

RELACIONES FUNCIONALES IDENTIFICADAS POR ESTUDIANTES DE PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FUNCIONES LINEALES

Functional relationships identified by first graders and problem solving strategies in problems that involve linear functions

Morales, R.^a, Cañadas, M. C.^a, Brizuela, B. M.^b y Gómez, P.^c

^aUniversidad de Granada, ^bTufts University, ^cUniversidad de los Andes

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación que aborda el pensamiento funcional en alumnos de primaria en España. En el contexto de un experimento de enseñanza, implementamos dos sesiones de clase dirigidas a un grupo de 30 alumnos de primero de educación primaria (6 años) en las que ellos abordaron un problema que involucra una relación funcional lineal que busca promover dicho pensamiento. Al analizar las producciones escritas de los alumnos y las transcripciones de las sesiones, proporcionamos evidencias de pensamiento funcional y establecimos las estrategias que emplean los alumnos para resolver las diferentes cuestiones que constituyen el problema. Destacamos que la mayoría de los alumnos establecen relaciones entre variables.

Palabras clave: *early algebra, estrategias de resolución de problemas, pensamiento algebraico, pensamiento funcional.*

Abstract

This work is part of a wider research project that investigates Spanish elementary students' functional thinking. In the context of a teaching experiment, we implemented two sessions with a group of 30 first graders (6 years of age). They worked on a problem that involves a linear functional relationship that tries to promote such thinking. Analysing the students' written productions and the sessions transcriptions, we provide evidence of functional thinking and we establish students' strategies to answer the different questions that constitute the problem. We highlight that most of the students identify correspondence relationships using computational strategies.

Keywords: *algebraic thinking, early algebra, functional thinking, problem solving strategies.*

La investigación en *early algebra* ha puesto de manifiesto que los alumnos de educación primaria son capaces de trabajar con tareas que involucran elementos algebraicos y que su introducción en este nivel educativo es adecuada y beneficiosa (p. ej., Blanton y Kaput, 2004; Brizuela y Martínez, 2012; Kaput, 1998). En ocasiones, se trata de mantener contenidos curriculares existentes, y otorgarles un carácter más algebraico (Carraher, Shliemann, Brizuela y Earnest, 2006).

El pensamiento funcional es uno de los enfoques del álgebra escolar adoptado en educación primaria e implica centrarse en las relaciones entre dos cantidades que covarían. Se pretende que los alumnos puedan enfocarse en habilidades vinculadas a razonar sobre las relaciones entre cantidades que covarían, identificar patrones que subyacen de las relaciones, representar las relaciones, realizar procesos de generalización y justificar esos procesos (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Diversas razones justifican el interés por la introducción del pensamiento funcional en educación primaria: puede ayudar a superar dificultades en la comprensión del concepto de función en educación secundaria (Doorman y Drijvers, 2011); fomenta la capacidad para representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens 2015; Kaput, 1998); es una herramienta para la resolución de problemas (Warren y Cooper, 2005); y es una meta disciplinar en Educación Matemática (Rico, 2006). Estas razones justifican la incorporación de las relaciones funcionales en los currículos de educación primaria en países como Australia, Canadá, Chile, China, Corea, España, Estados Unidos, Japón y Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013; MECD, 2014; MINEDUC, 2012). En este trabajo nos centramos en el pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria (6 años) en el contexto español.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Una visión amplia del álgebra escolar incluye el estudio de relaciones funcionales, patrones, generalización y relaciones numéricas, desarrollo y manipulación del simbolismo algebraico y de otros sistemas de representación (Kaput, 1998; Schliemann et al., 2003). El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico. Se centra en las relaciones entre dos (o más) cantidades variables, enfatiza los procesos de generalización de esas relaciones (Smith, 2008), e implica pensar sobre funciones (Rico, 2006).

Smith (2008), con base en el trabajo de Confrey y Smith (1991) proponen tres tipos de relaciones que permiten dar cuenta del pensamiento funcional: (a) recurrencia, (b) correspondencia y (c) covariación. La recurrencia es la más elemental y se centra en aquel patrón que permite identificar un valor o varios valores de una variable dentro de la secuencia de valores de una de las variables, dejando implícita la secuencia de valores de la otra variable (Blanton y Kaput, 2005). La correspondencia se establece entre pares de las variables involucradas ($a, f(a)$) (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). La relación de covariación implica identificar cómo cambian las cantidades de ambas variables de forma simultánea y coordinada (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2005).

La investigación sobre el pensamiento funcional en alumnos de primeros cursos de educación primaria es escasa, encontrándose en un estado incipiente de desarrollo. Blanton et al. (2015) estudian el pensamiento funcional en alumnos de primero (6-7 años) y detectan diferentes tipos de relaciones funcionales. Estos autores identifican ocho niveles de pensamiento funcional, comenzando por un nivel pre-estructural, en el que los alumnos solo describen una regularidad en términos no matemáticos; pasan por relaciones de recurrencia, correspondencia y covariación; y llegan a manejar la función como objeto. Es en este último nivel en el que los alumnos perciben la generalidad de la relación entre las variables. Desde el punto de vista de las estrategias que emplean alumnos de estas edades en la resolución de problemas de relaciones funcionales, Blanton y Kaput (2004) describen el trabajo de los estudiantes en términos de patrones entre variables y las relaciones aditivas como el conteo de tres en tres y relaciones multiplicativas como el doble y el triple. Cañadas, Brizuela y Blanton (2016) describen las relaciones de covariación que identifican alumnos de 6 y 7 años. Estas autoras muestran cómo la estrategia empleada permite a los alumnos estar más vinculados al contexto extra-matemático (conteo de dos en dos) o al contexto intra-matemático (añadir un número a sí mismo) del problema. Cañadas y Fuentes (2015) identifican que los alumnos de primero de educación primaria emplean estrategias como conteo sobre dibujos; respuesta directa, donde no dan explicaciones a su respuesta; y creación de grupos de n elementos para abordar problemas que involucran la estructura multiplicativa del tipo $f(x)=nx$. Esto supone un avance hacia la estructura multiplicativa que está implicada en el problema. Con nuestro trabajo pretendemos encontrar evidencias del pensamiento funcional de los estudiantes de primero de educación primaria y complementar los resultados existentes sobre las relaciones funcionales que identifican estos estudiantes y las estrategias de resolución de problemas que emplean.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Los objetivos de investigación de este trabajo son los siguientes.

- Identificar si los estudiantes de primero de educación primaria evidencian pensamiento funcional cuando resuelven problemas que involucran relaciones funcionales, describiendo dichas relaciones.
- Identificar y describir las estrategias que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas que involucran funciones.
- Establecer la relación entre las relaciones funcionales que identifican estos estudiantes y las estrategias que emplean.

MÉTODO

En el método, describimos los sujetos participantes en la investigación, el experimento de enseñanza diseñado que nos permitió abordar los objetivos propuestos, los instrumentos y procedimientos de recolección de información, y cómo llevamos a cabo el análisis de datos.

Sujetos

Los sujetos participantes en esta investigación fueron 30 alumnos de primero de educación primaria (6 años) de un centro escolar privado de Granada (España). La selección de la muestra fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad del centro. Antes de la recolección de información, los alumnos presentaban los siguientes conocimientos previos: contar hasta cien, contar de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez, y operar con la adición y sustracción con números de una y dos cifras.

Experimento de enseñanza

Diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) que contempló cinco sesiones de clase de unos noventa minutos cada una, aproximadamente en la mitad del curso académico. Cada sesión tuvo cuatro partes. En la primera, la profesora-investigadora introducía el problema. En la segunda, los alumnos trabajaban en gran grupo (puesta en común) sobre casos particulares relativos al problema. En la tercera, los alumnos trabajaban individualmente en unas fichas de trabajo. El equipo de investigación (profesora-investigadora e investigadora de apoyo) resolvía dudas sobre la realización del trabajo de los alumnos y les ayudaba cuando no sabían escribir algo que pensaban. En la cuarta parte, nuevamente se trabajaba en gran grupo sobre el trabajo realizado en las fichas. Un tercer investigador estuvo encargado de las grabaciones en video y de registrar notas significativas para la investigación.

Instrumentos y procedimientos de recogida de información

En este trabajo, nos centramos en las sesiones 4 y 5 del experimento de enseñanza. La selección se realizó por trabajarse una relación funcional que involucra una relación aditiva y porque, al ser las últimas sesiones, los estudiantes estaban más familiarizados con el equipo investigador. Los únicos conocimientos previos relativos al pensamiento funcional tienen que ver con las sesiones previas donde se trabajaron problemas que involucraban dos funciones lineales. En las sesiones 4 y 5 se trabajó un único problema con diferentes cuestiones y con las siguientes características: (a) involucra la función lineal $y=x+5$, (b) incluye casos particulares cercanos y lejanos, (c) incluye una relación directa e inversa entre las variables y (d) se trabajan los sistemas de representación verbal y tabular. Propusimos preguntas que consideraban el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Comenzamos el trabajo con casos particulares cercanos, para pasar a los lejanos, hasta llegar a la generalización. El problema se enmarcó dentro de una situación de edades de dos hermanos (Carmen era cinco años mayor que Álvaro). Para este trabajo, consideramos la relación directa, proponiéndoles averiguar la edad de Carmen dada una edad de Álvaro. El enunciado del

problema fue el siguiente: “dos niños, Álvaro y Carmen, se llevan cinco años, siendo Carmen cinco años mayor que Álvaro”. Algunas de las cuestiones planteadas fueron: cuando Álvaro tiene un año, ¿cuántos años tendrá Carmen?; cuando Álvaro tiene dos años, ¿cuántos años tendrá Carmen?; cuando Álvaro tiene diez años, ¿cuántos años tendrá Carmen?; cuando Álvaro tiene treinta años, ¿cuántos años tendrá Carmen?; cuando Álvaro tiene cincuenta años, ¿cuántos años tendrá Carmen? Finalmente se proponía contestar a una cuestión que promovía la generalización: ¿Cómo calculas los años de Carmen? Estas cuestiones se propusieron en el gran grupo y en una ficha de trabajo en las que debían completar una tabla de forma individual. Grabamos las sesiones con videocámara. A cada una de las diferentes preguntas que se les hacían a los estudiantes sobre el problema se les denomina cuestiones.

Análisis de datos

Realizamos un análisis de datos mixto, que combina lo cualitativo y lo cuantitativo. En primer lugar realizamos las transcripciones de las dos sesiones efectuadas, donde los alumnos respondían a las cuestiones planteadas por la profesora-investigadora, y recopilamos las producciones escritas de los alumnos en la ficha de trabajo. En segundo lugar, determinamos las cuestiones planteadas en el problema como unidades de análisis. En tercer lugar, categorizamos y clasificamos las unidades de análisis donde se evidenciaba pensamiento funcional y qué relación funcional se observaba, de aquellas que no lo evidenciaban. Estas respuestas a su vez las clasificábamos de acuerdo a la estrategia empleada.

Las categorías de análisis utilizadas hacen referencia a cada uno de los dos objetivos planteados. Sobre las relaciones funcionales que evidencian el pensamiento funcional de los estudiantes, utilizamos las tres relaciones que se desprenden del marco teórico: *recurrencia*, *correspondencia* y *covariación*. Adicionalmente, consideramos el valor de “no evidencia relación funcional”.

De las investigaciones previas surgen algunas estrategias que los estudiantes emplean como el conteo o la respuesta directa. Ante la escasez de investigaciones relativas a nuestro segundo objetivo de investigación, diseñamos las categorías tras una primera revisión de los datos, con base en la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Finalmente, diseñamos las siguientes categorías de análisis para las estrategias, que no son mutuamente excluyentes.

- *conteo* (con apoyo de dedos, palabras o tabla de cien). Un ejemplo de esto lo mostramos en el siguiente fragmento: “Trece (responde A23 a la cuestión de cuántos años tiene Carmen cuando Álvaro tiene ocho años, lo hace contando de uno en uno a partir de ocho empleando cada uno de los cinco de dedos de una mano)... luego justifica su respuesta “he puesto cinco en la mesa (pone cinco dedos sobre la mesa) y he seguido contando hacia adelante... desde el ocho... para llegar hasta trece”.
- *operatoria* (sumas o restas empleando cálculo mental o escrito). Un ejemplo de cálculo mental se observa en el siguiente fragmento: “Si Carmen nació cinco años más que Álvaro, si Álvaro tiene once, le sumo cinco a once; sería dieciséis” (A29).
- *particulariza* (cuando a una cuestión general responde por medio de un caso particular). Un ejemplo de esta subcategoría es cuando un alumno responde a la pregunta “¿cómo calcularías la edad de Carmen?” por medio un caso particular “Si Álvaro tiene un año Carmen Seis”.
- *relación directa como inversa* (intercambia los papeles de las variables dependiente e independiente). Un ejemplo es cuando un alumno responde a la pregunta “¿cómo calculas los años de Carmen?” con “quitándole cinco a los de Carmen”. De esta forma, se podría encontrar el valor de la variable independiente a partir de la dependiente, y no al revés.
- *respuesta directa* (solo presenta el resultado sin dar ninguna justificación de su trabajo);

- *inadecuada* (no se corresponde con la relación funcional involucrada en el problema). Un ejemplo es el siguiente fragmento.

Profesora-investigadora 1 (I1): Álvaro cumple cinco años... ¿cuántos tiene Carmen?

A1: Siete.

I1: ¿Siete? ¿La hermana tiene dos más?... Álvaro tiene cinco ¿cuántos años más tiene Carmen que Álvaro?

A1: Ocho

RESULTADOS

Tras introducir ejemplos del trabajo de algunos estudiantes con base en las categorías definidas, presentamos los resultados generales relativos a los objetivos de este trabajo: relaciones funcionales y estrategias de resolución de problemas.

Ejemplos del trabajo de los estudiantes

Seleccionamos algunos ejemplos del trabajo de los estudiantes, por ser más representativos y responder de mejor manera a nuestros objetivos de investigación. Primero mostramos un ejemplo de un alumno que no evidencia relación funcional y continuamos con otros alumnos que sí lo hacen. Dentro de cada ejemplo, explicamos además la estrategia seguida en las respuestas dadas a las cuestiones.

No evidencian relaciones funcionales

A continuación, mostramos las respuestas de A3, quien no muestra evidencias de relación funcional. En la figura 1, mostramos partes de la tabla que A3 completó en la ficha de trabajo. Observamos que, por lo general, emplea una estrategia inadecuada frente a la propuesta de encontrar la edad de Carmen (columnas de la derecha, en ambas imágenes de la figura 1) dada la edad de Álvaro (columnas de la izquierda en ambas imágenes de la figura 1). Solo para los tres años de Álvaro A3 utiliza una estrategia adecuada respondiendo 8 años para Carmen. Sin embargo, observamos que tanto en números cercanos como lejanos, suma diferentes números a la edad de Álvaro para obtener la edad de Carmen. Por tanto, no sigue ningún patrón para obtener la edad de Carmen.

3	8	71	85
4	11	80	95
6	74	84	105
9	16		

Figura 1. Respuesta A3 en tabla

A3 no pone de manifiesto alguna relación funcional cuando se le pregunta la edad de Carmen cuando Álvaro tiene 3 años. El siguiente fragmento muestra la conversación de la profesora investigadora con este estudiante.

1. I1: [...] Si Álvaro tienes tres, ¿cuántos años tiene Carmen? [...]
2. A3: Ocho.
3. I1: Ocho, ¿por qué?
4. A3: Si Álvaro tiene tres y Carmen tiene otros cinco, porque si juntamos los tres, y cinco...dan ocho.
5. I1: O sea que tú estás de acuerdo con lo que decía A28. Y ¿por qué el tres lo juntas con el cinco?
6. A3: Porque Álvaro tiene tres años y Carmen tiene cinco y si los juntamos...

A3 interpreta que Carmen tiene cinco años y que esta cantidad se le debe sumar al número de años de Álvaro (3 años) para dar respuesta a la cuestión planteada. De este modo, consideramos que A3 no muestra evidencia de pensamiento funcional. A3 utiliza una estrategia con base en la operatoria.

Evidencian relaciones funcionales

A continuación mostramos respuestas de A30, interpretamos que pone de manifiesto pensamiento funcional. En la figura 2, mostramos que A30, tanto en números cercanos (imagen izquierda de la figura 2) como lejanos (imagen derecha de la figura 2) sigue el patrón de sumar cinco a la edad de Álvaro para calcular la edad de Carmen. De esta forma, A30 calcula el valor de la variable dependiente $f(a)$ a partir del valor de la variable independiente a . Por tanto, establece la relación entre pares de valores de ambas variables, por lo que se trata de una relación de correspondencia.

9	14	71	76
10	15	80	85
12	17	84	89

Figura 2. Respuesta de A30 en tabla

Cuando A30 responde en la ficha de trabajo sobre la forma de calcular los años de Carmen, emplea una estrategia en que considera la relación directa como una relación inversa. Para encontrar la edad de Álvaro, A30 explica que lo hace “quitando cinco a los de Carmen”. Con la estrategia empleada por A30 se podría calcular la edad de Álvaro dada la edad de Carmen, sin embargo, aunque el alumno considere la pregunta de esta manera, la estrategia utilizada es correcta y al explicarla, podemos categorizarla como “considera la relación directa como una relación inversa”.

El siguiente fragmento de la conversación de la profesora-investigadora con A30 corrobora la existencia de pensamiento funcional.

7. II: A ver, vamos a pensar. A21 nos estaba diciendo que si Álvaro tenía treinta años, Carmen tendría treinta y cinco ¿tú estás de acuerdo con eso?
8. A30: Sí.
9. II: Y tú ¿cómo lo has hecho? ¿Cómo has llegado a ese treinta y cinco?
10. A30: Pues, si tiene treinta, Carmen tendría más.
11. II: ¿Cuántos más?
12. A30: Cinco...como tiene treinta, tiene treinta y cinco.

Así A30 expresa que tiene que agregar 5 al valor de la variable independiente (edad de Álvaro) para averiguar el valor de la variable dependiente (edad de Carmen). De esta manera A30 emplea una estrategia de operatoria, al considerar la situación como una relación directa.

A continuación, destacamos diferentes momentos en que A21 establece una relación de correspondencia empleando una estrategia de operatoria y llegando a expresar verbalmente una generalización de tal relación, y una relación de covariación empleando también una estrategia de operatoria.

En la figura 3, mostramos que A21 tanto en números cercanos (imagen izquierda de la figura 3) como lejanos (imagen derecha de la figura 3) continuó el patrón de sumar 5 a la edad de Álvaro para encontrar la edad de Carmen. De este modo damos cuenta que A21 pone de manifiesto una relación de correspondencia porque calcula el valor de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente, sumando siempre cinco, y centrándose entre los pares de valores de ambas variables.

6	11	71	76
9	14	80	85
10	15	84	89

Figura 3. Respuesta de A21 en tabla

La respuesta de A21 en la ficha de trabajo sobre cómo encontró la edad de Carmen da cuenta del patrón seguido, él justifica que encuentra la edad de Carmen dada la edad de Álvaro “sumándole cinco”.

En la sesión 5 corroboramos que A21 efectivamente identificó una relación funcional de correspondencia empleando una estrategia de operatoria. En una cuestión donde II propuso encontrar la edad de Carmen cuando Álvaro tiene 10 años, A21 sumó 5 a 10 y de esta manera encontró la edad de Carmen. Por tanto, se centra en la cantidad de la variable independiente, a la que le suma 5, para encontrar la variable dependiente. De esta manera A21 identifica una relación funcional de correspondencia, empleando una estrategia de operatoria. Por su parte, A21 justifica su respuesta realizando una generalización, de tal modo que él suma cinco a la edad de Álvaro porque Carmen siempre tendrá cinco años más que Álvaro (línea 18).

13. I1: [...] Si por ejemplo Álvaro tiene diez... ¿Cuántos años tiene Carmen? A ver A21.
14. A21: Quince.
15. I1: Quince ¿por qué?
16. A21: Porque, porque diez más cinco son quince.
17. I1: ¿Por qué haces diez más cinco?
18. A21: Porque, porque si Álvaro tiene diez Carmen siempre va a tener cinco más, son quince, porque diez más cinco.

Por otro lado, en otra cuestión relativa a encontrar la edad de Carmen en una tabla, A21 logró identificar una relación de covariación empleando una estrategia de operatoria. A21 explicó que cuando la edad de Álvaro aumenta en 1 se debe sumar 1 a la cantidad de años de Carmen (línea 24), como muestra el siguiente fragmento:

19. I1: [...] ¿Qué hacías siempre para saber cuántos años tiene Carmen?
20. A21: Que yo lo he hecho así sumándole...mirando al de arriba...puesto es el cuatro y el de Álvaro...entonces el de abajo será el siguiente...entonces, era el cinco porque va en fila en uno.
21. I1: O sea yo te pongo aquí el veintinueve (escribe el número veintinueve debajo del número veintiocho de la variable independiente de la tabla) tú rápidamente...
22. A21: Serían treinta y cuatro. (La investigadora escribe el número treinta y cuatro debajo del número treinta y tres de la columna de la variable dependiente de la tabla de funciones).
23. I1: ¿Por qué? ¿Me lo puedes repetir con este ejemplo?
24. A21: Porque... uno más que veintiocho entonces también uno más que treinta y tres.

Resultados generales

Resumimos los resultados sobre las respuestas en la tabla 1 de acuerdo con las estrategias y las relaciones funcionales. A cada alumno le designamos una letra A y un número que va desde el 1 al 30.

Tabla 1. Respuestas de alumnos

Relación funcional	Estrategia				
	Conteo	Operatoria	Particulariza	R. directa como R. inversa	Respuesta directa Inadecuada
Sin evidencia de relación funcional		A1-A3- A10- A15			A4 A1-A3- A4-A10- A15
Evidencia de relación funcional correspondencia	A2-A5- A11- A19- A23- A25- A26	A2-A7-A9- A12*-A13*- A14-A16*- A17*-A18*- A19*-A20*- A21*-A22-A24- A25*-A26-A28- A29*-A30	A6-A12- A20-A26- A27	A30	A14- A24-A26
Evidencia relación funcional covariación	A22	A21			

Nota. * = generaliza; R = relación.

Como se observa en la tabla 1, casi todos los alumnos (29/30) respondieron al menos a alguna de las cuestiones propuestas. Veinticuatro alumnos identificaron una relación funcional de correspondencia. Dos de ellos además identificaron una relación de covariación. Ningún alumno identificó una relación de recurrencia. Por último, cinco alumnos no identificaron una relación funcional. De los veinticuatro alumnos que identificaron una relación funcional de correspondencia diez llegaron a realizar un proceso de generalización de esta relación, empleando el sistema de representación verbal.

De los cuatro alumnos que no identificaron una relación funcional, A1, A3, A10 y A15 emplearon estrategias de operatoria en algunas ocasiones y en otras emplearon una estrategia inadecuada. A4 empleó una estrategia de respuesta directa y una estrategia inadecuada.

De los veinticuatro alumnos que identificaron una relación de correspondencia, diecinueve emplearon una estrategia de operatoria, siete estrategias de conteo, cinco particularizaron, tres dieron una respuesta directa y uno empleó una estrategia en que considera la relación directa como inversa. Observamos que algunos alumnos emplearon varias estrategias en diferentes cuestiones. Por ejemplo, A12, A20 y A26 emplearon estrategias de operatoria y particularizaron. De los dos alumnos que identificaron una relación de covariación, A22 empleó una estrategia de conteo mientras que A21 empleó una estrategia de operatoria.

CONCLUSIONES

Con este trabajo aportamos mayor evidencia sobre las capacidades que tienen los alumnos de primero de educación primaria cuando se enfrentan a problemas que buscan promover el pensamiento algebraico, en especial el pensamiento funcional. Estos resultados generales confirman aquellos obtenidos por las investigaciones previas que mencionan que alumnos de primeros niveles educativos tienen capacidades para abordar este tipo de problemas (p. ej., Kaput, 1998; Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Cañadas, et. al., 2016; Cañadas y Fuentes, 2015) y, a su vez, los complementan por el tipo de relación funcional trabajado en este estudio.

Destacamos que ningún alumno identificó la relación de recurrencia y que la mayoría identificó relaciones de correspondencia. Por tanto, el problema propuesto constituye un medio útil para promover en el aula el pensamiento funcional en alumnos de estas edades, yendo más allá de la recurrencia y pudiendo servir como mediadora hacia la generalización. El problema de edades planteado en esta investigación se puede trabajar en el aula como medio para promover el pensamiento funcional en alumnos de estas edades y así dar respuesta al llamado de Warren y Cooper (2005), quienes defienden la idea de introducir tareas que impliquen centrarse en las relaciones de covariación o correspondencia en vez de la recurrencia.

En ocasiones, algunos de los alumnos no manifestaron pensamiento funcional. Conjeturamos que esto se debió a que no entendieron lo que significaba “diferencia de edad” entre Carmen y Álvaro y menos aún que debían siempre conservar una diferencia de edad de cinco años entre Carmen y Álvaro. Algunos alumnos atribuyeron a Carmen una edad fija: 5 años. Otros alumnos sumaron a la edad de Álvaro cinco pero no lograron dar una respuesta en que evidenciaran la comprensión de esta diferencia de edad entre Álvaro y Carmen a través de los diferentes casos particulares planteados, mientras que otros alumnos sumaron cualquier otro número diferente a cinco y sin explicar el porqué de esta suma. Es destacable la intervención de la maestra de clase quien, a partir de la idea de “cumpleaños”, logró que los alumnos entendieran la idea de “diferencia de edad”, como se muestra en el siguiente fragmento:

(La maestra toma como ejemplos dos hermanas que tienen cuatro años de diferencia de edad)

Maestra:... esa es la diferencia que siempre, siempre vas a tener tú más que tú hermana... tú llegaste cuatro años antes (le muestra cuatro dedos)...Carmen llegó cinco años antes que su hermano Álvaro... Entonces ¿cuántos años tienes de diferencia con tu hermana?

Alumnos: Cuatro. [...]

Destacamos que dos alumnos (A21 y A22) pudieron abordar adecuadamente cuestiones planteadas a través de dos tipos de relación funcional como correspondencia y covariación. Esto supone que un mismo alumno puede abordar un problema de relación funcional empleando más de un tipo de relación funcional.

Con este trabajo hemos dado cuenta de la factibilidad de llevar al aula este tipo de problemas como forma de fomentar el pensamiento algebraico a través del pensamiento funcional. Así mismo, este tipo de investigación se podría llevar a cabo con problemas en otros contextos y situaciones como forma de complementar este estudio y así decidir si el contexto influye en las respuestas que proporcionan.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y gracias a una beca CONICYT PFCHA 72150072.

REFERENCIAS

- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5. Series in essential understandings*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

- Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Brizuela, B. M. y Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero, J. A. Castorina, y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación: procesos de conocimiento y contenidos específicos* (Vol. 2, pp. 263-286). Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103.
- Cañadas, M. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.
- Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.
- Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In R. Underhill (Ed.) *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg, Virginia, U.S.A.
- Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1), 3-21.
- Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In S. Fennel (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (Vol. BOE N° 52, pp. 19349-19420). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Merino, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- MINEDUC (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación de Chile.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 29(1), 75-88.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. y Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 127-134). Hololulu, Hawaii: PME.

Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Warren, E. y Cooper, T. J. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162.