

Álgebra Escolar: Una Revisión Preliminar En Relación A Errores Y Dificultades

Nicolás Sánchez Acevedo, María del Valle Leo
nicolas1983@gmail.com, mdelvall@udec.cl
Universidad Academia Humanismo Cristiano, Universidad de Concepción

Resumen

Los años de educación formal reportan que la enseñanza y aprendizaje de la Matemática trae consigo muchas dificultades al ser tratadas. Se ha transformado en objeto de investigación explorar el origen de estos motivos por diversos investigadores, encontrándose que pueden ser de origen epistemológico, cognitivo y didáctico. No necesariamente todos de forma dependiente. El álgebra por su naturaleza simbólica es un área que reporta diversidad de dificultades provocando errores desde que los estudiantes inician la interacción con ésta. Las causas son múltiples, tratamiento inadecuado de los símbolos, generalización aritmético-algebraica, el álgebra como proceso de operacionalización, falta de comprensión por quien la enseña, uso inadecuado del lenguaje, ausencia en el desarrollo abstracto de estudiantes, etc. Tomando en cuenta estos múltiples aspectos es posible proponer estrategias que releven el uso de errores como instrumento estratégico del aprendizaje y no como un castigo evaluativo. Este trabajo se inscribe dentro de la línea de didáctica del álgebra. Se presenta una caracterización del pensamiento algebraico, el cual permite de alguna manera caracterizar dificultades y errores en el desarrollo de tareas en el nivel escolar y estudiantes para profesores. Finalmente se entregan algunas conclusiones y reflexiones futuras para enmarcar en el desarrollo profesional de profesores en ejercicio.

Palabras clave: pensamiento algebraico, errores y dificultades, tareas algebraicas

Introducción

La actividad matemática es uno de los ámbitos, que aunque suene trivial, es básico y necesario en la formación de todo ciudadano. Poder adquirir un conocimiento matemático útil y situado requiere del manejo de habilidades mínimas y necesarias, tanto conceptuales como procedimentales. Esto necesariamente constituye una herramienta en los ciudadanos para la solución de problemas y para el desarrollo de sus capacidades de razonamiento (Franchi, Bohórquez, Hernández y Medina, 2011). Con ello se hace necesario y justificable que los niños se inician en el estudio formal de esta disciplina desde los primeros cursos en su ciclo educativo.

La complejidad a la que se ve expuesta la matemática, dado su carácter, - muchas veces descontextualizado-, limita los procesos naturales y útiles que puede tener esta. Dichos obstáculos están insertos en el espacio aula, donde la interacción profesor estudiante muchas veces se ve limitada debido a la ausencia de elementos sociales, culturales, científicos, individuales, grupales, afectivos, contextuales, institucionales y/o económicos que hacen de la matemática una fusión compleja en dicho proceso (Sosa, Huitrado y Ribeiro, 2014). Esto fomenta, principalmente a que estudiantes, último eslabón del proceso, sean los principales afectados al aplicar procedimientos matemáticos erróneos en el desarrollo de tareas cotidianas.

Los programas de estudio, desde el nivel primario, incorporan en todos sus contenidos matemáticos una propuesta con origen en lo intuitivo informal como proceso de adquisición de conceptos. Esta idea se sigue con la relación símbolo-objeto-cantidad en niveles pre-básicos, que posteriormente se traducirá en un enfoque estructural, permitiendo que los estudiantes conceptualicen y visualicen dichas estructuras en su forma más general y abstracta.

El presente trabajo se enmarca dentro de un proyecto de investigación en la Academia de Humanismo Cristiano (Chile) que pretende en una primera parte recabar información de investigaciones sobre los errores en tareas algebraicas

que cometen estudiantes en el ciclo secundario y de profesores en formación y ejercicio como parte de una revisión bibliográfica. Se finaliza con algunas recomendaciones y proyecciones generales al respecto.

Hacia una caracterización de pensamiento algebraico

Los temas de álgebra en varios países comienzan a ser tratados desde los cursos de educación secundaria y con una incorporación un tanto abrupta. Pero desde que se han evidenciado las problemáticas que surgen en el aprendizaje del álgebra sin tener nociones previas se ha ido introduciendo, progresivamente, desde cursos primarios con el nombre de Pre-Álgebra o Early Álgebra. Esta asume una separación estricta entre la enseñanza de la aritmética que se supone previa y un fragmento de la concepción del álgebra como una aritmética generalizada (Molina, 2006).

En la actualidad diversos congresos, tanto a nivel latinoamericano como internacional han dedicado espacios y grupos de discusión que giran en torno al álgebra escolar, destacándose los Topic Study Group (TSG) del ICME (International Congress Mathematics Education). Para el año 2016, ya el TSG 10 tiene por objetivo la centrar sus esfuerzos las discusiones en torno al aprendizaje y enseñanza del álgebra (Teaching and Learning of early álgebra). Este se centrará en el nivel primario sobre pensamiento algebraico natural, características del pensamiento algebraico, desarrollo curricular y materiales en álgebra, prácticas docentes y cambio en diversas clases, diagnóstico y valoración del pensamiento algebraico en niños, donde se focaliza el trabajo de dificultades y de significados que se da al álgebra en etapa escolar.

Diversos autores han caracterizado el pensamiento algebraico en etapa escolar. Para Vergel (2014), este es como una forma particular de reflexionar matemáticamente [...], es decir, en tanto saber, es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. Por su parte Kieran (1996) lo interpreta como un acercamiento a situaciones cuantitativas que hace hincapié en los aspectos relacionales generales con herramientas que

no son necesariamente aspectos simbólicos, pero que en última instancia, puede ser utilizado como apoyo cognitivo para introducir y para sostener el discurso más tradicional del álgebra escolar.

Kieran señalaba (1989, p. 165), que “para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente”. Esta connotación se asume como una condición previa para iniciarse en la *manipulación* de representaciones simbólicas para producir otras equivalentes que sean más útiles para la resolución de los problemas.

Los procesos de razonamiento algebraico se comienzan a incluir desde niveles elementales de escolaridad, los que involucran el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que el álgebra simbólico-literal puede ser utilizada como herramienta, pero que no son exclusivos, ya que se puede estar involucrado en el álgebra sin usar ningún símbolo literal en absoluto (Kieran, 2004), esta visión propuesta se relaciona exclusivamente con la forma en que se concibe dicha disciplina.

Siguiendo la misma línea Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005) señalan que el pensamiento algebraico implica también: (i) Desarrollar un pensamiento relacional, (b) transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta, (c) desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos y de propiedades de estos objetos y sus operaciones.

En síntesis, una conceptualización del desarrollo del pensamiento algebraico implica comprender la naturaleza de los objetos mismos, sus relaciones, características y generalidades de manera que la transición aritmética álgebra no sea simplemente procedimental, sino que entendiendo aquellas estructuras implícitas con las que cuenta el álgebra, particularmente la escolar. Es en este sentido cuando la escuela, cobra su rol formador en dicho proceso, particularmente la imagen del docente, quien debe propiciar espacios de

interacción con este tipo de razonamiento, recibiendo retroalimentaciones que permitan producir nuevos significados (Papini, 2003).

Errores y dificultades en el álgebra escolar

Las características del álgebra en sí misma entrega y aporta diversos focos para ser analizada. Algunas de estas investigaciones se centran en las dificultades de la transición aritmética-álgebra, el análisis de errores y dificultades en este proceso, la incorporación del álgebra en el currículo y el lenguaje (verbal y escrito) del álgebra (Socas, 2011).

Una de las características más comunes que se ha reportado y que ha tenido como consecuencia variados problemas y dificultades en estudiantes y profesores es la posición estática de álgebra como una simple extensión de la aritmética o aritmética generalizada. Además no se da la relevancia debida a las argumentaciones y justificaciones de los procesos operatorios que subyacen al pensamiento algebraico (Butto y Rojano, 2010).

Esta visión del álgebra y su aprendizaje trae consigo que las estrategias de enseñanza consideren estructuras limitadas de significado. Es decir, “se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como por ejemplo el geométrico” (Butto y Rojano, 2010, p. 56).

Del mismo modo Kieran y Filloy (1989) en un trabajo clásico, reportan resultados sobre dificultades y errores que cometen estudiantes. Dicho trabajo discute principalmente un enfoque aritmético de referencia, centrándose en el trabajo sobre variables, expresiones, ecuaciones y resolución de ecuaciones. Para el caso de este marco aritmético se reporta que los estudiantes presentan dificultades al ver la operatoria algebraica como operatoria aritmética. Se identifican: (i) la forma de ver el signo igual, (b) dificultades en la notación algebraica y, (c) su falta de habilidad para expresar métodos y procedimientos para resolver problemas (p. 230).

Kieran (2006), en el PME (Psychological Mathematics education) del mismo año, entrega un reporte que da cuenta de los trabajos que se han llevado a cabo por investigadores en este grupo, con el objetivo de caracterizar aquellos cambios que se han ido suscitando sobre pensamiento algebraico y el rol del simbolismo algebraico, destacándose a partir de estos trabajos tres grandes focos:

- Transición de la Aritmética al Álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones, y planteamiento y resolución de problemas verbales de álgebra.
- Uso de herramientas tecnológicas, representaciones múltiples y proceso de generalización.
- El pensamiento algebraico en los estudiantes de la escuela elemental, la enseñanza aprendizaje del Álgebra y la modelización dinámica de situaciones físicas y en entornos algebraicos.

Investigaciones más actuales como por ejemplo Sosa, Huitrado y Ribeiro (2014) y Sosa, Huitrado, Hernández, Borjon y Ribeiro (2013) realizan trabajos que buscan discutir y reflexionar sobre la forma del pensamiento algebraico y cómo los estudiantes utilizan sus errores para construir sobre la práctica y su rol en el proceso aprendizaje. Ello, con el fin de que puedan, en su propio proceso analizar errores en tareas algebraicas y la influencia en su aprendizaje.

De la misma forma Castillo (2011) realiza una investigación en estudiantes de enseñanza media para determinar los errores en el manejo de simbología que pueden ser vistos como obstáculos en la resolución de problemas. Toma como base teórica, la teoría de situaciones didácticas (Guy Brousseau). Algunos de los resultados encontrados es la presencia de obstáculos habituales en el tratamiento algebraico, como traducción de lenguaje simbólico a coloquial, generalización o de operaciones inversas en ecuaciones.

Considerando la aproximación de Vigotsky de la zona de desarrollo próximo, Sánchez (2014) desarrolla un trabajo descriptivo en el nivel medio en la resolución

de ecuaciones de primer grado. Considera en primera instancia los errores cometidos por una estudiante en una prueba estándar. Los errores cometidos por la estudiante se toman como base para trabajar metodológicamente en base a la estructuración conceptual y axiomática al resolver ecuaciones. Los modos de pensamiento algebraico de la estudiante eran limitados, dada la concepción operatoria y no estructural sobre las ecuaciones.

Noss, Poulouvasilis, Geraniou, Gutierrez-Santos, Hoyles, Kahn, Magoulas y Mavrikis (2011) desarrollan un trabajo en el que se implementa un diseño a estudiantes de entre 12 a 14 años de edad en el aprendizaje de la generalización algebraica. Ellos presentan elementos necesarios para su comprensión de la generalización. Estos autores proponen que el álgebra tiene dos facetas, las que dependen de los estudiantes y cómo ellos la visualicen:

- La primera, hace mención a una metodología que potencia el pensamiento de lo desconocido. Realizando generalizaciones y probar conjeturas y
- La segunda, es la faceta que atiende al área operacional y del cálculo. Practicar y entender las reglas de transformación de expresiones algebraicas.

En esta misma línea, Radford (2010, 2006) desde una perspectiva epistemológica y semiótica desarrollando un trabajo asociado a la generalización de patrones, proponiendo que no todas las generalizaciones son algebraicas. En este estudio se considera una investigación anterior, que analiza la transición del aritmética al álgebra. Radford (2010) propone que el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexión matemática, pero se pregunta, “what is it that makes algebraic thinking distinctive?” (p. 39).

Bagni (2000), realiza un estudio con el objetivo de analizar errores comunes en estudiantes de entre 16 a 19 años de edad, en relación a algunas aplicaciones lineales y solución de ecuaciones algebraicas. Varios autores han reportado la incorporación de problemas en aplicaciones lineales en tareas algebraicas (Engler,

Gregorini, Muller, Vrancken y Hecklein, 2004; Escudero 2007; Higa, Bumalen y Tarifa, 2010; Socas, 1997; Socas y Palarea, 1997; Palarea, 1998; Castellanos y Obando, 2009).

Algunas de estas aplicaciones lineales usuales son:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3$
$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt[3]{a \pm b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$
$\sin(a \pm b) = \sin(a) \pm \sin(b)$	$\cos(a \pm b) = \cos(a) \pm \cos(b)$
$\log_e(a + b) = \log_e(a) + \log_e(b)$...

Por su parte, Duval (1993, citado en Bagni) plantea que la visualización puede ser una herramienta importante a considerar. Así mismo considera que los objetos matemáticos, en general, no son de fácil acceso a la percepción de las personas, menos de los estudiantes, considerando que las representaciones semióticas de una objeto matemático son realmente necesarias.

Otro de los problemas que se asocia a la capacidad del pensamiento algebraico, son los problemas de enunciado verbal. Estos “permite conectar situaciones en el mundo real con las abstracciones propias de las matemáticas, dándoles sentido y haciendo útil este conocimiento” (Gómez-Ferragud, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2014, p. 1240).

Dificultades que enfrentan profesores en formación

Al centrarnos en el profesor como agente para promover el aprendizaje, fomentar el conocimiento e implementar actividades para que los estudiantes incorporen este nuevo lenguaje de representación, este debe poseer un conocimiento, tanto del contenido como de su didáctica. Es el profesor el eje articulador y

especializado, encargado en promover una actitud de aprendizaje y conocimiento en estudiantes.

Se presentan algunas investigaciones centradas en profesores, en las que se han reportado algunas de sus dificultades en el desarrollo de tareas algebraicas. Algunas se han llevado a cabo en programas de formación de profesores y otras en profesores en ejercicio.

En la formación de profesores Martínez y Hernández (2011) realizan una investigación de profesores en formación secundaria. Ellos consideran la clasificación que hace Matz (1982) para clasificar los errores en el desarrollo de tareas algebraicas: (a) errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación, (b) errores que reflejan un conocimiento básico pobre, aunque correcto y, (c) errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento. Concluyen que las dificultades radican al operar algebraicamente, principalmente por el uso de reglas. Estas las recuerdan textualmente y al extrapolarlas a diversos ejercicios similares cometen errores.

La investigación realizada por Aké (2013), toma como marco de referencia “*enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*” (Godino, Batanero y Font, 2009). Construye y aplica un cuestionario que evalúo algunas características parciales de conocimientos sobre razonamiento algebraico en una muestra de 40 profesores de educación primaria. En general, los resultados reportados dan cuenta de las dificultades de los profesores que sugieren la falta de familiarización de los procesos y desarrollo de ideas algebraicas. Algunas de estas dificultades que manifiestan los profesores en formación, son las que se enseñan con posterioridad en estudiantes, al no contar, el profesor, con un conocimiento global y entendido de la disciplina algebraica.

Tratando de profundizar en el conocimiento de profesores, se analiza una experiencia formativa en el nivel primario. Esta centró su objetivo en el desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos de los diferentes niveles de algebraización. Se usó como marco metodológico de referencia la Ingeniería

Didáctica que deriva de la teoría de situaciones didácticas Brousseau (1997). Se encontró evidencia de las complicaciones al reconocer objetos algebraicos y asignar niveles de desarrollo algebraico. (Aké, Godino, Fernández y Gonzato, 2014).

En esta misma línea Van de Kieboom, Magiera y Moyer (2013) exploran la relación del pensamiento algebraico de futuros profesores y aquellas preguntas que plantean a estudiante secundarios para ver qué tipo de pensamiento algebraico poseen. Estos autores evaluaron la competencia de futuros profesores considerando el desarrollo de 125 tareas de tipo algebraica y las características que estas tenían. Dentro de los resultados obtenidos se constató que los profesores más novatos no elaboraron “algebraic tasks”. Por el contrario, aquellos profesores con mayor experiencia en pensamiento algebraico plantearon preguntas de sondeo para indagar sobre el nivel de pensamiento algebraico de estudiantes, lo que deja entrever la importancia en el desarrollo de secuencias de aprendizaje la consideración de los conocimientos previos de los estudiantes.

Hurtado y Torres (2013) presentan una investigación que busca indagar sobre los conocimientos didácticos de un profesor secundario para diseñar unidades en torno a las ecuaciones de primer grado y aquellos conocimientos curriculares y didácticos necesarios para analizar la unidad diseñada. El enfoque de análisis utilizado es el que lleva a cabo el grupo PNA de la Universidad de Granada, que propone una secuencia para planificar diseñar, implementar y evaluar dichas unidades (Rico y Segovia, 2001). Dentro de los resultados obtenidos se consideran dos perspectivas:

- i) la histórica que da cuenta de cómo el referente geométrico aritmético permite dotar de campo semántico el sistema de símbolos,
- ii) desde un enfoque fenomenológico, que reconoce la importancias fundamental de identificar los fenómenos para los cuales las ecuaciones de primer grado son:

La importancia de definir y enmarcar algunas investigaciones actuales sobre el nivel de pensamiento algebraico en futuros profesores radica principalmente que los modelos mentales algebraicos. La forma de concebir esta rama repercute directamente en el aprendizaje de los estudiantes en etapa escolar. Las estructuras de enseñanzas, los discursos predominantes, los marcos de conocimiento del profesor, los diversos recursos por ejemplo semióticos utilizados en aula, son a veces factores que inciden en cómo se internaliza el álgebra y su comprensión. Esta merece ser considerada en su complejidad simbólica e interpretativa.

Proyecciones

La importancia que se desprende de los resultados de las investigaciones presentadas radica en el abanico de marcos y metodologías con las que se ha estado trabajando para detectar las causas de errores y dificultades en estudiantes y profesores en formación y ejercicio. Esto nos permite tener un estado actual de los conocimientos que se están poniendo en juego y las actividades que potencian mayormente una comprensión del álgebra. En nuestro caso particular esta revisión nos entrega las directrices para centrar la atención en cómo el profesor conoce de estas dificultades y las utiliza como medios de aprendizaje en el nivel secundario. Esto forma parte de una segunda etapa del proyecto de investigación centrado en el profesor como objeto de estudio. Particularmente en su conocimiento especializado adoptando como marco referencial del MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge). Y posteriormente situarnos en el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que indaga sobre las características del proceso de la comprensión de distintos contenidos (algebraicos), de su lenguaje, así como de los errores, dificultades y obstáculos en el desarrollo de tareas algebraicas.

Referencias Bibliográficas

- Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Tesis doctoral publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Aké, L., Godino, J., Fernández, T., y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(5).
- Bagni, G. (2000). Simple Rules and General Rules in Some High School Students' Mistakes. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(2), 124-138.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des Mathématiques: 1970-1990*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3), 55-86.
- Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., y Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, 37(1), 53-59.
- Castellanos, M. y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.
- Castillo, Y. (2011). *Representaciones simbólicas: un obstáculo para la solución de problemas algebraicos*. Tesis de Magíster no publicada. Facultad de Humanidades y educación. Universidad de Zulia. Venezuela.

- Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee, *Annales de Didactique el de Sciences Cogllilives*, 5, IREM, Strasbourg.
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, (23), 23-29.
- Escudero, R. (2007). Uso de los errores matemáticos como dispositivo didáctico para generar aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden. *Zona Próxima*, (8).
- Franchi, L., Bohórquez, H., Hernández, A., y Medina, N. (2012). Actitud del estudiante de ingeniería hacia sus errores en el aprendizaje de la matemática. *Telos*, 13(3), 371-396.
- Gómez-Ferragud, B., Solaz-Portolés, J., y Sanjosé, V. (2014). Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: dos estudios con estudiantes de secundaria y profesores en formación. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1239-1261.
- Higa, M., Bumalen, L., y Tarifa, G. (2009). Los errores: ¿se emplean en la construcción del conocimiento matemático en el nivel medio? En I. Zapico & S. Tajeyan (Eds.) *Acta de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática*. (pp. 9-17).
- Hurtado, C. y Torres, L. (2015). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*. Recife, Brasil: Recuperado 10 de Julio de 2015. Recuperado de http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/538/245
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wanger and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of*

- algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.
- Martínez, A., y Hernández, M. (2011). Errores algebraicos que cometen los profesores en formación. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*. Recife, Brasil: Recuperado 25 de Junio de 2015. Disponible en <http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XIIICIAEM/artigos/2245.pdf>
- Matz, M. (1982). Towards computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*.3 (1), 93-166.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
- Noss, R., Poulouvasilis, A., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., Hoyles, C., Kahn, K., Magoulas, G. D., y Mavrikis, M. (2011). The design of a system to support exploratory learning of algebraic generalization. *En: Computers & Education*. Vol. 59, Issue 1, pp. 63-81.
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis

doctoral no publicada, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Tenerife.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 6(1), 41-72.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford & B. D'Amore), pp. 267-299.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Rico, L., y Segovia, I. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En *Acta: Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Vol. XVIII.* (pp. 196 - 203).

Socas, M. y Palarea, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (16), 91-98.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE- Horsori.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. *Números*, (77), 5-34.

Sosa, L., Huitrado, J., y Ribeiro, C. (2014). Os erros “comuns” dos alunos como eixo detonador para uma reflexão sobre a prática do professor de matemática. Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014). *Atas do XXV Seminário de Investigaçao em Educacao Matemática*. Braga: APM., pp. 217–227. Disponible en: http://www.apm.pt/encontro/profmat_2014_siem.php?id=211764

Sosa, L., Huitrado, L., Hernández, J., Borjón, E., y Ribeiro, M. (2013). Uma oportunidade para o professor aprender analisando os erros dos alunos—Un exemplo de Álgebra. *atas XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013)*, Lisboa: APM. Disponible en: http://www.apm.pt/files/_sosa_et_al_uma_oportunidade_texto_completo_51f13d2d272b0.pdf

Van den Kieboom, L., Magiera, M., y Moyer, J. (2014). Exploring the relationship between K-8 prospective teachers' algebraic thinking proficiency and the questions they pose during diagnostic algebraic thinking interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education* 17(5), 429-461.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.