

Sistema de Ecuaciones Lineales

Diferentes estrategias para encontrar las soluciones con la calculadora

Oscar Leonardo Jiménez González

Docente de Matemáticas, UPN

Bogotá, Colombia. 2016

gn01@casio.com.uy

Resumen: La siguiente actividad es una propuesta de exploración, análisis y autoevaluación de diferentes procesos que pueden hacer los estudiantes de secundaria, previo al aprendizaje de sistemas de ecuaciones algebraicas. Se espera que mediante el uso de las diferentes herramientas que ofrece la calculadora Classwiz fx-991 LAX, el docente pueda guiar un excelente proceso para fortalecer el aprendizaje de distintos métodos para resolver dichas situaciones, logrando así una comprensión más completa del concepto.

Palabras clave: ecuaciones lineales, métodos de solución, calculadora.

CONSIDERACIONES PREVIAS

Antes de iniciar el curso de Sistemas de Ecuaciones Lineales, es importante que con anterioridad los estudiantes hayan comprendido el concepto de ecuación lineal con una incógnita, despejar valores en una ecuación, algunos métodos para determinar el valor de la misma y la evaluación o comprobación de dicho valor en la situación presentada. De igual manera se espera que el estudiante tenga nociones básicas sobre función lineal, rectas en el plano cartesiano, paralelas, secantes y oblicuas.

Es importante aclarar que la metodología de esta propuesta se basa principalmente en las Teorías Cognitivas que sustentan que un buen proceso de aprendizaje en la escuela sucede siempre que el estudiante sea partícipe en la construcción de los conocimientos y el ambiente escolar permita las ayudas necesarias para que dicha construcción se dé en los términos esperados.

1. OBJETIVO GENERAL

Construir diferentes estrategias para la resolución de sistemas de ecuaciones de 2×2 utilizando como herramienta principal la calculadora Classwiz fx-991 LAX.

2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 2.1. Reforzar los procesos naturales e intuitivos que tienen los estudiantes para resolver situaciones donde se involucren los sistemas de ecuaciones.
- 2.2. Conocer las herramientas que tiene la calculadora, no solo las que permiten la resolución del sistema de ecuaciones sino aquellas con las que se puede fortalecer los procesos intuitivos de los estudiantes.
- 2.3. Acercar a los estudiantes a los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones (Sustitución, Eliminación, Igualación, Gráfico).

3. CONTEXTUALIZACIÓN

Se sugiere comenzar la propuesta presentando diferentes situaciones donde los estudiantes descubran que existe más de una incógnita, es decir proponer desde distintos contextos preguntas donde existan dos cantidades relacionadas entre sí mediante la adición o sustracción. Algunas situaciones, bastante sencillas, pueden ser:

Situación 1: En un autobús se cuentan 23 pasajeros. ¿Cuántos son hombres y cuántas son mujeres?

Situación 2: Antes de llegar al colegio, un estudiante tenía \$15000 y ha pagado una salida. ¿Cuánto dinero le queda?

Situación 3: Un rectángulo tiene un perímetro de 42 cm. ¿Cuánto miden el largo y el ancho?

La sola presentación de las situaciones conlleva a que los estudiantes den por hecho que es imposible resolver de manera precisa el problema planteado sin más información.

Otra posible situación (con la que se sugiere dar inicio al posterior trabajo con la calculadora) es la siguiente.

Situación de perímetros con material concreto.

Se debe llevar a la clase dos grupos de rectángulos en papel que deberán ser medidos con pos-it por los estudiantes. Inicialmente no conocen las medidas de cada lado del rectángulo ni de los lados del pos-it. **Figura 1.**

Una vez se tenga el material, cada estudiante deberá colocar los pos-it en el borde del rectángulo y de esta manera encontrar el perímetro en relación con las medidas de los lados del pos-it, es decir, deberán decir que el perímetro de un rectángulo equivale a tantos largos más tantos anchos del pos-it. Se debe procurar porque los estudiantes nombren de alguna manera el ancho y el largo del pos-it y construir así a una expresión para el perímetro del rectángulo. **Figura 2.**

Es importante aclarar que el docente deberá escoger con cuidado la medida de los rectángulos y los pos-it de tal manera que todas las medidas sean primos relativos para observar los diferentes tipos de expresiones que sugieren los estudiantes.

Seguramente surgirán diferentes expresiones según hayan hecho la distribución de los pos-it, en algunas no habrá coeficientes enteros y tendrán expresiones con fraccionarios.

Luego se les solicita medir el perímetro de cada rectángulo y se les pregunta si esa información es suficiente para encontrar la medida de los lados del pos-it.

Finalmente el maestro deberá seleccionar dos ecuaciones lineales construidas por los estudiantes, se debe tener cuidado por escoger aquellas que se acerquen más a la respuesta correcta para validar los resultados con una próxima medición de los lados del pos-it. Se sugiere tomar una ecuación de cada grupo de rectángulos para tener así perímetros diferentes.

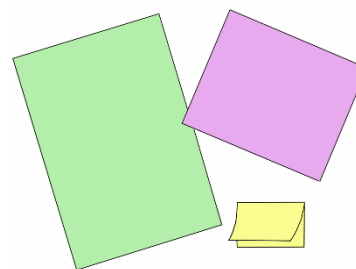


Figura 1.

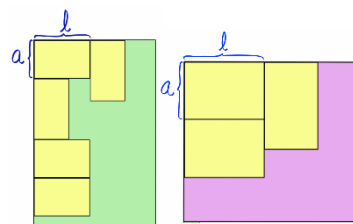


Figura 2.

4. USEMOS LA CALCULADORA

Es importante aclarar que en esta fase, la calculadora no es únicamente aquello que permite calcular rápidamente la respuesta de una situación, debe ser la herramienta que permite a los estudiantes reflexionar sobre sus saberes previos, aquellos procedimientos que intuitivamente puede desarrollar para encontrar el valor de cada incógnita y así poder hacer una **exploración** con los datos para que posterior al **análisis** de las respuestas obtenidas esté en la capacidad de **autoevaluar** no solamente los resultados sino los procedimientos llevados a cabo.

Las propuestas que siguen a continuación tienen como propósito evidenciar los tres procedimientos descritos anteriormente dando una importancia mayor a la herramienta.

4.1. *Exploremos la hoja de cálculo.*

Supongamos que las expresiones realizadas por los estudiantes en la exploración con el material concreto son $\left(\frac{11}{2}a + 4l = 42\right)$ y $(9a + 3l = 51)$. A continuación se sugiere reflexionar ¿cómo se puede resolver la situación?, recordemos que aún no se conoce lo que es un sistema de ecuaciones ni cómo resolverlo, por lo tanto los estudiantes harán uso de los conocimientos previos y algunas estrategias para resolver problemas, entre ellas el *ensayo y error*. Esta estrategia plantea que debe proponerse una respuesta, evaluarla según la situación y ante cada error buscar una nueva respuesta más cercana a la esperada.

Teniendo en cuenta esta estrategia se espera que el estudiante proponga dos valores, uno para a otro para l y los evalúe en ambas expresiones del perímetro.

Por ejemplo

Si $a = 6$ y $l = 9$, las expresiones del perímetro serían $\frac{11}{2}(6) + 4(9) = 69$ y la otra, $9(6) + 3(9) = 81$, por lo tanto parece que los números propuestos son muy grandes lo cual debe permitirle al estudiante evaluar que sucedió y así proponer una nueva pareja de números que se acerquen mejor a la respuesta.

Observación: los valores que se escogen tienen dos características especiales basados en la situación real, estas son: el valor del ancho es menor del largo puesto que así es a condición del pos-it, y las medidas de este deberían estar en un rango que proponga el mismo estudiante, es decir, según la observación el estudiante debería estar en la capacidad de estimar un rango de valores aproximados a cada longitud puesto que no tendría sentido hablar de 20 cm o más para cualquier lado, por lo tanto se debe sugerir que antes de plantear cualquier pareja de valores, reflexione sobre las condiciones reales de los mismos, nuevamente, el ancho nunca va a ser más que el largo y debe haber un rango de longitudes donde van a estar estas medidas.

Se observa de esta manera que el estudiante puede seguir ensayando hasta que finalmente encuentre la respuesta correcta, sin embargo son varios cálculos que debe hacer (y la calculadora puede realizar bastante rápido) pero que obligan a tomar mucho tiempo en ese análisis ya que el estudiante debe evaluar si los valores aumentan o disminuyen según cada caso, lo cual demanda un tiempo y un desgaste que puede llevarlo a la frustración.

Es aquí donde se propone que la calculadora y su herramienta de hoja de cálculo hagan su aparición ya que esta permitirá evaluar toda la situación con un par de operaciones sencillas de la siguiente manera.

| D | | | | |
|---|---|----|------|----|
| | A | B | C | D |
| 6 | 1 | 7 | 33.5 | 30 |
| 7 | 1 | 8 | 37.5 | 33 |
| 8 | 1 | 9 | 41.5 | 36 |
| 9 | 1 | 10 | 45.5 | 39 |

$= (11 \div 2) \times A9 + 4 \times B9$

El estudiante escribe un único valor para el ancho en la columna A y diferentes valores para el largo en la columna B, luego en la columna C evalúa la expresión $\frac{11}{2}a + 4l$ con los valores que están en A y en B, en la columna D se evalúa la expresión $9a + 3l$. Por ejemplo, según la tabla cuando $a = 1$ y $l = 10$ un perímetro es 45,5 cm y el otro 39 cm.

Esta observación debería permitirle al estudiante detectar que hay un error cuando $a = 1$ lo que lo obligaría a evaluar nuevamente toda la situación cuando $a = 2$ y nótese que una de las ventajas de hacer esta exploración con la calculadora es que simplemente se cambian los valores de la columna A, dejando todo lo demás igual.

| D | | | | |
|---|---|----|----|----|
| | A | B | C | D |
| 6 | 2 | 7 | 39 | 39 |
| 7 | 2 | 8 | 43 | 42 |
| 8 | 2 | 9 | 47 | 45 |
| 9 | 2 | 10 | 51 | 48 |

$= (11 \div 2) \times A7 + 4 \times B7$

| D | | | | |
|---|---|---|------|----|
| | A | B | C | D |
| 4 | 3 | 5 | 36.5 | 42 |
| 5 | 3 | 6 | 40.5 | 45 |
| 6 | 3 | 7 | 44.5 | 48 |
| 7 | 3 | 8 | 48.5 | 51 |

$= (11 \div 2) \times A6 + 4 \times B6$

| D | | | | |
|---|---|---|----|----|
| | A | B | C | D |
| 4 | 4 | 3 | 34 | 45 |
| 5 | 4 | 4 | 38 | 48 |
| 6 | 4 | 5 | 42 | 51 |
| 7 | 4 | 6 | 46 | 54 |

$= (11 \div 2) \times A4 + 4 \times B4$

El estudiante continúa haciendo el proceso cambiando únicamente el valor del ancho (columna A) y automáticamente la calculadora evalúa ambas expresiones (¡qué maravilla!), la tarea del estudiante queda ahora en buscar que las expresiones de los perímetros (columnas C y D) tengan resultado 42 y 51 respectivamente, como se observa en la última tabla de la secuencia anterior, los valores que arrojan esos resultados son $a = 4$ y $l = 5$, problema resuelto.

Nótese que el estudiante lleva a cabo los tres procesos importantes durante el desarrollo de la actividad, esto es explorar las herramientas de la calculadora con sus limitaciones aplicadas a la situación, analizar los resultados obtenidos y autoevaluar no sólo dichos resultados sino también los procedimientos empleados.

4.2. Acercamientos al método de sustitución con la hoja de cálculo.

Para el maestro que está iniciando el curso de sistemas de ecuaciones lineales es muy importante lograr que sus estudiantes conozcan los diferentes métodos de resolución, para ello la calculadora también puede ser una herramienta que permita explorar, analizar y autoevaluar unas nociones básicas e intuitivas del estudiante que luego serán formalizadas por el maestro.

Se puede explorar el método de sustitución, despejar la incógnita l en la segunda ecuación ($l = \frac{51-9a}{3}$) y sustituirla en la primera $\frac{11}{2}a + 4\frac{51-9a}{3} = 42$, por lo tanto el problema se resume en encontrar en la hoja de cálculo un valor para el ancho que resuelva la ecuación recién encontrada y al mismo tiempo evaluar el despeje del largo para cada posible valor del ancho.

Es así como también se llega a la conclusión que el valor del ancho debe ser 4 cm y el largo 5 cm. Una exploración más corta que en la actividad anterior pero que exige comprender la relación de sustitución.

| A | B | C | D |
|---|------|----|---|
| 2 | 55 | 11 | . |
| 3 | 48.5 | 8 | . |
| 4 | 42 | 5 | . |
| 5 | 35.5 | 2 | . |

$= (51 - 9A4) \div 3$

4.3. Función Código QR, método gráfico.

Otra manera de abordar el problema es mediante el análisis de la situación como una sistema de funciones, esto es, si se sabe que el perímetro de la hoja medida es fijo, los valores que pueden variar son el ancho y el largo por lo tanto ese comportamiento se puede modelar con una función lineal despejando en cada ecuación la misma incógnita.

$$l = \frac{42 - \frac{11}{2}a}{4} \quad l = \frac{51 - 9a}{3}$$

Luego se accede en el menú a la opción tabla y se escribe cada función evaluándolas para valores enteros entre el 1 y el 10.

$$f(x) = \frac{42 - \frac{11}{2}x}{4}$$

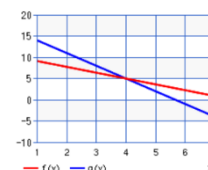
$$g(x) = \frac{51 - 9x}{3}$$

Table Range
Start: 1
End: 10
Step: 1

Esto nos muestra una tabla y en ella lo que el estudiante está buscando es para cuál valor del ancho (x) los valores de la función $f(x)$ y $g(x)$ van a ser los mismos, esto es cuando $x = 4$ y $f(x) = g(x) = 5$

| x | f(x) | g(x) |
|---|-------|------|
| 1 | 9.125 | 14 |
| 2 | 7.75 | 11 |
| 3 | 6.375 | 8 |
| 4 | 5 | 5 |

Finalmente como las funciones también tienen una representación gráfica, se puede hacer uso de la opción Código QR para visualizar la gráfica de las funciones y así evaluar el punto de corte entre las dos rectas.



De esta manera se observa que el punto de corte entre las dos gráficas es el punto (4,5) la solución al sistema de ecuaciones.

Finalmente se puede solicitar al estudiante que verifique con ayuda de la regla si en efecto esas son las medidas del pos-it con el propósito de volver a la situación y entender que sus resultados no están fuera de contexto.

5. CONCLUSIONES

Se recomienda proponer en el aprendizaje de las matemáticas escolares, diferentes situaciones que se encuentren muy próximas a los estudiantes o que al menos puedan ser manipuladas mediante conocimientos básicos o habilidades tan innatas como contar, medir, clasificar, etc., esto permite que sean los estudiantes quienes puedan explorar con apoyo de cualquier recurso didáctico, diferentes tipos de estrategias para resolver la situación.

Es muy importante que el maestro que propone un recurso didáctico en la clase pueda explorarlo para conocerlo y así lograr identificar todas sus potencialidades y limitaciones, de esta manera podrá orientar mejor los procesos de aprendizaje de sus estudiantes permitiéndoles que sean ellos mismos quienes a través de la exploración y análisis de sus resultados sean capaces de validar lo que han hecho y así fortalecer sus propios conocimientos o construir unos nuevos y/o mejores.

La calculadora como herramienta de apoyo para la clase no debe ser usada solamente como la que permite encontrar resultados de manera rápida y precisa, es necesario que también el estudiante pueda explorar muchas funciones que esta posee y mirar cuáles de ellas le permite encontrar la respuesta.

Para acceder a más recursos digitales en su idioma: <http://educasio.com>
Para solicitar un taller en su institución escribanos a: gn01@casio.com.uy