



Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets

Carlos Valenzuela García

Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav),
México, carvaga86@hotmail.com

Olimpia Figueras

Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav),
México, figuerao@cinvestav.mx

David Arnau Vera

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, España, david.arnau@uv.es

Juan Gutiérrez-Soto

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, España, juan.gutierrez-soto@uv.es

Fecha de recepción: 15-05-2016

Fecha de aceptación: 19-07-2016

Fecha de publicación: 1-11-2016

RESUMEN

En este artículo se exponen resultados de una investigación en desarrollo y se describe la construcción de un Modelo Teórico Local (MTL) inicial sobre las fracciones y su enseñanza. Con ese marco de referencia teórico y metodológico se diseña, desarrolla y pone a prueba, en un grupo natural, una secuencia de enseñanza basada en el uso de applets diseñados con GeoGebra. En el diseño de estas herramientas tecnológicas se emplean lineamientos definidos a partir de resultados de análisis de applets relacionados con las fracciones que se encuentran en la web; se sustenta en el uso de la recta numérica como principal recurso didáctico, y se estructura de manera que los datos generados en la interacción estudiante/applets se guardan digitalmente. En este documento se describe una parte de los aspectos considerados para el diseño del recurso tecnológico y resultados de la experimentación de la primera etapa de la secuencia de enseñanza.

Palabras clave: modelos teóricos locales de fracciones, secuencia de enseñanza de fracciones, applets en la enseñanza, recolección digital de datos, fracciones en la recta numérica.

Toward a teaching model for fractions based on the use of applets

ABSTRACT

In this article, results of an ongoing research project are described and the construction of an initial Local Theoretical Model of fractions and its teaching is summarized. With this theoretical and methodological framework, a teaching sequence is designed, developed and tested in a group of students. The sequence includes the use of applets devised with GeoGebra. The building-up of these technological tools takes into account guidelines derived from analyses of applets related to fractions that were found on the web. The design of the applets created with the aforementioned software is based on the use of the number line as the main teaching resource, and at the same time, it is structured so that the student/applets interaction's data is digitally stored. The paper contains aspects considered for the design of the technological resources and results of the first stage of the teaching sequence' experimentation.

Key words: local theoretical models of fractions, fractions' teaching models, applets for education, digital data collection, fractions on number line.

1. Introducción

El hecho de que en las últimas cuatro décadas muchos investigadores se hayan interesado por la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de las fracciones es bien conocido. Entre las contribuciones más relevantes de investigaciones realizadas a principios de esa época se encuentran las de Kieren (1976), Freudenthal (1983), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Figueras (1988) y Streefland (1991). Los resultados de éstos y otros investigadores influyeron en la manera en que se enfrentó la problemática en la década de los noventa y se reestructuró la enseñanza de ese contenido en la educación obligatoria de muchos países.

Con el paso de los años las investigaciones que tratan esa problemática han aumentado. Entre ellas se pueden mencionar las de Steffe y Olive (2010), Contreras (2012), Real y Figueras (2015) y las que han desarrollado en la última década los miembros del Proyecto de los Números Racionales (*Rational Number Project*) en Estados Unidos¹.

Entre los aspectos que la mayoría de las investigaciones destacan está la importancia del estudio de las fracciones desde el nivel básico. Siguiendo la idea de Freudenthal (1983), las fracciones son el recurso fenomenológico de los números racionales, no sólo son distintas maneras de representar al mismo racional, sino que son expresiones que "viven mucho más sus propias vidas". Por ejemplo, aunque las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$ sean elementos del mismo número racional que puede representarse por $\frac{1}{2}$, cada una de ellas pudo ser utilizada en situaciones distintas, donde posiblemente no sea necesario ver la relación que tienen entre sí. Sin embargo, es importante mencionar que en algún momento la didáctica de las fracciones debe tomar en cuenta dicha relación, y así dar paso a la equivalencia de fracciones y posteriormente a la construcción de los números racionales.

Por otra parte, en la red ideal para la construcción del conocimiento personal de los números racionales elaborada por Kieren (1988) se pone énfasis en que el conocimiento ideal de dichos números es creciente, es decir, el proceso de construcción del conocimiento va desde hechos o acciones con objetos hasta el uso de constructos formales. Este investigador hace hincapié en la idea de que en los primeros niveles de dicha red se ubican los mecanismos constructivos relacionados con las fracciones, a saber, la partición, la equivalencia en un sentido cuantitativo y la formación de unidades divisibles. En consecuencia, se puede afirmar que las fracciones son la forma de introducir a los números racionales. Además es importante que las fracciones y los números racionales sean enseñados porque el conocimiento de éstos es "una parte rica de las matemáticas que da ideas a las personas más allá de los números enteros, y un vehículo para relacionar esos conocimientos de números con muchos aspectos de las matemáticas y sus aplicaciones" (Kieren, 1992, p. 327).

Aunado a lo anterior, el conocimiento de las fracciones se ha caracterizado como uno de los predictores del desempeño en matemáticas de alumnos egresados de primaria hasta el bachillerato (Siegler et al., 2012). Por ello, se considera necesario favorecer una constitución de mejores objetos mentales de las fracciones desde la educación básica, propósito principal de la investigación descrita en este artículo.

Otro de los aspectos importantes que ha sobresalido en las investigaciones es la pluralidad de significados, usos y subconstructos que se le han asignado a las fracciones y a los números racionales.

¹ Para consultar un mayor número de investigaciones desarrolladas por este grupo de investigadores, visitar la página web: <http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/>

Incluso Behr, Harel, Post y Lesh (1992) en la época de los noventa afirmaron que, entre otras cosas, la falta de un consenso para enseñar los conceptos de número racional y fracción es uno de los motivos por los que el aprendizaje de los números racionales ha llegado a ser un serio obstáculo en el desarrollo matemático de los niños.

En términos de Kieren (1976, 1988) los subconstructos de los números racionales son: medida, cociente, razón y operador, y Behr, Lesh, Post y Silver (1983) consideran además la relación parte todo. Mientras que, Freudenthal (1983) distingue aspectos principales de las fracciones, tales como: la fracción como fracturador, la fracción como comparador, la fracción como medidora y la fracción como número racional. Esta distinción se hace partiendo desde expresiones que se usan en el lenguaje cotidiano hasta su formalización, es decir, las fracciones como elementos de clases de equivalencia.

Un tercer aspecto a subrayar se refiere a los efectos que han tenido las investigaciones desarrolladas en las reformas educativas, ya que se han incorporado en el currículo diversos métodos y modelos de enseñanza que incluyen diferentes usos y significados de las fracciones.

1.1. Objetivos de la investigación

Entre los cambios curriculares, en las dos últimas décadas se ha propuesto hacer uso de herramientas tecnológicas para enseñar matemáticas, debido a que hay evidencias de que son un recurso cognitivo para el aprendizaje [ver por ejemplo Kieran y Yerushalmy (2004) y Santos-Trigo (2004)]. En esta dirección se puede preguntar si existen herramientas de este tipo para enseñar fracciones con el propósito de apoyar la constitución de mejores objetos mentales de los estudiantes que cursan los últimos años de la educación primaria, de manera que permitan reestructurar la enseñanza de las fracciones en este mismo nivel escolar.

Para responder a la cuestión, se ha hecho una búsqueda de recursos en la web. En ella se ha encontrado un número considerable de applets relacionados con las fracciones. Su diseño varía desde la inclusión de una tarea en la que el estudiante efectúa algunas acciones para resolverla, hasta la estructuración de secuencias de aprendizaje con una intencionalidad didáctica que va más allá del mero juego. Sin embargo, existe poca información sobre el efecto que esas herramientas digitales tienen en la enseñanza y en el aprendizaje de dichos números.

Conde, Parada y Liern (2016) dan cuenta del efecto que tiene el uso de herramientas tecnológicas para enseñar fracciones. Los autores proponen actividades que promuevan el aprendizaje de las fracciones a partir de su vínculo con la música, para ello emplearon artefactos computacionales. Como resultado de su estudio afirman que los artefactos usados además de favorecer la comprensión de los conceptos que se instruyen y de establecer “una relación entre artefactos simbólicos (figura-fracción), también tiene un significado de medida asociado al tiempo de duración de un sonido” (p. 18). Es decir, proporciona herramientas que favorecen el conocimiento de los alumnos que no se construye cuando se trabaja con papel y lápiz.

Por otro lado, Ozel, Ozel y Cifuentes (2014) realizan un estudio comparativo entre dos grupos, uno en el que se enseña de forma tradicional y otro en el cual se utilizan manipulativos virtuales para apoyar el estudio sobre las operaciones con números racionales. Los investigadores informan que obtuvieron mejores resultados en el grupo experimental, es decir, en aquel en el cual se utilizan los manipulativos virtuales. Ellos afirman que “las herramientas de aprendizaje en línea, tales como videos dinámicos y manipulativos virtuales proveen una mejor comprensión de las matemáticas. Por lo tanto, los profesores deben considerar la incorporación de este tipo de herramientas en sus aulas” (p. 13).

Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente, los autores de este documento diseñaron un proyecto de investigación cuyo objetivo general es diseñar y desarrollar una secuencia de enseñanza

usando applets para mejorar los objetos mentales de los alumnos de los últimos grados de la educación primaria y los primeros de secundaria. Esto permitirá caracterizar las actuaciones de los estudiantes al usar applets que complementan la enseñanza de algunas nociones sobre las fracciones.

Para lograr el objetivo formulado se llevan a cabo las siguientes fases: 1) construir los componentes de un Modelo Teórico Local inicial sobre las fracciones y su enseñanza, 2) diseñar una secuencia didáctica basada en applets, 3) poner a prueba la secuencia didáctica y 4) analizar las actuaciones de los estudiantes.

En las siguientes secciones se describen aspectos de cada una de estas fases, así como los resultados obtenidos en cada una de ellas. En relación con la primera fase se delinean los marcos de referencia teóricos que sirven de sustento para la construcción del Modelo Teórico Local inicial de las fracciones y su enseñanza, los cuales fundamentan el análisis de los applets que tienen intenciones didácticas y que se encuentran en la web, así como la delimitación de criterios para la estructura de un modelo de enseñanza. De la segunda fase se describen los componentes del diseño de los applets que se construyen y cómo se estructura la secuencia de enseñanza. Por último se exponen los resultados obtenidos a partir de la experimentación de la primera etapa de la secuencia, correspondiente a la tercera y cuarta fase del proyecto.

2. Los Modelos Teóricos Locales

En las investigaciones que se hacen tomando como marco de referencia la teoría de los Modelos Teóricos Locales (MTL), de acuerdo con Filloy, Rojano, Puig y Rubio (1999) y las interpretaciones que hacen Fernández y Puig (2002), se asume una postura teórica por no utilizar teorías generales de enseñanza, aprendizaje o comunicación. Por el contrario, se trata de elaborar un MTL para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseñan ciertos contenidos matemáticos a determinados alumnos, pretendiendo que esos modelos sean adecuados para interpretar los fenómenos observados y así posteriormente proponer nuevos diseños experimentales.

La elaboración de modelos teóricos locales en una investigación juega un papel teórico y metodológico. Desde el punto de vista teórico "los MTLs sirven para caracterizar el tipo de investigación, su alcance y su fundamento" (Fernández y Puig, 2002, p. 399). En este caso, con los MTLs se puede enfocar el objeto de estudio a través de cuatro componentes interrelacionados: 1) modelos de competencia formal, 2) modelos de enseñanza, 3) modelos de procesos cognitivos, y 4) modelos de comunicación. Por otro lado, desde el punto de vista metodológico, por medio de los MTLs se organiza la investigación.

En la investigación descrita en este documento se toma como base teórica a la fenomenología didáctica de las fracciones desarrollada por Freudenthal (1983) para elaborar el componente de competencia formal (ver apartado 2.1). Este componente constituye el marco teórico de referencia para caracterizar los modelos de enseñanza existentes y los que se diseñen, ya que permite tener un panorama amplio sobre los usos y aspectos de las fracciones.

Para el desarrollo del componente de enseñanza se toma en cuenta: 1) la revisión de los planes y programas de estudio del nivel básico, con especial énfasis en los programas de sexto año de primaria; en este documento no se detalla la revisión hecha, pero como resultado de ese escrutinio se eligen los contenidos que se instruyen en la secuencia de enseñanza, así como la recta numérica como recurso didáctico; y 2) el análisis de applets para la enseñanza de las fracciones que se encuentran en Internet (ver apartado 2.2). El examen minucioso pretende identificar aquellos applets que pudieran favorecer la constitución de mejores objetos mentales de los alumnos sobre las fracciones. Dichos recursos digitales se toman como base para la construcción de nuevos applets, en los que se consideran tanto las limitaciones previamente identificadas, como lineamientos definidos a partir de los resultados del análisis para mejorar el diseño de los primeros con respecto al contenido.

Los modelos de cognición están constituidos por diferentes elementos, tales como tendencias cognitivas de los estudiantes al aprender las fracciones y los errores y dificultades que enfrentan al usar estos números. Para su estructuración se han considerado informes de otros investigadores como Streefland (1991), Figueras (1988, 1989 y 1995) y Cramer, Behr, Post y Lesh (1997). Sin embargo, la descripción de este proceso o sus resultados no se incluyen en este artículo, ya que el foco está puesto principalmente en los modelos de enseñanza.

Respecto a los modelos de comunicación se tiene en cuenta la interacción entre estudiante-applet, así como la información que los diseñadores de las herramientas tecnológicas pudieran comunicar a los estudiantes a través de este medio.

2.1. El componente formal del MTL y la fenomenología didáctica de las fracciones

En la fenomenología didáctica se pretende describir todos los fenómenos organizados por un concepto o medio de organización que se pueden encontrar, ya sea dentro o fuera del ámbito matemático. Sin embargo, presentar en su máxima extensión el análisis fenomenológico de las fracciones tal como lo expone Freudenthal (1983) o como lo reinterpretan Real y Figueras (2015) escapa del propósito de este documento, por ello se incluyen sólo ideas generales que son clave para identificar los aspectos de las fracciones que subyacen en los applets que se analizan y los que se construyen.

2.1.1. El uso de las fracciones en el lenguaje cotidiano

Freudenthal distingue algunos usos de las fracciones en el lenguaje diario, por ejemplo: *la mitad de...*, *un tercio de...*; y otros menos usuales como: *dos y un tercio veces de...* Estas expresiones se usan principalmente para *describir* o *comparar*, ya sea cantidades o valores de magnitudes.

Otros usos más elaborados de las fracciones aparecen en el lenguaje en frases como: *rodar $3\frac{1}{2}$ veces una rueda, girar $2\frac{1}{2}$ veces la llave en la cerradura, $2\frac{1}{4}$ veces de largo que...* En este caso se están describiendo o comparando procesos cíclicos o periódicos. Por medio de las expresiones: *35 millas por galón, 3 de 5 partes, cada tercer lote gana, dos tazas de harina por una taza de leche*, se están describiendo razones.

De acuerdo con Real y Figueras (2015), los tipos de fenómenos en los que aparecen algunas de las expresiones mencionadas en los párrafos anteriores se vinculan con los procesos matemáticos de describir y comparar.

2.1.2. La fracción como fracturador

Otro de los fenómenos que distingue Freudenthal es el de producir fracciones (fracturar), por medio de las cuales se relacionan las partes con un todo. Esto podría surgir a partir del reparto equitativo, la partición y de dividir cantidades o magnitudes con o sin resto. Fracturar puede ser irreversible, reversible o simbólico.

Según Freudenthal (1983) en el proceso de producir fracciones a partir de la relación de un todo y sus partes, el todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura. En este proceso de fractura la atención puede estar en una parte, un cierto número de partes o incluso en todas las partes. Las partes pueden estar conectadas o desconectadas, y el modo de dividir puede ser estructurado o no estructurado.

Es importante tener en cuenta que existen transiciones entre el todo discreto y continuo, en ocasiones hay objetos que pueden ser tan pequeños que hacen que el todo parezca continuo, como es el caso por ejemplo, de los granos de arena fina.

Los tipos de fenómenos vinculados a las fracciones como fracturador según Real y Figueras (2015) se refieren a los procesos matemáticos dividir, distribuir, medir y describir.

2.1.3. Las fracciones como comparador

Las fracciones sirven también para comparar cantidades, magnitudes u objetos que se separan unos de otros, ya sea por experimentación o de forma imaginaria. Dicha comparación se puede hacer de manera directa o indirecta. Además, estas comparaciones se pueden hacer entre los objetos respecto al número o al valor de la magnitud (la silla es la mitad de alta que la mesa) o entre los propios números o valores de magnitud (la altura de la silla es la mitad de la altura de la mesa).

En la medida en que el énfasis mental o experimental esté en algo dinámico o estático, la fracción aparece en un *operador* o en una *relación*: “partiendo por la mitad” –dinámico–, “la mitad de grande” –estático–. Tanto el *operador fracción*, como la *relación fracción* pueden actuar respectivamente sobre objetos y relacionar entre sí objetos, cantidades y valores de magnitudes. Si los objetos que se comparan son el todo y sus partes, o al menos así se considera, entonces la fracción aparece como *operador fracturante* (dinámico) o *relación de fractura* (estático). El operador fracturante actúa sobre objetos concretos rompiéndolos en partes equivalentes, por ejemplo, “partiendo en cuatro partes iguales un todo”. La relación de fractura relaciona las partes con el todo que ya fue dividido, por ejemplo, “el todo está dividido en cuatro partes iguales”.

Si el todo y las partes se consideran separados y un tercer objeto, digamos una vara de medir, media entre los dos objetos que son comparados, siendo transferida de uno a otro, o considerado como si se transfiriera, entonces se habla de la *fracción como relación razón*. Por ejemplo, para comparar la longitud de dos cables, se puede utilizar el metro, de tal forma que si un cable mide 10 metros y otro 2, entonces se puede decir que la longitud del cable más pequeño es un quinto de la longitud del más grande, ya que la relación 2 es a 10 es la misma que 1 es a 5, o sea que las fracciones $1/5$ y $2/10$ representan la relación razón de la longitud de los cables. Por otra parte, cuando se comparan cantidades y valores de magnitud, de manera que se transforma un número, una longitud, o un peso en otro, es decir, coloca los valores de magnitud o cantidades en una razón, unas respecto de otras, entonces la fracción aparece como *operador razón*. Por ejemplo, el 25% de los habitantes de Valencia son alumnos, si el total de la población son 800.000 habitantes, para saber el número de ellos se tendría que multiplicar $25/100$ o $1/4$ por 800,000 para obtener 200.000 alumnos.

De la relación razón establecida entre objetos se puede pasar al operador razón, esto mediante un estadio intermedio de la *fracción como transformador*, como por ejemplo, prolongando $2 \frac{1}{2}$ veces una magnitud o cantidad. Esta operación se realiza sobre el objeto mismo, aunque no por ruptura como en el caso de operador fracturante, sino como aplicación y deformación. En el ejemplo de relación razón sobre la longitud de los cables se puede observar este estadio intermedio, ya que una vez establecida la relación razón, se puede pasar a operador razón, transformando $1/5$ de 10 metros en 2 metros.

2.1.4. La fracción como número

El *operador fracción* aparece en el campo de los números, ya sea como *medidora* que precede a una magnitud, por ejemplo $\frac{1}{2}$ kg, como inverso del operador multiplicación, y la fracción como un número racional. A este fenómeno se le llama el *operador fracción formalmente definido*.

2.2 El componente de enseñanza del MTL

Como ya se mencionó el componente de enseñanza del MTL se construye por medio de dos partes. Una de ellas se refiere a modelos del nivel básico utilizados para la enseñanza de las fracciones tanto en México, como en España. En esta parte se hace una revisión de los planes y programas de estudio con especial énfasis en los programas de sexto año de primaria, enmarcada en el componente formal. Los resultados de este análisis permitieron identificar los contenidos que se estudian en ese grado y los recursos didácticos que se usan en la enseñanza. Así mismo, permitieron identificar la recta numérica como un recurso didáctico que está poco valorado en los modelos mexicano y español en comparación con el uso del “modelo del pastel”. En el apartado 3 se profundiza en la fundamentación del uso de la recta numérica como recurso didáctico en la enseñanza.

La otra parte constitutiva del componente de enseñanza versa sobre el análisis de applets para la enseñanza de las fracciones que se encuentran en la web. En la siguiente sección se describe el análisis de dos applets en los que la recta numérica juega un papel principal.

2.2.1 Análisis de applets situados en la web como elemento del componente de enseñanza

Los applets de uso libre cuyo análisis se describe en este documento fueron creados en el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España². Los principales motivos de selección de este conjunto de applets son: 1) la facilidad para acceder a ellos, 2) están estructurados como una secuencia de aprendizaje que incluye diferentes usos y aspectos de las fracciones, y 3) se proponen como actividades complementarias de las lecciones de los libros de texto mexicanos avalados por la Secretaría de Educación Pública.

La secuencia de aprendizaje del CNICE está estructurada en 6 unidades y 3 secciones adicionales, una de ellas está dirigida al profesor y las otras dos son de información para los usuarios. Cada unidad es una estructura integral denominada Menú y versa sobre una temática: 1) fracciones para medir, 2) fracciones para comparar, 3) fracciones equivalentes, 4) ordenar fracciones, 5) suma y resta, y 6) multiplicar y dividir. Cada Menú contiene 5 apartados: contenidos, actividades, práctica, test (un cuestionario de 15 preguntas que sirve de autoevaluación) y ejercicios para imprimir.

El análisis de los applets que se ha llevado a cabo se organiza por medio de las clases siguientes: 1) la información y descripción general del conjunto de applets, 2) indicaciones de la actividad o práctica, 3) el tipo de información que el applet proporciona al sujeto, 4) los aspectos de la fracción que están en juego, y 5) la tipificación de la interacción que puede tener el usuario con el recurso informático.

Para ilustrar cómo se ha realizado dicho análisis, en este documento se describen los componentes 2, 3, 4 y 5 de los applets Escalas del Menú 1 y Busca la fracción del Menú 4, ambos corresponden a la sección Práctica de las unidades correspondientes. En este artículo se ha elegido exponer los resultados del análisis de estos applets debido a que son dos en los cuales se incluye a la recta numérica como un medio de representación de las fracciones. El análisis de otros applets del CNICE se puede consultar en Valenzuela y Figueras (2015).

a) Applet 1. Escalas (Menú 1)

A continuación se describen los resultados encontrados para cada una de las clases tomadas en cuenta en el análisis del applet Escalas del Menú 1.

Indicaciones. En la pantalla del applet se muestra un segmento de recta y la indicación "escribe la fracción que representa el punto". En la parte media de la pantalla aparece la frase "pincha y completa" y con una flecha se señala el recuadro a completar. Como apoyo, en la parte superior izquierda, se sugiere: "pincha en el patrón indicado y verás que fácil", esta acción permite elegir distintas particiones del segmento (ver Figura 1).

El tipo de información que el applet proporciona al sujeto. En la imagen hay un recuadro en el que se debe colocar el numerador de la fracción escrita en forma simbólica, mientras que el punto variante aparece en una representación gráfica de un segmento de recta que contiene fracciones menores que la unidad y cuyo denominador ya está determinado por el applet, como puede verse en la Figura 1. Como apoyo para completar la fracción hay opciones para partir el segmento unitario en 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10 partes iguales. Para confirmar que la fracción escrita es la apropiada, el usuario debe pinchar un botón que dice "ya está". Si el resultado es correcto se muestra la leyenda "muy bien" y le da al usuario

² Para consultar los applets que conforman la secuencia de aprendizaje diseñada en el CNICE vaya a la dirección web: <http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menu.html>

la opción de seguir con otro ejercicio. Pero si el resultado es erróneo, aparecen la frase “no es correcto” y un botón con la opción de revisar, en el cual se muestra la respuesta correcta. Una vez consultada la respuesta se puede elegir otro ejercicio.



Figura 1. Primera imagen en la pantalla del applet Escalas (Menú 1)

El applet incluye 10 ejemplos. Las fracciones que aparecen son: $1/2$, $1/5$, $2/4$, $6/8$, $2/5$, $2/3$, $1/3$, $3/9$, $6/9$ y $1/4$. No se usan fracciones que tengan como denominador 6 o 10, por ello la partición del segmento en ese número de partes aparentemente está de más. Sería útil si la fracción $1/2$ se pudiera representar también como $3/6$, sin embargo el diseño del applet no lo permite, ya que el numerador fijo limita a escribir una fracción determinada.

El aspecto de la fracción. Con esta actividad se favorece que el usuario considere el aspecto de la fracción como número y su representación como un punto en la recta numérica. Para ubicar un punto, se sugiere hacer una partición del segmento en partes iguales, por ello el aspecto de la fracción es de operador fracturante; es el usuario quien decide la partición que ha de usar, aun cuando solo una corresponde al denominador de la fracción que se debe encontrar. La partición que se hace es reversible, pues se puede reconstruir el todo, e incluso si el usuario hace una estimación “a ojo”, la partición es simbólica. El todo –el segmento de recta equivalente a una unidad– es definido, continuo y con estructura lineal. Las partes que se eligen deben ser contiguas para poder ubicar el punto que representa a la fracción como el extremo derecho de la última parte seleccionada. Debido a que se puede medir usando “una regla graduada”, la fracción actúa como medidora (los segmentos unidad partidos en partes iguales que se encuentran encima de la recta numérica, ver Figura 1, funcionan como reglas con las cuales se puede medir el segmento que va del 0 al punto rojo).

La interacción del usuario con el applet. El usuario puede interactuar con el applet usando distintas particiones del segmento unidad con el fin de observar en dónde coincide el punto rojo con alguna de las líneas que dividen al segmento en partes iguales. Al coincidir dicho punto con alguna de las muescas de la partición que se corresponde con el denominador de la fracción que aparece en la pantalla (ver Figura 1), el usuario podrá contar las partes que quedan a la izquierda de ese punto y determinar el valor del numerador de la fracción que se debe completar, la cual a su vez representa al punto dado. O bien, él podría proponer una fracción, es decir un probable numerador y luego emplear la partición correspondiente a la indicada por el denominador de la fracción y verificar su estimación. Sin embargo, no es posible saber cuál es la estrategia que usó, a menos que se esté observando al usuario.

Una vez completada una tarea, el usuario podrá leer la fracción de manera simbólica y decodificarla de forma gráfica. Podría también explorar con las diferentes particiones para comparar fracciones y establecer equivalencias entre ellas, no obstante esta exploración no parece ser la intención de quien diseñó el applet, ya que únicamente se identifica como respuesta correcta una de las fracciones equivalentes posibles, la cual está determinada por el denominador que es fijo en cada tarea. Por último, el usuario es quien verifica el resultado presionando el botón "ya está". La herramienta permite que el alumno explore con las distintas particiones, sin embargo, un investigador o profesor no contará con datos sobre la interacción estudiante-applet.

b) Applet 2. Busca la fracción (Menú 4)

En las secciones siguientes se describen los resultados encontrados para cada una de las clases tomadas en cuenta en el análisis del applet "Busca la fracción", incluido como una práctica de la unidad correspondiente al tema ordenar fracciones, Menú 4.

Indicaciones. El esquema de este applet es similar al anterior. En la pantalla se muestra un segmento de recta con dos fracciones representadas, tanto con puntos en el segmento unidad, como en forma simbólica, y la indicación "busca una fracción que esté en la zona rayada" (ver la Figura 2).



Figura 2. Primera pantalla del applet "Busca la fracción" (Menú 4)

El tipo de información que el applet proporciona al sujeto. Hay dos recuadros en el que se debe colocar el numerador y el denominador de la fracción para expresarla en forma simbólica. Aparecen en el segmento unidad dos puntos variantes con su representación como fracción para delimitar un intervalo del segmento, denominado la "zona rayada", en el que está ubicada la fracción que el usuario debe encontrar. La mayoría de las fracciones que se muestran en el applet para indicar una parte del segmento están expresadas en forma reducida, es decir, el numerador y el denominador son primos relativos o dicho de otra manera, el máximo común divisor del numerador y el denominador es 1.

Para confirmar que la fracción escrita es la correcta el usuario debe pinchar un botón que dice "ya está". Si el resultado es correcto, aparece la leyenda: "muy bien", y se muestra la opción de seguir con otro ejemplo. Si el resultado es erróneo aparece el aviso: "no es correcto", y una opción para revisar la respuesta correcta. En el caso de oprimir el botón "solución", en el applet se representa la fracción de forma gráfica y simbólica y al lado de esta última representación aparece la leyenda "por ejemplo, esta es una solución", refiriéndose a la respuesta que en el applet se ha generado. Con la frase "esta es una solución" se pone de manifiesto que el recurso ha sido diseñado con la intención de permitir

diferentes respuestas como solución, pero solo se debe escribir una de ellas. El usuario puede explorar con las diferentes particiones y observar que existen más de una fracción en el intervalo indicado, pero el diseño del applet no permite saber si realmente hubo esta exploración. En el ejemplo que aparece en la pantalla de la Figura 2 se observa que cualquiera de las fracciones $2/5$, $4/9$, $4/10$, $3/8$ es una respuesta correcta, sin embargo, no hay manera de registrar o saber la fracción que ha escrito el usuario, ya sea correcta o incorrecta.

El applet contiene 10 ejemplos; las fracciones que limitan a la fracción que el usuario debe encontrar son:

$$\frac{1}{3}y\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}y\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{2}y\frac{6}{8}, \quad \frac{1}{4}y\frac{2}{5}, \quad \frac{2}{3}y\frac{4}{5}, \quad \frac{1}{8}y\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}y\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{9}y\frac{1}{2}, \quad \frac{6}{9}y\frac{8}{9}, \quad \frac{3}{4}y\frac{5}{6}$$

La mayoría de esas fracciones están escritas en forma reducida, sólo se han escrito dos fracciones cuyo máximo común divisor entre sus numeradores y denominadores es distinto de 1, estas son $6/8$ y $6/9$, quizá se expresan así porque las fracciones reducidas de éstas ya habían sido utilizadas. Solo dos pares de fracciones que representan el intervalo o espacio rayado tienen denominadores iguales, las demás tienen denominadores distintos. Pese a que ninguna de las fracciones consideradas por los autores del applet como extremos del intervalo en el que se debe ubicar la fracción tiene denominador 7, y que tampoco se muestra como opción una partición en 7 partes iguales, el usuario podría escribir como respuesta una fracción con denominador 7, por ejemplo, en el intervalo $1/3$ y $1/2$, una posible respuesta es $3/7$. Si el usuario escribe esta fracción, el applet reconoce la respuesta como correcta y representa el punto en el intervalo, pero no muestra la partición en el segmento de recta.

El aspecto de la fracción. En esta actividad se muestran gráficamente dos fracciones representadas como dos puntos en el segmento unidad. El diseño se enfoca en el orden de las fracciones de acuerdo con la posición que ocupa su representación en el segmento de recta, esto puede centrar la atención del estudiante sobre el aspecto de la fracción como número en la recta numérica, lo que Freudenthal llama aspecto formalmente definido. Debido a que se puede medir usando “una regla graduada”, la fracción actúa como medidora

Para ubicar dicho punto se sugiere hacer una partición del segmento unitario en cierto número de partes iguales, por lo que la fracción subyace en un operador fracturante, ya que es el usuario quien decide la partición del segmento, la relación además es dinámica. Si el estudiante hace la aproximación a ojo, sin ayuda de las herramientas del applet, entonces la partición es simbólica. El todo –el segmento unitario– es definido, continuo y tiene estructura lineal. Las partes que se eligen deben ser contiguas para poder ubicar el punto que representa la fracción que se encuentra en el intervalo indicado.

La interacción del usuario con el applet. La interacción del usuario se limita a indicar las partes en que se puede dividir el segmento unitario, a fin de observar cuando alguna de las muescas que dividen la unidad en partes iguales queda dentro del intervalo limitado por las fracciones representadas en el segmento unidad. El usuario podrá seleccionar cuantas veces quiera las particiones que se proporcionan en el applet como ayuda, así podría ver las fracciones que están dentro del intervalo según esas particiones, pero sólo puede escribir una de esas fracciones. También podría hacer una estimación y verificar usando las ‘reglas graduadas’ proporcionadas en la parte superior para verificar su aproximación, o bien proponer fracciones cuyo denominador sea diferente de las particiones que se muestran. Por ejemplo, en el caso del segmento rayado que está entre $1/5$ y $2/5$, el applet acepta la fracción $30/100$ y muestra el punto correspondiente dentro del intervalo determinado por esas fracciones, pero no la partición.

Al completar la actividad el usuario podrá leer la fracción escrita de forma simbólica y gráfica, así como comparar las tres fracciones a través de su representación en la recta numérica. Cabe mencionar que el

usuario es quien verifica el resultado, porque él manipula el botón “ya está”. Sin embargo, a menos de que se observe externamente la exploración que hace el usuario en el applet, las respuestas del alumno no quedan registradas, tampoco la exploración que el alumno hace en el applet.

c) Reflexiones sobre el análisis de los applets de la web

El análisis de applets de uso libre encontrados en la web condujo a la identificación de fenómenos o situaciones considerados en el diseño que podrían ser familiares para los alumnos. Por medio de estos recursos informáticos se posibilita la representación visual de dichas situaciones a través de animaciones, símbolos, gráficas o lenguaje escrito. Estos escenarios pueden ser un elemento que motive a los estudiantes, tanto a usar la tecnología, como a reflexionar sobre los diferentes aspectos del conocimiento acerca de las fracciones. El diseño de los applets permite al usuario explorar con diversas herramientas y descubrir diferentes características de las fracciones como se mencionó anteriormente, sin embargo el estímulo para llevar a cabo estas acciones no está incluido en la estructuración del recurso tecnológico analizado.

En términos generales las actividades que se proponen en los applets analizados permiten proponer otras tareas, ya sea con lápiz y papel o con los mismos recursos tecnológicos, que se refieran a contextos o situaciones que los alumnos pudieran haber experimentado en la vida cotidiana. Por ejemplo, se podría plantear una actividad en el contexto de una carrera de caballos, en donde el alumno podría representar la fracción del camino que ha recorrido el caballo 1 o el caballo 2, posteriormente hacer comparaciones entre éstas. El uso de manipulativos virtuales en tareas de este estilo posibilitan la visualización de acciones que se hacen sobre los objetos, por ejemplo: fracturar y comparar.

Por otro lado, algunas restricciones del diseño de los applets estudiados se refieren a la interacción estudiante-applets. Aun cuando es posible hacer exploraciones con las herramientas de los applets, el usuario debe dar una respuesta determinada a pesar de que existan otras u otros medios para responder a los cuestionamientos formulados. Por ejemplo, en el applet Escalas, el denominador es fijo, lo cual podría limitar al usuario a dividir al segmento sólo en las partes que se señalan en el denominador y dejar de explorar otras posibilidades. Además, tanto en el applet Escalas, como en el de Busca la fracción los puntos que representan las fracciones en el segmento se encuentran siempre entre 0 y 1, sólo se consideran fracciones propias.

Como sugerencias para el diseño de applets se pueden mencionar las siguientes derivadas del análisis de aquellos encontrados en la web: 1) considerar fracciones impropias y no limitarse al segmento unitario; 2) dejar a los usuarios que ubiquen los puntos en la recta numérica sin la ayuda de las particiones, es decir, favorecer la estimación “a ojo”; 3) la representación gráfica de las fracciones no debiera restringirse a la ubicación del punto en la recta, sino que es importante propiciar una reflexión sobre los valores de longitud que se representan en la recta; y 4) propiciar la exploración de los estudiantes con respecto al uso de diferentes particiones con la intención de que visualicen fracciones equivalentes y su representación en la recta numérica.

Finalmente, los applets cuyo análisis se detalla en este documento, no están diseñados para registrar datos sobre los procesos seguidos por los usuarios para resolver una tarea. Como se mencionó antes, existen diversas maneras de responder, y según cómo se responda subyace un uso particular de las fracciones. Tampoco es posible registrar el tipo de información o respuesta que los estudiantes encuentran durante el proceso de interacción estudiante-applet. Otra desventaja de los recursos tecnológicos analizados es que a pesar de ser de uso libre, su empleo requiere de una conexión a Internet. Como uno de los propósitos de la investigación en desarrollo es observar las actuaciones de los estudiantes durante la interacción estudiante-applet y poder trabajar sin conexión a Internet. Estas características de los applets estudiados se han considerado como limitaciones.

3. Diseño de una secuencia de enseñanza y la construcción de applets

En vista de las desventajas identificadas por medio del análisis descrito anteriormente, se decidió que para el diseño de la secuencia de enseñanza que se pondría a prueba para desarrollar la segunda parte de la construcción del MTL de las fracciones y su enseñanza, se construirían applets ad-hoc para los contenidos de las fracciones que se estudian durante el último año de la primaria. También se decidió que la estructura de los applets debería permitir hacer un registro de las respuestas de los alumnos, así como de evidencias de los procedimientos usados por ellos. GeoGebra es una herramienta, que aun cuando tiene restricciones de diseño de ambientación, tiene la ventaja de poder incluir códigos de programación para construir una base de datos de las actuaciones de los estudiantes. Un punto más a favor del uso de GeoGebra es que los applets diseñados con ese software pueden emplearse sin tener conexión a internet.

Es posible que los alumnos no estén familiarizados con el uso de GeoGebra, de tal manera que pueden enfrentar dificultades al usar sus herramientas, tales como los deslizadores, botones, casillas, y otros. Este aspecto se tomó en cuenta en el diseño de los applets a construir, ya que algunas de las indicaciones están formuladas para que en el proceso de la interacción estudiante-applet el alumno explore las herramientas utilizadas en el diseño.

La secuencia de enseñanza está formada por siete etapas. Cada una se estructura usando un applet que tiene un componente de exploración e interacción. A la vez se proporciona información para que los alumnos identifiquen y utilicen representaciones simbólicas y gráficas, distingan características de las fracciones propias e impropias, comparen fracciones y reconozcan otras particularidades que dependen del propósito de cada etapa. Otro componente del diseño, como ya se ha mencionado antes, está relacionado con la recogida de datos a través de la interacción estudiantes-applets. En esta parte del applet se incluyen indicaciones y preguntas para los estudiantes. Las respuestas se registran y se guardan en una base de datos. El análisis de esta información conduce a la caracterización de las actuaciones de los estudiantes; a la determinación de cómo se modifican los objetos mentales de los alumnos, en caso de que así sea; y a la identificación de estrategias de resolución de los alumnos.

Para diseñar la secuencia de enseñanza se usó principalmente la recta numérica como recurso didáctico. Aun cuando la representación de fracciones como puntos en la recta numérica es un contenido de los planes de estudio de los grados quinto y sexto de primaria en los currículos español y mexicano, la enseñanza en estos grados adopta otros modelos, en particular se sigue "abusando" del modelo del pastel, lo que podría influir en las dificultades que enfrentan los alumnos para representar fracciones como puntos en la recta numérica.

El recurso didáctico elegido para la secuencia de enseñanza podría permitir al alumno de manera general:

- i. visualizar de forma más natural las fracciones impropias;
- ii. proveer un acercamiento a la noción de densidad de los racionales;
- iii. reconocer fracciones como representantes de una clase, es decir, como representantes de un número racional;
- iv. comparar fracciones a través de la posición que ocupan como puntos en la recta o a través de los valores de magnitud asociados a los segmentos que éstas representan;
- v. modelar operaciones básicas de números (\mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q});
- vi. entender la relación entre las fracciones y los decimales.

Por otro lado, el uso de la recta numérica, así como de las fracciones como puntos de esa recta son conocimientos previos para el estudio de otros conceptos matemáticos, por ejemplo en el área de la geometría analítica, o bien en el cálculo diferencial e integral. Asimismo, el conocimiento de la recta

numérica es ampliamente usado en la vida cotidiana, ya que se emplea en la mayoría de los instrumentos que se usan para medir magnitudes, por ejemplo una regla o metro, el termómetro, el tensiómetro, el pluviómetro, y en cierto sentido el reloj de manecillas. Otro ámbito donde es ampliamente usado el conocimiento de la recta numérica se refiere a la investigación científica, ya que se usan instrumentos de medida más sofisticados y especializados. Actualmente la mayoría de estos instrumentos son digitales, sin embargo en donde se requieran escalas, se usará la recta numérica.

Cabe mencionar que además de los beneficios que puede aportar el trabajo con la recta numérica, en su uso como recurso didáctico es importante tener en cuenta las características propias de esta forma de representación de las fracciones en el diseño de los applets. Al respecto, Bright, Behr, Post y Wachsmuth (1988), afirman que este recurso didáctico difiere de los modelos de áreas y de conjuntos discretos en aspectos importantes, tales como:

- vii. En el modelo de la recta numérica la unidad está representada por una medida (longitud). Mientras que en los otros modelos la unidad es un área o un conjunto de objetos.
- viii. En el modelo de la recta numérica no hay una separación visual entre las unidades consecutivas, es decir, el modelo es totalmente continuo. En los otros modelos se puede ver una separación, ya sea entre las partes o entre unidades.
- ix. El modelo de la recta numérica requiere del uso de símbolos para transmitir parte del significado que se pretende, es decir, se requieren símbolos (numéricos) para definir la unidad, mientras que la unidad en los otros modelos está implícito.
- x. Además de sugerir una iteración de la unidad, las unidades en la recta numérica se pueden subdividir sin restricciones.

Otra característica que no mencionan los autores citados tiene que ver con la elección de las partes para representar la fracción en la recta numérica. El proceso de elección de las partes en este modelo debe ser contiguo y comenzar desde la elección de partes desde el cero, a diferencia del modelo de áreas o conjuntos, en donde la elección de las partes puede ser contiguo o no y se eligen las partes como se quiera. Así mismo, todo un conjunto de fracciones, puede ser representado por un mismo punto sobre la recta numérica.

Teniendo en cuenta las características del recurso didáctico que se emplea en la secuencia de enseñanza y lo que podría permitir a los estudiantes, en cada etapa de la secuencia se plantean de manera general los propósitos que se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Propósitos de cada etapa de la secuencia de enseñanza

<i>Etapas</i>	<i>Propósito General</i>
Etapa 1	-Observar las relaciones que existen entre el numerador, el denominador, los componentes de la representación simbólica, la posición de la fracción como punto en la recta numérica, el número de partes iguales en las que se divide la unidad y la magnitud del segmento azul que representa a la fracción.
Etapa 2	-Asociar el orden de las fracciones de acuerdo con la posición que ocupa el punto o las longitudes de los segmentos azules que se representan en el segmento de recta. -Acercar al alumno a la propiedad de densidad de las fracciones, específicamente para referirse a la cantidad de fracciones que hay entre dos números enteros.
Etapa 3	-Reconocer el segmento $[0,1]$ como unidad, para observar de manera explícita la relación entre el número de partes iguales en las que se divide la unidad y las partes que representa la fracción, ya sea a través del segmento azul o el punto rojo.
Etapa 4	-Distinguir entre fracciones propias e impropias a partir de sus características, ya sea en relación con la unidad o respecto a la relación entre numerador y denominador. Así como introducir la idea de fracciones equivalentes a partir de la equivalencia entre fracciones y números enteros.

Tabla 1 (continuación). *Propósitos de cada etapa de la secuencia de enseñanza*

<i>Etapas</i>	<i>Propósito General</i>
Etapa 5	-Consolidar las características de las fracciones propias e impropias, de manera que el alumno logre clasificarlas a partir de tales características.
Etapa 6	-Comparar y ordenar fracciones a partir de las características de sus numeradores y denominadores, de la longitud de los segmentos o de los puntos que representan a las fracciones en la recta numérica.
Etapa 7	-Desarrollar la idea de orden y de equivalencia de fracciones a partir de las características del segmento de recta utilizado para el diseño del applet.

Una descripción de aspectos tomados en cuenta para la construcción del applet por medio del cual se estructura la primera etapa de la secuencia de enseñanza (ver la Figura 3) se hará en este documento. La idea central es proporcionar un ejemplo de cómo se han construido los diferentes applets para cada una de las etapas de la secuencia. La exposición se hace considerando los siguientes componentes: los propósitos de la etapa, indicaciones de la actividad, elementos del diseño, y cuestiones para la reflexión.

3.1. Applet de la primera etapa

En la primera etapa de la secuencia, se despliegan dos líneas de acción paralelas, a través de una de ellas el estudiante se empieza a familiarizar con el entorno interactivo y por medio de la otra se introduce al estudiante en los procesos de representación de diferentes aspectos de la fracción en la recta numérica, así como en la asociación de éstos y el sistema matemático de signos de estos números. A continuación se exponen los componentes considerados para la construcción del applet que constituye la primera etapa.

Propósitos. Para esta etapa se propone que el alumno:

1. Observe el efecto que producen los deslizadores en la representación gráfica y simbólica de la fracción.
2. Reconozca la estructura simbólica de la fracción, y relacione el numerador y el denominador con el valor numérico que se asigna a los deslizadores.
3. Identifique las relaciones que existen entre el numerador, el denominador, los componentes de la representación simbólica, la posición de la fracción como punto en la recta numérica, el número de partes iguales en las que se divide la unidad y la magnitud del segmento azul que representa a la fracción.

En esta etapa se espera que el alumno explore el entorno interactivo usando las herramientas que tiene el software, que observe los efectos de su interacción con el applet y pueda describir los resultados de sus acciones sobre los objetos.

Indicaciones. Tres son las indicaciones para el usuario en este applet (ver Figura 3). La primera indicación tiene que ver con el propósito de observar los efectos que tienen los deslizadores y a su vez relacionar estos efectos con la escritura gráfica y simbólica de las fracciones.

En la segunda indicación se pide al usuario representar $1/2$ y $3/2$, con la intención de que observe que sí se pueden ver en el segmento de recta que se muestra en la pantalla, y posteriormente se pide representar $7/2$ para que reconozca que hay otras fracciones mayores que tres que no se podrán representar en el segmento de recta que aparece en la pantalla. La finalidad de esta segunda tarea es que no se acostumbren a fracciones que se pueden representar en el segmento de recta que se puede mostrar en la pantalla y que empiecen a relacionar la fracción con la idea de longitud.

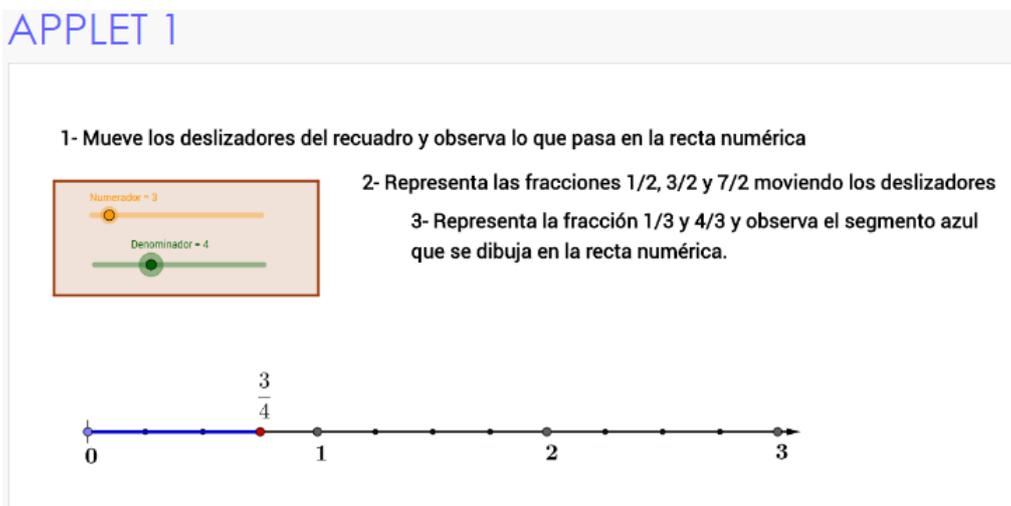


Figura 3. Applet de la primera etapa de la secuencia de enseñanza

La tercera indicación se formula con la finalidad de no sólo identificar el punto que representa la fracción en la recta, sino también fijar la atención del usuario en la longitud de los segmentos azules que representan la fracción, teniendo en cuenta la relación parte-todo, es decir, el número de partes en que se divide la unidad (denominador) y el número de partes que se toman (numerador).

Elementos del diseño. En la representación gráfica aparece un segmento con longitud tres unidades, de manera que las fracciones que se pueden representar en la recta y visualizar en la pantalla son las que se encuentran entre 0 y 3. La recta tiene como origen el 0, y no hay una flecha que indique continuidad hacia el lado izquierdo ya que no se pretende trabajar con números negativos. En cambio, en el otro extremo, el 3, aparece una flecha para indicar que la recta continúa.

El valor mínimo del deslizador que representa al denominador es 1 y el máximo es 10, mientras que el numerador tiene al 0 como valor mínimo y al 30 como máximo. Este valor máximo se podría dejar dependiente del denominador, es decir, de la forma $3n$, donde n toma los valores del denominador, sin embargo, se ha decidido que sea independiente para no limitarse a fracciones representadas en el intervalo $[0, 3]$. Cabe señalar que no se hace la representación gráfica de fracciones mayores a 3, pero sí se plantea una pregunta para reflexionar sobre este aspecto.

El diseño del applet centra la atención del estudiante sobre el aspecto de la fracción como número en la recta numérica, lo que Freudenthal llama aspecto formalmente definido. Pero también se considera la fracción como medidora, ya que se puede medir el segmento azul que va del 0 al punto rojo (el cual representa la fracción) con el segmento que representa a la fracción unitaria, la cual depende del denominador que el alumno elija, es decir, depende del número de partes en las que se divide la unidad, por lo que en el proceso de partición, la fracción subyace en un operador fracturante, ya que se parte cada segmento unitario en partes iguales, las cuales están determinadas por cómo se dividió el segmento unidad. El todo es indefinido, aunque la representación gráfica sea finita, la intencionalidad es que el todo se vea como indefinido, continuo y con estructura lineal. Las partes que se eligen deben ser contiguas para poder ubicar el punto que representa la fracción en la recta numérica.

Con esta etapa se pretende que el alumno relacione la representación de las fracciones (escritas de forma simbólica) en la recta numérica (representación gráfica) a través de la exploración. El usuario debe mover los deslizadores correspondientes al numerador y al denominador para formar la fracción que se representa como punto en la recta e identificar sus características cuando el numerador es menor que el denominador o viceversa, y así el alumno pueda observar aspectos como:

1. Identificar la relación entre la escritura simbólica de la fracción formada y su representación en la recta numérica, como punto sobre la recta y como la longitud del segmento formado por el 0 y la fracción determinada.
2. Dada una fracción con denominador n -fijo y un numerador m -variable, entonces conforme aumente m , el segmento azul es cada vez más largo (la fracción "va aumentando de tamaño", es decir las fracciones que van apareciendo van a ser mayores que la fracción dada). Al disminuir el numerador el segmento azul es menos largo o más corto (la fracción "va disminuyendo de tamaño", es decir las fracciones que van apareciendo son menores a la fracción dada). La misma reflexión se podría hacer para una fracción con numerador m -fijo y un denominador n -variable.
3. Hay fracciones producidas por los deslizadores que no son visibles en la pantalla, porque son más grandes que 3.

Para guiar a los estudiantes en la identificación de los elementos de las fracciones y de sus representaciones enunciadas anteriormente, se formulan las siguientes preguntas e indicaciones.

Cuestiones para la reflexión. Como puede verse en la Figura 4, se formulan 7 cuestiones para que el usuario reflexione sobre lo que ha observado durante la exploración e interacción con el applet. Se pretende que el estudiante al leer estas preguntas o indicaciones recurra cuantas veces sea necesario al applet para poder dar las respuestas.

1. Representa la fracción $1/4$. ¿Qué pasa con la fracción si mueves el deslizador del numerador y dejas fijo el denominador?

2. Representa la fracción $7/8$. ¿Qué pasa con la fracción si mueves el deslizador del denominador y dejas fijo el numerador?

3. Representa la fracción $6/7$. ¿En cuántas partes se divide el segmento que empieza en 0 y acaba en 1? ¿Cuántas de esas partes están coloreadas?

4. ¿Qué pasaría si en el deslizador del denominador aparece el número 25?

5. ¿Qué pasa cuando el numerador es igual al denominador?

6. ¿Por qué no se puede ver en la pantalla la fracción $7/2$?

7. Escribe 2 fracciones que no puedas representar en la recta numérica que se muestra en la pantalla.

ACEPTAR

Figura 4. Cuestiones para reflexión de la primera etapa de la secuencia de enseñanza

Una vez que el usuario haya respondido a las preguntas o seguido las indicaciones, debe hacer clic en la palabra "ACEPTAR". Esta acción hará que las respuestas se almacenen en una base de datos. Si alguna de las casillas no fue contestada, aparece un mensaje advirtiendo que no se ha completado la actividad, por lo que el alumno no podrá pasar a la siguiente etapa, esto se hace con la intención de evitar casillas sin respuesta, pues en ocasiones se tiende a no responder. Si el usuario no contesta porque no sabe la respuesta, se les pide que conteste "no sé", "no se me ocurre", o una respuesta similar.

3.2. Primeros resultados de la validación de la primera etapa

La primera versión de la secuencia de enseñanza se puso a prueba, con la intención de validarla, en tres grupos de primer año de Educación Secundaria y un grupo de alumnos de segundo año que asistían al taller de regularización de matemáticas, en donde se estudian incluso contenidos de primer

año de secundaria. El rendimiento académico de estos alumnos se considera bajo, de acuerdo con los criterios de evaluación que sigue el profesor titular de los estudiantes. Los grupos pertenecen a una escuela pública de la ciudad de Valencia. La observación se puede considerar como un estudio piloto cuyo propósito es evaluar: 1) el nivel de dificultad de las preguntas que se plantean, el contenido que se trata y la estructura en que se formulan; 2) el funcionamiento de los applets; 3) la forma de almacenar la información; y 4) el análisis de las respuestas almacenadas atendiendo a la veracidad o elementos que se ponen en juego en las actuaciones de los estudiantes (basado en la representación de las fracciones, apoyado sobre la representación gráfica).

La secuencia de enseñanza se llevó a cabo en cinco sesiones. La primera sesión se dedicó a contestar un pretest, el cual fue administrado por el profesor titular. Tres sesiones se usaron para experimentar con los siete applets que se diseñaron, en estas sesiones participaron como monitores el profesor y quienes diseñaron la secuencia de enseñanza. En la última sesión se aplicó por parte del profesor titular un postest, el profesor únicamente participó como monitor y aplicador de los tests. En las pruebas se evaluaron contenidos diversos de las fracciones, entre ellos la representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica usando modelos continuos y discretos, la representación gráfica de fracciones a partir de su escritura simbólica usando modelos continuos, la representación de fracciones como puntos en la recta numérica, la identificación de fracciones en un intervalo y fracciones propias e impropias, y la resolución de problemas en los que subyacen las fracciones. Cabe señalar que la mayoría de los estudiantes no completó la secuencia de enseñanza. Uno de los principales motivos se refiere a la inasistencia de los alumnos a alguna de las clases.

En este documento se describen las primeras observaciones de este estudio piloto, en particular se describen aquellas relacionadas con el applet de la primera etapa de la secuencia de enseñanza, la cual fue completada por 28 alumnos. Así mismo, se mencionan las modificaciones realizadas a los applets que se consideran necesarias para mejorar su funcionamiento y comprensión de las nociones sobre fracciones que están en juego en ese recurso tecnológico.

Con respecto a la primera indicación (ver Figura 3), la que se refiere al uso de los deslizadores y su efecto sobre la representación simbólica de la fracción, se ha observado específicamente, que el deslizador del numerador se desliza muy rápido, esta situación provoca que la fracción representada se salga del intervalo $[0, 3]$ y los alumnos no aprecien con claridad ese cambio entre las fracciones visibles (las que están en el segmento de 0 a 3) y las no visibles en el segmento de recta (las fracciones que son mayores que 3). Otra restricción del uso de los deslizadores se puso de manifiesto con la pregunta ¿Qué pasa cuando el numerador es igual al denominador? Tres de los estudiantes respondieron a esa pregunta como: "no se puede" o "no pasa nada", ya que en vez de asignar a los deslizadores del numerador y denominador el mismo valor numérico, se centraron en la magnitud del segmento de tales herramientas (ver Figura 3) y trataron de igualar la posición de los puntos que se deslizan a través de ese segmento.

Debido a la primera observación, se propone diseñar un applet que se usará antes del descrito en el apartado anterior, en el cual se considere la dependencia del numerador con el denominador.

Las preguntas 1 y 2 son muy generales. Los estudiantes intentan responder con expresiones como "la fracción cambia", sin embargo se esperaba que pudieran hacer otro tipo de observaciones. Por ejemplo en el caso de la pregunta 1, se pedía que expresaran hechos como los siguientes: "cada vez que se aumenta el numerador, la fracción correspondiente aparece a la derecha de la anterior", "conforme aumenta el numerador, el segmento asociado a la fracción es cada vez más largo", "la fracción que aparece es mayor porque el punto está más a la derecha que el anterior", o bien observaciones más precisas como "si el numerador es mayor que 12, el punto que representa a la fracción ya no se ve en la pantalla".

La pregunta 3 la contestaron de manera correcta la mayoría de los alumnos, consideramos que es por la relación que tienen con el aspecto de la fracción como fracturador, es decir, donde se relaciona de manera directa el todo con las partes, ya que para responder, los alumnos identifican correctamente el número de partes en las que se divide el segmento unidad y las partes que se toman.

La pregunta 4 fue la que resultó más difícil para los alumnos, la mayoría de ellos respondió "no se puede porque el denominador sólo llega hasta 10". Esto podría ser una limitación del modelo que se empleó para el diseño, se deben propiciar los procesos de generalización de los alumnos. Aunque cabe señalar que hubo quienes respondieron con ideas relacionadas a lo que se esperaba como respuesta:

- "(En el deslizador no se puede). Pero me imagino que si el denominador fuera 25, las líneas de la recta numérica se dividirían en partes cada vez más pequeñas."
- "Que cada segmento se dividiría en 25 partes".
- "Pues que la fracción se partiría en 25 partes".

Se observa que para responder la pregunta siete la mayoría de los estudiantes se apoyaron en lo que se plantea en la pregunta seis, ya que una de las respuestas en la pregunta siete es $7/2$, pero también hubo quienes utilizaron las herramientas del applet, ya que dieron como respuesta fracciones del tipo $31/10$, que son fracciones que incluso ya no se podían escribir usando los deslizadores, otras del tipo $10/3$ y $11/3$, fracciones donde se dejó fijo el denominador, en este caso 3, y a partir de que el numerador tomó valores mayores a nueve la fracción se dejó de ver en el segmento de recta que está en la pantalla.

4. Conclusiones

En esta primera aproximación al uso de la secuencia de enseñanza estructurada con applets para apoyar la constitución de mejores objetos mentales de las fracciones de los estudiantes se puede hacer una reflexión en torno a tres temáticas. La primera versa sobre la familiaridad de los alumnos con el uso de recursos tecnológicos en el aula. En la observación llevada a cabo con este grupo de escolares se puso de manifiesto que ellos no están acostumbrados a trabajar con applets para llevar a cabo actividades matemáticas en el salón de clase y en consecuencia para construir conocimientos. Desde otra perspectiva, las herramientas que proporciona GeoGebra no les eran familiares, pero se pudo apreciar que después del segundo applet la mayoría de ellos se familiarizaron con el funcionamiento de dichas herramientas.

La segunda temática de reflexión es sobre la dependencia que los estudiantes tienen del profesor. Los alumnos, al principio, solicitaban el apoyo del profesor. No se logró determinar si era por dificultad a la hora de comprender las instrucciones, falta de interés o desconocimiento del entorno informático. No todos los alumnos recurrieron al interactivo para responder las preguntas. Una posible causa se encuentra en que no siempre era posible visualizar simultáneamente el applet y las preguntas. Esto lleva a pensar en un cambio en el diseño del applet, de manera que se vea todo en una pantalla y que no se requiera usar el desplazamiento de pantalla hacia arriba y hacia abajo.

Respecto a los conocimientos previos que tienen los estudiantes, es decir, respecto a la tercera temática considerada, se observó que 5 de los 28 estudiantes no reconocen el nombre de los elementos que componen el símbolo de las fracciones, ya que no los relacionaron con los deslizadores del numerador y del denominador que aparecen en los applets. En el pretest se observó que los alumnos no tenían conocimientos relacionados con la representación de las fracciones como punto en la recta numérica, ya que la totalidad de alumnos dejaron sin respuesta las preguntas de esa sección. Después de la experimentación se aplicó un postest, en el cual la mayoría de los alumnos

respondieron correctamente a cuestiones que evalúan la representación de fracciones en la recta numérica. Falta hacer un análisis detallado de las actuaciones de los alumnos tomando en cuenta una revisión desde el pretest, y la interacción alumnos-applets en cada una de las etapas de la secuencia didáctica, hasta el postest.

Las observaciones descritas en esta parte del artículo serán una guía importante para mejorar el diseño de los applets y en consecuencia de la secuencia didáctica para la siguiente fase de la investigación.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación con referencia: EDU2012-35638 del Plan Nacional de I+D+i.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgar el apoyo económico en modalidad beca mixta para la realización de estancia en el extranjero del becario cuyo número de registro es 230188.

Referencias

- Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press. Recuperado de: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/83_1.html
- Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing. M. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_1.html#top
- Bright, G., Behr, M., Post, T. y Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 215–232. <http://dx.doi.org/10.2307/749066>
- Conde, A., Parada, S. y Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Actualidades Investigativas en Educación* 16(2), 1-21. <http://dx.doi.org/10.15517/aie.v16i2.23933>
- Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje* (Tesis de Doctorado). Universidad de Valencia, España.
- Cramer, K., Behr, M., Post T. y Lesh, R. (1997). *Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades - Level 1*. Dubuque, IA: Kendall/Hunt Publishing Co.
- Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5, 397–416.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales* (Tesis de Doctorado). Cinvestav, México.
- Figueras, O. (1989). Two different views of fractions: Fractionating and operating. En G. Vergnaud, J. Rogalski, y M. Artigue. (Eds.), *Actes de la 13eme Conference Internationale, PME* (pp. 268-275). Francia: G.R. Didactique, CNRS - Paris V.
- Figueras, O. (1995). 'Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto'. En F. Hitt, (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa I, XX Aniversario* (pp. 173-196). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E., Rojano, T. Puig, L. y Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech: D. Reidel.
- Kieran, C. y Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *the Future of the Teaching and Learning of Algebra: the 12th ICMI Study* (pp. 99–152). Dordrecht: Kluwer. http://dx.doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_6
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En R. A. Lesh, y D.A. Bradbar (Eds.), *Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop* (pp 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

- Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operationd in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam, y R.A. Hatrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323-371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ozel, S., Ozel, Z. y Cifuentes, L. (2014). Effectiveness of an Online Manipulative Tool and Students' Technology Acceptances. *International Journal of Educational Studies in Mathematics* 1(1), 1-15.
<http://dx.doi.org/10.17278/ijesim.2014.01.001>
- Real, R. y Figueras, O. (2015). A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of didactical phenomenology. Pre-proceedings of CERME9. Recuperado de www.cerme9.org/products/wg2/
- Santos-Trigo, M. (2004). Students' Processes of Reconstructing Mathematical Relationships Through the use of Dynamic Software. En D. E. McDougall, y J. A. Ross (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 475- 489). Toronto: OISE/UT.
- Siegler, S., Duncan, J., Davis-Kean, E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., et al. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Journal of the Association for Psychological Science*, 23(7), 691-697.
<http://dx.doi.org/10.1177/0956797612440101>
- Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Dordrecht Heidelberg London: Springer New York.
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0591-8>
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of development research*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-3168-1>
- Valenzuela, C. y Figueras, O. (2015). El Uso de Applets para la Enseñanza de las Fracciones. En C. Acuña, M. Rigo y E. Sánchez (Eds.): *Memorias del III Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa* (pp. 1-11). México: Cinvestav.

Carlos Valenzuela García. Estudiante de doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav). Actualmente realiza una estancia en la Universidad de Valencia, en la que participa en el proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación con referencia: EDU2012-35638 del Plan Nacional de I+D+i.

Email: carvaga86@hotmail.com

Olimpia Figueras. Investigadora del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav). Entre sus líneas de investigación se encuentra la que se centra en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y las estructuras numéricas, así como en el desarrollo del pensamiento numérico en el aula. Ella ha dirigido y colaborado en diversos proyectos de investigación y de desarrollo curricular, tanto en México, como en España. En el Departamento de Matemática Educativa también participa en la formación de investigadores en educación matemática a través de los programas de estudio de maestría y doctorado de la institución.

Email: figuerao@cinvestav.mx

David Arnau Vera. Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València. Su investigación se centra en el área de pensamiento numérico y algebraico y en la enseñanza-aprendizaje de resolución de problemas mediante sistemas inteligentes.

Email: david.arnau@uv.es

Juan Gutiérrez-Soto. Licenciado en Matemáticas y Doctor en Físicas. Profesor en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos mediante el uso de apps.

Email: juan.gutierrez-soto@uv.es