, apareciendo principalmente combinación de sistemas de representación verbal-simbólico-numérico, y en menor medida, pictórico-simbólico-numérico. Las evidencias provenientes de las respuestas de los estudiantes no permiten observar la presencia de más de tres sistemas de representación en una misma respuesta. Consideramos que este objetivo lo hemos cumplido. Por otra parte, la existencia drepresentaciones múltiples en algunas respuestas de los estudiantes, siguiendo las ideas de Confrey y Smith (1991), permiten analizar cómo dos diferentes sistemas se complementan entre sí y permiten tener una comprensión más profunda de la idea matemática que subyace al problema. A partir de esta idea, Thompson y Chappell (2007) indican que estos tipos de representaciones han recibido la atención de los profesores de matemática como una posibilidad de que su uso facilite el aprendizaje de esta disciplina, asociada a la comprensión. Destacamos el uso de representaciones múltiples (algunas sintéticas) por algunos estudiantes, ya que nos permite identificar las relaciones y conexiones que los estudiantes pueden construir a partir del contenido matemático que subyace a la actividad. Complementando este hallazgo, Merino (2012) y Merino, Cañadas y Molina (2013) destacan la presencia de representaciones múltiples en tres combinaciones posibles: (a) verbal-simbólico-numérico; (b) verbal-simbólico-algebraico; (c) verbal-pictórico.

En síntesis, consideramos que hemos cumplido la totalidad de objetivos propuestos. Por otra parte, destacamos que este estudio viene a complementar una serie de investigaciones que se centran el pensamiento funcional, tanto en el contexto internacional como en España (e.g., Blanton y Kaput ,2004; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Carraher y Schliemann, 2007, 2014; Morales y Cañadas, en prensa; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011; Warren y Cooper, 2005). En este último caso, el contexto español, se han desarrollado algunas recientes investigaciones a la luz del pensamiento funcional, centradas principalmente en los primeros y últimos cursos de la educación primaria. Destacamos que esta investigación, centrada en un curso intermedio de la educación primaria, nos permite tener una visión más global del cómo los estudiantes de tres ciclos diferentes de primaria se enfrentan a problemas contextualizados que pretenden favorecer y promover modos de pensamiento algebraico, específicamente el pensamiento funcional.

Limitaciones

Un primer aspecto a mencionar se relaciona con la estructura del trabajo de fin de máster. Tanto en la organización temporal como los recursos que componen este trabajo, consideramos que el análisis de los datos y los resultados presentados son factibles de profundizar y establecer más relaciones entre los elementos descritos en esta investigación. Así mismo, los instrumentos de recogida de información permiten cumplir con los objetivos planteados pero, en ocasiones estos no hacen posible entrar en toda la profundidad que se querría para analizar más en profundidad los conceptos y/o procedimientos que empleaban los estudiantes al resolver el problema presentado.

Por otro lado, las investigaciones sobre el pensamiento funcional, tanto en el contexto internacional como español, dan cuenta de resultados que permiten observar cómo se promueven estos modos de pensamiento. Aún así, la cantidad de estudios a la luz de este foco de investigación está creciendo paulatinamente. Esta limitación se evidenció, por ejemplo, al momento de establecer comparaciones de nuestros resultados con otras investigaciones en el nivel que nos encontramos.

Líneas abiertas

Destacamos una primera línea abierta que deja esta investigación, la cual se centra en establecer comparaciones entre elementos que se relacionan con el pensamiento funcional. Por ejemplo, se puede desarrollar una comparación entre investigaciones que: (a) consideren la misma tarea en estudiantes de edades diferentes; o (b) otra tarea con estudiantes de esta misma edad. Sobre el primer caso, Yáñez (2015) realiza una investigación centrada en quinto de primaria, dejando varios aspectos que se pueden comparar con los resultados que hemos dado cuenta. Destacamos que ambas investigaciones están concebidas en el mismo proyecto de investigación, las cuales emplean un marco teórico similar, un mismo instrumento de recogida de información y objetivos que se pueden relacionar, por ejemplo, los sistemas de representación empleados por los estudiantes.

Otro aspecto que nos parece importante considerar para futuras investigaciones tiene relación con la formación de profesores, centrado en el aprendizaje y enseñanza del álgebra escolar. Valoramos el aporte de la información empírica que da cuenta de la promoción de estos modos de pensamiento algebraico en estudiantes de educación primaria, pero creemos que hay un desafío para que los docentes posean un conjunto de herramientas que les permitan promover modos de pensamiento algebraico en los estudiante de educación primaria. Específicamente, una caracterización del pensamiento funcional en experiencias con estudiantes de diferentes cursos de primaria puede permitir establecer una propuesta de innovación en el aula.

Un tercer elemento que destacamos se relaciona con las respuestas que brindaron aquellos estudiantes que poseen altas capacidades. Consideramos que analizar las respuestas de estos estudiantes y las diferencias con respecto a estudiantes de rendimiento promedio del curso pueden entregar elementos interesantes de profundizar e investigar.

Un último aspecto a considerar para futuras investigaciones tiene relación con una reunión realizada con la maestra del curso meses después del terminado este estudio. En esta reunión, la maestra nos reconoció que los niños recordaban con cariño el trabajo que realizaron en esta investigación. Específicamente, destacó que en varias ocasiones los niños resolvieron problemas matemáticos como los habían trabajado con este equipo de investigación. Consideramos necesario indagar en el impacto que tuvo la experiencia sobre el conocimiento algebraico de los niños un tiempo después, quizá en comparación con otros que no hayan tenido experiencia con el pensamiento funcional previamente.

Finalmente, destacamos que estas líneas abiertas permiten establecer directrices para futuras investigaciones que comenzará a trabajar el autor de este trabajo, en el marco de su tesis doctoral.

REFERENCIAS

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2015). *Mathematics: Sequence of content F-6 strand: Number and algebra*. Sydney, Australia: Autor. Recuperado de http://www.acara.edu.au/verve/_resources/Mathematics__Sequence_of_content.pdf

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y graficas*. Madrid, España: Síntesis.

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 1-14. http://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1

Blanco, L. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de enseñanza general básica y estudiante para profesores.* Badajoz, España: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. y Dougherty, B. (Eds.) (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades student´s capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: PME.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558. http://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Brizuela, B. (2005). Relaciones entre representaciones. En M. Alvarado y B. Brizuela (Eds.), *Haciendo números: las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 198-220). México, DF: Paidós.

Brizuela, B. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates/NCTM.

Brizuela, B., Martinez, M. y Cayton-Hodges, G. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education*, (2), 209-241. http://doi.org/10.4471/redimat.2013.28

Brizuela, B., y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 309-319.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Cañadas, M. C. (2015). *Proyecto investigador*. Plaza de Profesor Titular de Universidad. Documento sin publicar. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Cañadas, M. C. (en prensa). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: un enfoque funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. y Oldenburg, R. (2012). CERME7 Working group 3: Algebraic thinking. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 189-190. http://doi.org/10.1080/14794802.2012.694284

Carpenter, T. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research report No. 00-2). Madison, WI: National Center for Improving student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2014). Early algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 193-196). Dordrecht, Países Bajos: Springer. Recuperado de http://link.springer.com/10.1007/978-94-007-4978-8

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22. http://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D., Schliemann, A. y Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 87-107). Madrid, España: Pirámide.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales: estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada, España: Comares.

Castro, E. (2002). La resolución de problemas desde la investigación en Educación Matemática. En D. Cardeñoso, E. Castro, A. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Resolución de problemas* (pp. 13-30). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada y SAEM THALES.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz, España: SEIEM.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Jaén, España: SEIEM.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Cobb, B. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovation in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. (1991). Learning to listen: A student's understanding of powers of ten. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publisher.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, *13*(1), 3-21.

Davis, R. (1995). Why are they changing school algebra and who´s doing it? *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 1-3.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-53). Dordrecht: Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publisher.

Dufour-Janvier, B., Berdnarz, N. y Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. En C. Janvier (Eds.), *Problems of representations in the teaching and learning of Mathematics* (pp.109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Trabajo presentado en el 21th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cuervana, México.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrechet, Países Bajos: Academic Publishers Group.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria. Un estudio exploratorio* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Glasersfeld, E. von. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning* (Reprinted). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegary, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Goldin, G. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5a ed). México, DF: McGraw-Hill.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 65-97). Reston, VA: NCTM.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. V. Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Kaput, J. (1995). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. En C. B. Lacampagne, W. Blair y J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (Vol. 1, pp. 33-49). Washington, DC: US Departament of Education.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fenema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures* (pp. 271-290). Sevilla, España: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: NCTM.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children´s understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres, Reino Unido: Murray.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The courrent state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *Proceedings of the*

12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra (pp. 47-70). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 69-85.

Martínez, M. V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Martínez, S., Varas, M., López, R., Ortiz, A. y Solar, H. (2013). *Álgebra para futuros profesores de educación básica*. Santiago, Chile: SM.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. Nueva York, NY: Routledge Falmer.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: Labor.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: Paul Chapman Publishing.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria (Vol. *BOE* Nº 52, pp. 19349-19420). Madrid, España: Autor.

Ministerio de Educación. (2013). Bases curriculares educación básica. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministry of Education. (2008). *Patterning and algebra, grades 4 to 6.* Toronto, Canadá: Autor.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador*. Plaza de Profesor Titular de Universidad. Documento sin publicar. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (en prensa). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. *Investigación en Educación Matemática XX.* Málaga, España: SEIEM.

Moreno, A., Cañadas, M. C., Jaldo, P. y Bautista, A. (en prensa). Functional topics in grade 5 students´comparisons of two linear functions. *13th International Congress on Mathematical Education.*

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Özgün-Koca, S. A. (1998). Student´s use of representations in Mathematics Education. Trabajo presentado en el Annual Meeting of he North American Chapter of the International Group for the Psuchology of Mathematics Education. Raleigh, NC.

Polya, G. (1981). *Como plantear y resolver problemas* (9ª Reimpresión). México, DF: Trillas.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proce-*

edings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la Investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *70*, 48-54.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1995). Report of working group 1. En C. B. LaCampagne (Ed.), *The Algebra Initiative Colloquium, Vol. 2: Working group papers* (pp. 11-18). Washington, DC: U.S. Departament of Education, OERI.

Schwartz, J. (1990). Getting students to function in and with algebra. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Soares, J., Blanton, M. L. y Kaput, J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching children mathematics*, *2*(5), 228-235.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164.

Thomas, G. B. (2006). *Cálculo. Una variable*. DF, México: Pearson Educación.

Thompson, D. R. y Chappell, M. F. (2007). Communication and representation as elements in mathematical literacy. *Reading & Writing Quarterly*, *23*(2), 179-196.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathema-*

tics education (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. y Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (7. ed.). Boston, MA: Pearson.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childood*, *6*(2), 150-162.

Weisstein, E. W. (1999). Arithmetic progression; closed-form solution; function; geometric sequence; generalized hy pergeometric function; sequence [Entrada electrónica]. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Recuperado de http://mathworld.wolfram.com

Wilkie, K. J. (en prensa). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 1-29. http://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x

Yáñez, J. (2015). *Pensamiento funcional puesto de manifiesto por alumnos de 5º de educación primaria* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

ANEXO A. CUESTIONARIOS DE LOS ESTUDIANTES

El siguiente enlace dirige a los cuestionarios de cada uno de los estudiantes.

https://www.dropbox.com/s/4ins3sp2ufaz1lw/Anexo%20A.%20Cuestionario%20de%20los%20estudiantes..pdf?dl=0

ANEXO B. TRANSCRIPCIÓN DE CÁMARA FIJA

El siguiente enlace dirige a la transcripción del vídeo proveniente de la cámara fija, la que grabó la clase completa.

https://www.dropbox.com/s/fv30ff9nb5vl561/Anexo%20B.%20Transcripci%C3%B3n%20c%C3%A1mara%20fija.pdf?dl=0

Anexo C. Transcripción de cámara móvil

El siguiente enlace dirige a las transcripciones del vídeo provenientes de la cámara móvil, la que grabó el trabajo individual de los estudiantes.

https://www.dropbox.com/s/mdsttuci9c1c8gh/Anexo%20C.pdf?dl=0