# DECONSTRUCCIÓN DE UNA TAREA

Pedro Gómez y Gonzalo Henao

En este documento, introducimos y ejemplificamos la noción de deconstrucción de un problema de las matemáticas escolares. Para ello, presentamos el problema de la gestión de aula en matemáticas, establecemos la noción de tarea de matemáticas y revisamos la literatura sobre las demandas cognitivas de una tarea en matemáticas. Con base en esa información, introducimos la noción de deconstrucción de una tarea y la ejemplificamos con una parte de un problema Sigma. La deconstrucción de una tarea se basa en el procedimiento del análisis didáctico (Gómez, 2007) y se fundamenta en las nociones y procedimientos que configuran los análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Finalmente, describimos cómo se diseña la implementación de la tarea con base en la información anterior.

## PROBLEMA

La gestión en el aula de un problema de matemática es un proceso complejo. El procedimiento usual con el que un profesor aborda este problema consiste en organizar a los estudiantes para trabajo individual, dar un tiempo para que los estudiantes intenten resolverlo, recoger los errores y corregirlos en el tablero. Este puede ser el caso con el problema que presentamos a continuación.

*Sub-problema 1 del problema Sigma Competencia de atletismo*

Luego de un año de la fusión de las empresas A y B, Manuela y Pablo deciden organizar un bazar. El bazar tiene como propósito integrar a los empleados y sus familias. Una de las actividades programadas para el bazar consiste en una carrera de atletismo de 5000 metros. Jorge está realizando una práctica profesional (pasantía) en el área de telecomunicaciones en la empresa de Pablo. Jorge acepta la invitación de Pablo para participar en la carrera de atletismo. Pablo también es uno de los competidores.

Sub-problema 1

Jorge y Pablo tienen diferentes estrategias para correr de acuerdo a su preparación física. Las funciones que describen la distancia recorrida en metros de Pablo y Jorge en función del tiempo $t$ (medido en minutos) para cada uno de los de los corredores está dada por las funciones

$$P(t) = \begin{cases} -25(t-10)^2 + 2500 & 0 \leq t \leq 10 \\ 24(t-10)^2 + 2500 & t > 10 \end{cases}$$

En el caso de Pablo y

$J(t) = 250\mathrm{t}$

Para el caso de Jorge.

¿Cuál será la situación de la carrera transcurridos 10 minutos?

El profesor se puede limitar a entregar el problema a sus estudiantes sin dar más explicaciones. En muchos contextos, los estudiantes se han acostumbrado a resolver los problemas mediante procedimientos rutinarios en los que plantean una serie de operaciones aritméticas o algebraicas a partir de la información que reconocen en el enunciado del problema. Si esta estrategia no les permite resolverlo, ellos acuden al docente para que le ayude a resolver el problema. Es común que el profesor opte por darle la solución al estudiante cuando ve que este no logra encontrar una solución.

Esta forma de gestionar la enseñanza y el aprendizaje dentro y fuera del aula genera dudas sobre los resultados que se pueden obtener en el aprendizaje de los estudiantes. El profesor debería tener claro lo que espera que sus estudiantes aprendan (objetivo de aprendizaje), conocer en profundidad el contenido matemático que está implicado en el problema, prever las posibles actuaciones de los estudiantes al abordar el problema (estrategias de solución y errores) y diseñar las ayudas que les puede proporcionar para contribuir a que superen sus dificultades. Con esta información, el profesor puede diseñar la temporalidad con la que los estudiantes deben abordar el problema (etapas), los esquemas de agrupamiento con los que estudiantes resolverán el problema en cada etapa, los tipos de interacción que quiere promover en esas etapas y su actuación a lo largo de las sesiones para ayudar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Hemos desarrollado el procedimiento de deconstrucción de una tarea como estrategia para que un profesor analice el contenido implicado en un problema y establezca las demandas cognitivas del problema, de tal forma que pueda, a partir de esa información, diseñar la gestión del problema en clase. Por consiguiente, el procedimiento de deconstrucción de un problema tiene dos propósitos: (a) establecer las demandas cognitivas y (b) diseñar la gestión en clase del problema. A continuación, delimitamos la noción de tarea que utilizaremos en este documento y fundamentamos nuestra propuesta en la literatura sobre las demandas cognitivas de una tarea. Con base en esas ideas, introducimos la noción de deconstrucción de una tarea.

# Noción de tarea

El término "tarea" tiene diversos significados en el entorno educativo. En Colombia, el significado usual de tarea se refiere a los deberes que el profesor asigna a los estudiantes para que ellos realicen en su casa y presenten en la siguiente sesión de clase. En algunas ocasiones, también hace referencia a los ejercicios rutinarios que el profesor asigna a los estudiantes durante una clase. Nosotros utilizamos una noción de tarea con un significado más amplio. Como lo explicamos anteriormente, las tareas son el elemento central del proceso de enseñanza y aprendizaje. Aunque hay diferentes tipos de tareas, nosotros centramos nuestra atención aquí en las tareas de aprendizaje. Las tareas de aprendizaje son aquellas tareas que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que ellos logren las expectativas que ha establecido y superen sus limitaciones de aprendizaje. Una tarea de aprendizaje tiene un contenido matemático, implica un requerimiento de acción por parte de los estudiantes y pretende contribuir a su aprendizaje. Nosotros concretamos esta idea con una condición adicional: una tarea solicita la solución de un solo requerimiento (pregunta) con base en una información dada. Por consiguiente, aún si tienen el mismo contexto y la misma información de partida, dos preguntas en relación con ese contexto y esa información determinan dos tareas diferentes.

Si retomamos el caso del sub-problema 1 del problema Competencia de atletismo que presentamos anteriormente, observamos que ese sub-problema implica una tarea de aprendizaje relacionada la descripción de la situación de la carrera transcurridos 10 minutos de iniciada.

## ANÁLISIS COGNITIVO DE UNA TAREA

Las nociones de demanda cognitiva de una tarea y de análisis de instrucción de una tarea comenzaron a desarrollarse en la Educación Matemática en los años 70 en el área de la Educación Matemática (Greeno, 1987; Resnick, 1975, 1984; Resnick, Wang y Kaplan, 1973). Estas primeras aproximaciones tenían un corte conductista que seguían las ideas seminales de Bloom (1956). No obstante, estas ideas se han desarrollado desde otras perspectivas, particularmente una aproximación cognitiva al análisis de tareas (Henningsen y Stein, 1997; Winn, 1990). Por ejemplo, se ha establecido la idea de las redes de pensamiento y estrategias para resolver una tarea (Schoenfeld, 1987). Se comienza a desarrollar entonces las nociones de análisis cognitivo de las tareas que buscan establecer los procesos psicológicos implicados como descripciones de las actuaciones de los sujetos (Resnick, 1975). De esta forma, Gardner (1985) introduce la noción de análisis de instrucción de una tarea como su "descomposición en las sub tareas que la componen… con el propósito de su enseñanza" (p. 157). Algunos expertos sugieren que este trabajo se realice por expertos (Clark, Feldon, van Merriënboer, Yates y Early, 2008) y lo llaman análisis cognitivo de tareas. Por otro lado, en su trabajo seminal, Doyle (1988) define el nivel cognitivo de una tarea académica como "los procesos cognitivos que los estudiantes deben realizar para resolverla" (p. 170).

Stein, Grover y Henningsen (1996) justifican la importancia del análisis cognitivo de una tarea con base en su influencia en el aprendizaje de los estudiantes porque permite establecer qué es lo que pueden aprender y distinguir aquellas tareas que contribuyen a la construcción profunda de significado (p. 459). De esta forma, es posible establecer categorías de las tareas según su demanda cognitiva (Stein, 2000). Estas categorías han sido refinadas recientemente por Boston y Smith (2009). Estas ideas han sido utilizadas en diversos estudios recientes (p. ej., Charalambous, 2008; Johnson, 2007).

Las ideas que presentamos en este documento se enmarcan en el contexto de investigación que acabamos de describir. Nuestro propósito consiste en caracterizar una tarea desde las dimensiones del currículo (conceptual, cognitiva, formativa y social, Rico, 1997a). Para ello, nos basamos en el modelo del análisis didáctico (Gómez, 2007) y utilizamos como herramientas de análisis de la tarea algunos de los organizadores del currículo (Rico, 1997b) que configuran el modelo del análisis didáctico en cada una de sus dimensiones. El modelo del análisis didáctico se ha utilizado en planes de formación de profesores de matemáticas como procedimiento para el diseño de tareas y de unidades didácticas (Gómez y González, 2013). En este caso, utilizamos este modelo en otro sentido: partir de una tarea, establecer sus elementos y fundamentos, identificar sus demandas cognitivas y usar esta información para diseñar su implementación. Denominamos este proceso como la *deconstrucción de una tarea*.

# DECONSTRUCCIÓN Y CARACTERIZACIÓN COGNITIVA DE UNA TAREA

Inspirados en las ideas anteriores, introducimos las nociones de deconstrucción y caracterización cognitiva de una tarea. Caracterizar cognitivamente una tarea implica, en primera instancia, delimitar el contenido al que se refiere y caracterizarlo. En segunda instancia, y con base en esa información, caracterizar cognitivamente una tarea implica establecer las expectativas de aprendizaje a las que quiere contribuir y las limitaciones de aprendizaje que pretende ayudar a superar. Finalmente, esta caracterización también implica organizar esas expectativas y limitaciones de tal manera que se pongan de manifiesto las diferentes estrategias que los estudiantes pueden activar al abordar la tarea. Por consiguiente, para caracterizar cognitivamente una tarea, es necesario establecer las siguientes cuestiones.

1. Los conceptos, procedimientos, sistemas de representación y fenómenos que están implicados en la tarea.
2. Las estrategias y formas de pensamiento que los estudiantes pueden activar y poner en juego al abordar la tarea.
3. Los conocimientos y el pensamiento que ponen en juego en cada paso de una estrategia.
4. Los errores en los que pueden incurrir al activar una capacidad o un criterio de logro.
5. Su grafo de criterios de logro.

Utilizamos la noción de *camino de aprendizaje* para caracterizar las diferentes estrategias que un estudiante puede utilizar al abordar una tarea. Los caminos de aprendizaje están compuestos por una sucesión de *capacidades*. Estas dos nociones se encuentran descritas en detalle en Gómez, González y Romero (2014) y González y Gómez (2015). El análisis de cada camino de aprendizaje y la revisión de la literatura permiten establecer los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al activar algunas de las capacidades. Dado que una tarea suficientemente compleja puede implicar varias formas de resolverla, es posible establecer más de un camino de aprendizaje. Reunimos estos caminos de aprendizaje en un grafo de criterios de logro. Cada criterio de logro reúne sucesiones de capacidades que representan un procedimiento dentro de la estrategia de resolución (Romero y Gómez, 2015). La figura 1, muestra el grafo de criterios de logro del sub-problema 1 Competencia de atletismo. Esta tarea contiene tres caminos alternativos de solución.

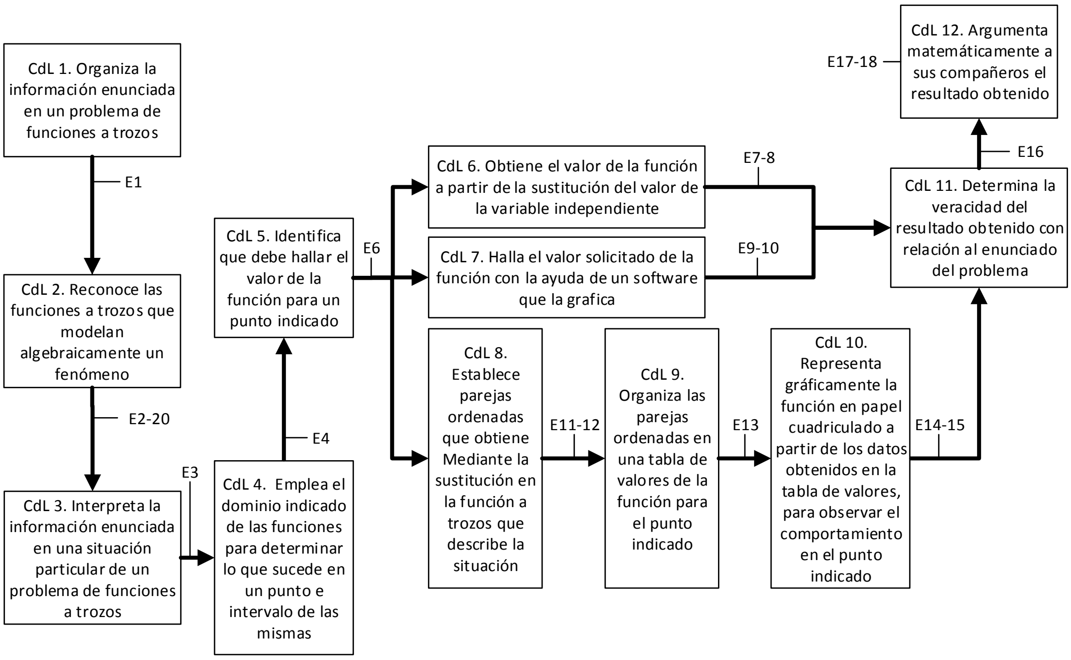


*Figura 1. Grafo de criterios de logro del problema 1 Competencia de atletismo*

Si analizamos la tarea que indaga por la situación de la carrera en el minuto 10, encontramos tres caminos de aprendizaje alternativos. El camino de aprendizaje de la parte superior CdL1-2-3-4-5-6-11-12, sugiere que el estudiante organiza la información del problema (CdL1), pero puede incurrir en el error de considerar sólo un segmento de la función (E1). Luego, el estudiante identifica la función definida a trozos que modela matemáticamente la situación planteada (CdL2), aunque puede reconocer sólo parte de las funciones que definen la función a trozos (E2) o abordar las funciones de la función a trozos como independientes (E20) e interpreta esta función (CdL3), pero desconoce que una función definida a trozos está definida por varias funciones (E3). Luego, el estudiante determina que debe hallar el valor de la función para un punto indicado (CdL4), por lo que decide obtener el valor de la función para ese punto, al sustituir el valor suministrado para la variable independiente (CdL6). Él puede incurrir en los errores de reconocer sólo parte del dominio y recorrido de la función, principalmente cuando la función presenta discontinuidad (E4) o confundir si el valor indicado en el problema pertenece a la variable dependiente o independiente. Seguidamente, el estudiante comprueba la veracidad de la respuesta con relación al enunciado del problema (CdL11). Sin embargo, puede producir una respuesta inconsistente con la pregunta (E16). Finalmente, el estudiante es capaz de explicar con argumentos matemáticos la respuesta obtenida (CdL12). No obstante, el estudiante puede establecer ideas que carecen de argumentos (E17) o determinar una solución que no satisface las condiciones matemáticas del problema (E18).

El segundo camino alternativo CdL1-2-3-4-5-7-11-12, propone que el estudiante obtenga el valor solicitado de la gráfica de la función que hace con un software (CdL7), aunque puede digitar erróneamente las funciones en el software o programa (E9) o emplear una configuración del software que no le permite obtener una gráfica adecuada de la función (E10).

El tercer camino alternativo CdL1-2-3-4-5-8-9-10-11-12 insinúa que el estudiante obtenga las parejas ordenadas de la función (CdL8), las organice en una tabla (CdL9) y las represente gráficamente para observar el comportamiento de la función en el punto indicado (CdL10). Sin embargo, el estudiante puede emplear valores muy cercanos para la función que no le permiten obtener parejas suficientes para observar su comportamiento (E11) y obtiene parejas ordenadas mediante la sustitución que no corresponden a la función (E12). También, podríamos encontrar que el estudiante confunda los valores de la variable independiente con los de la variable independiente cuando los organiza en la tabla. También puede suceder que, cuando realiza la gráfica, el estudiante trace el eje de coordenadas $y$ con medidas diferentes para cada intervalo de la escala (E14) o que grafique solo algunas de las funciones que definen la función a trozos (E15).

De esta forma, los criterios de logro con sus errores asociados se organizan en caminos de aprendizaje, que describen las alternativas de solución de la tarea. Si se organizan los caminos de aprendizaje, obtenemos el grafo de criterios de logro de la figura 1. A continuación, describimos el procedimiento de análisis que da lugar a la información que acabamos de presentar.

# PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La caracterización cognitiva de una tarea implica un procedimiento de análisis de la tarea y del tema de las matemáticas escolares al que se refiere. La información que surge de esos dos análisis se relaciona de manera cíclica. El propósito de ese procedimiento consiste en identificar las estrategias de resolución de la tarea con base en las capacidades y los errores correspondientes.

**Delimitación del tema y análisis de contenido**

El primer paso del procedimiento consiste en delimitar el tema al que la tarea se refiere. Esto implica establecer la estructura matemática que sirve de contexto para la tarea. De esta forma, se busca identificar el tema de las matemáticas escolares al que se refiere la tarea y su relación con otros temas de las matemáticas escolares. Una vez que se ha delimitado el tema, es necesario caracterizar el contenido que se encuentra implicado en la tarea. Para ello, utilizamos el procedimiento del análisis de contenido propuesto por Cañadas, Gómez y Pinzón (2015). El lector encontrará en este documento la descripción detallada de las nociones y los procedimientos que utilizamos en este apartado.

El procedimiento de análisis de contenido implica determinar los conceptos y procedimientos que están implicados en el tema. También es necesario identificar las diferentes maneras en que el tema se puede representar. Finalmente, se debe establecer las relaciones entre el tema y los fenómenos (matemáticos y no matemáticos) que le dan sentido. Es decir, se deben identificar los contextos en los que el tema se puede usar o en los que el tema permite resolver problemas. En otras palabras, el análisis de contenido de un tema consiste en establecer, para el tema,

1. sus conceptos y procedimientos y sus relaciones,
2. los sistemas de representación más relevantes para el tema y
3. los fenómenos para los que el tema sirve de modelo y las relaciones entre esos fenómenos y el tema.

A continuación, ejemplificamos el análisis de contenido para el sub-problema 1 Competencia de atletismo. Inicialmente, describimos los conceptos, procedimientos y sus relaciones para el tema relacionado con el sub-problema.

*Conceptos, procedimientos y sus relaciones*

Una función definida a trozos se expresa con una notación funcional común, donde el cuerpo de la función es una lista de expresiones matemáticas asociadas a un subdominio o intervalo. La variable independiente $x$ se usa para las distintas expresiones de la función $(f(x)\ o\ y)$ con una condición que especifica su dominio de aplicación.

La gráfica de una función definida a trozos es continua en un intervalo, si está definida en todo el intervalo, y no hay discontinuidad en ningún punto extremo de los subdominios en ese intervalo. Una función definida a trozos puede ser continua para todos sus subdominios, pero no ser continua en todo su dominio.

La representación gráfica de las funciones definidas a trozos nos permite realizar el análisis de su comportamiento en un punto o en un intervalo. Las tareas relacionadas con el tema son las situaciones que plantean un modelo matemático en su enunciado. Por esta razón, los estudiantes deben conocer su definición para lograr extraer su representación simbólica y establecer los procedimientos para su representación gráfica y análisis del comportamiento en el punto o intervalo indicado. En la figura 2, consolidamos la estructura para la función definida a trozos.

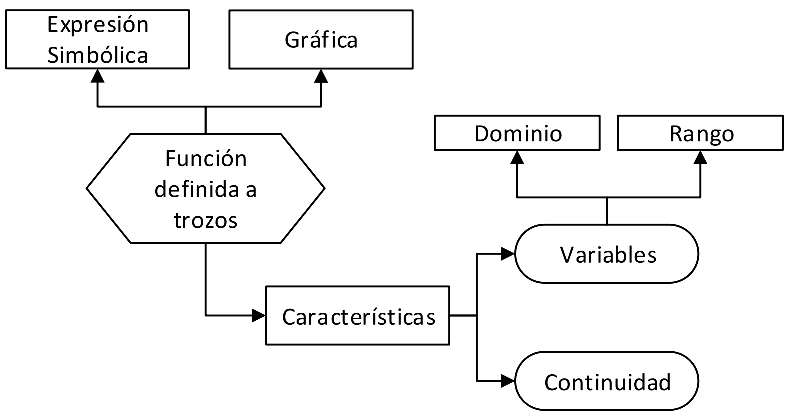


*Figura 2. Estructura conceptual de la función definida a trozos*

Simplificamos las relaciones entre los principales conceptos del tema función definida a trozos. Pretendemos que el estudiante sea capaz de emplearlos para resolver situaciones problema que involucran el tema.

*Sistemas de representación para el sub-problema 1 Competencia de atletismo*

En la figura 3, presentamos los sistemas de representación de la función definida a trozos, sus signos y las traducciones presentes entre ellos a través de las líneas punteadas. Identificamos un sistema de representación simbólico que emplea números, letras y símbolos pertenecientes a las operaciones aritméticas para constituir sus signos. Estos signos constituyen la función definida a trozos mediante la expresión algebraica

$$f(x) = \begin{cases} función_1, para\ el\ intervalo\ 1 \\ función_2, para\ el\ intervalo\ 2 \\ \ldots \\ función_n, para\ el\ intervalo\ n \end{cases}.$$

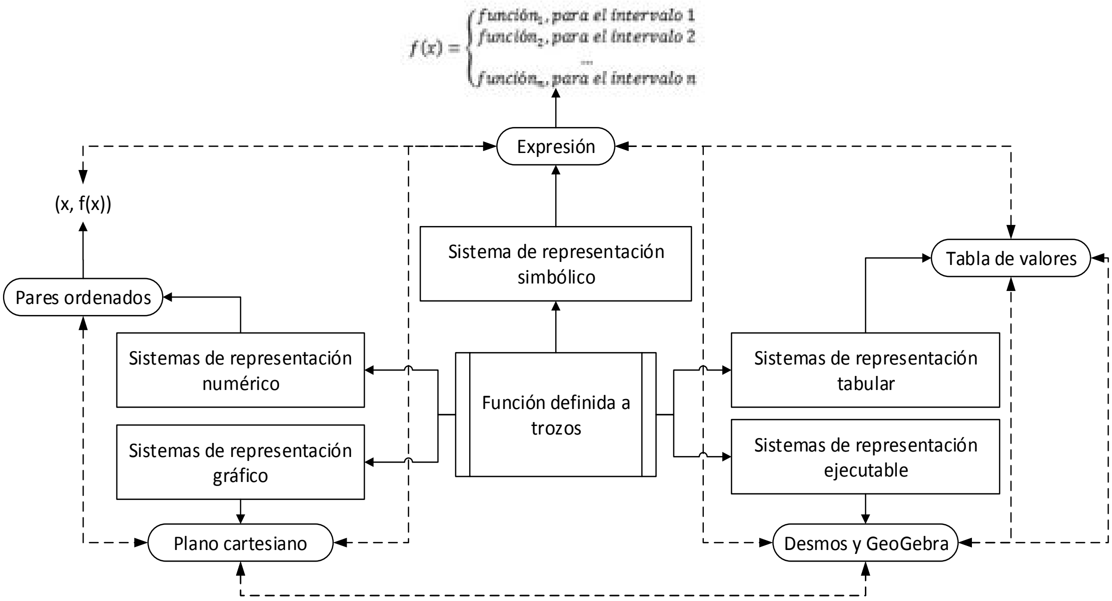


*Figura 3. Sistemas de representación para la función definida a trozos y sus traducciones*

Ya introdujimos el sistema de representación simbólico. Hallamos un sistema de representación numérico cuyos signos son de la forma $(c, f(c))$. En este sistema de representación, la función se representa por medio de pares ordenados.

La función definida a trozos se puede simbolizar mediante el sistema de representación tabular, que dispone de una columna para organizar los valores de la variable independiente y tantas columnas como expresiones matemáticas definan la función a trozos. La misma organización puede hacerse mediante filas.

El sistema de representación gráfico utiliza el plano cartesiano, valores numéricos, escalas y el trazo de la gráfica como sus signos. Así, las reglas para graficar en el plano cartesiano establecen las relaciones entre estos signos.

El aplicativo en línea Desmos para graficar funciones definidas a trozos y el programa de geometría dinámica Geogebra, entre otros, cuentan con elementos propios y las reglas para representar gráficamente a estas funciones. Por consiguiente, lo consideramos un sistema de representación ejecutable de las funciones definidas a trozos.

*Estructuras, contextos fenomenológicos y las relaciones entre esos fenómenos para el tema*

El análisis fenomenológico es un proceso complejo que no haremos aquí. Podemos identificar diferentes subestructuras a partir de los tipos de funciones y la definición de sus intervalos. Por ejemplo, encontramos funciones definidas a trozos constantes, polinómicas, parte entera, de valor absoluto, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. Un ejemplo de una función definida a trozos que pertenece a la subestructura polinómica, es el caso de la función que estableció la compañía de electricidad con el fin de regular el consumo de energía. La empresa ha diseñado la siguiente tarifa: los primeros 100 kwh (kilovatios hora) se pagarán a 2 UM (unidades monetarias) el kwh, para los siguientes 200 kwh costará 3 UM el kwh y 6 UM de allí en adelante. Expresamos el valor de la factura como una función de la cantidad de kwh consumidos al mes mediante la función simplificada

$$T(x) = \begin{cases} 2x, si\ 0 \leq x \leq 100 \\ 3x - 100, si\ 100 << x \leq 300 \\ \ldots \\ 6x - 1000, si\ x > 300 \end{cases}$$

**Análisis de la tarea: resolución**

Una vez que se ha caracterizado el tema al que la tarea se refiere, el primer paso del análisis de la tarea consiste en resolverla, con el conocimiento del experto, pero en el papel del estudiante. Esto implica registrar cada paso de la resolución, tanto en aquello que se registra en el papel, como también en el pensamiento que da lugar a esas actuaciones. De esta manera, se deben identificar dos cuestiones: (a) las diferentes estrategias que los estudiantes pueden utilizar para abordar la tarea y (b) las capacidades que componen esas estrategias. Por otro lado, el análisis de contenido puede proporcionar información adicional para afinar las capacidades que se hayan identificado y para intuir caminos de aprendizaje alternativos.

Ejemplificamos las diferentes estrategias que puede emplear el estudiante para resolver las dos tareas del sub-problema 1, que ilustra el grafo de criterios de logro. Probablemente haya otras alternativas de solución diferentes a las presentadas aquí.

Pablo = P; Jorge = J; tiempo (medido en minutos) = t

$P(t) = \begin{cases} -25(t-10)^2 + 2500 & 0 \leq t \leq 10 \\ 24(t-10)^2 + 2500 & t > 10 \end{cases}$ en el caso de Pablo y $J(t) = 250\text{t}$ para el caso de Jorge.

Sub-problema 1

Parte A. ¿Qué sucede en la carrera para $t = 10$?

**Solución algebraica**

El estudiante halla la distancia recorrida por Pablo para $t = 10$. Para ello empleará la función $P(t) = -25(t-10)^2 + 2500$

$P(10) = -25(10-10)^2 + 2.500$

$P(10) = -25(0) + 2.500$

$P(10) = 2.500$ metros

También, debe hallar la distancia recorrida por Jorge en el mismo tiempo. Debe emplear la función $J(t) = 250\text{t}$.

$J(10) = 250 * 10$

$J(10) = 2.500$ metros

**Solución por medio de software o aplicativo**

El estudiante puede usar un software o aplicativo de los que existen en el mercado o que se consiguen de forma gratuita, para graficar las funciones. De esta manera, él puede observar su comportamiento y determinar que sucede en el minuto 10 de la carrera. En la figura 4, presentamos la gráfica que obtuvo el estudiante en Graph[1].

[1] El programa para realizar gráficas de funciones de Windows Graph en su versión 4.4.2, está disponible en https://graph.uptodown.com/windows

Reflexión: Cuando han transcurrido 10 minutos de iniciada la carrera, Pablo y Jorge han recorrido la misma distancia, que corresponde a 2.500 metros.

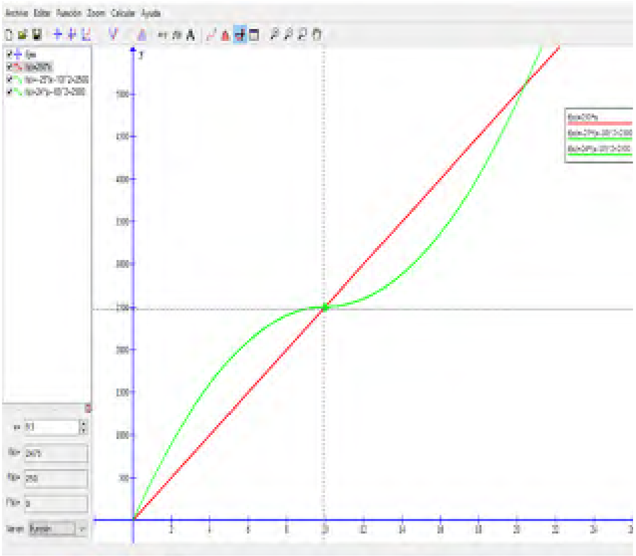

*Figura 4. Gráfica de las funciones en Graph*

Reflexión: En la representación gráfica, el estudiante observa que en el minuto 10 se presenta un intercepto. Es decir, el estudiante puede concluir que, en este momento de la carrera, los dos competidores van a la par.

**Solución gráfica**

El estudiante realiza una tabla de valores, que posteriormente representa en el plano cartesiano. En la tabla 1, presentamos los datos obtenidos por el estudiante.

Tabla 1

*Datos para las distancia recorridas por Pablo (P(t)) y Jorge (J(t)) respectivamente*

| T | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(t) | 0 | 475 | 900 | 1.275 | 1.600 | 1.875 | 2.100 | 2.275 | 2.400 | 2.475 | 2.500 |
| J(t) | 0 | 250 | 500 | 750 | 1.000 | 1.250 | 1.500 | 1.750 | 2.000 | 2.250 | 2.500 |

En la figura 5, presentamos las gráficas obtenidas por el estudiante. Si comparamos las dos gráficas, observamos que la intersección ocurre cuando el tiempo es 10 minutos.

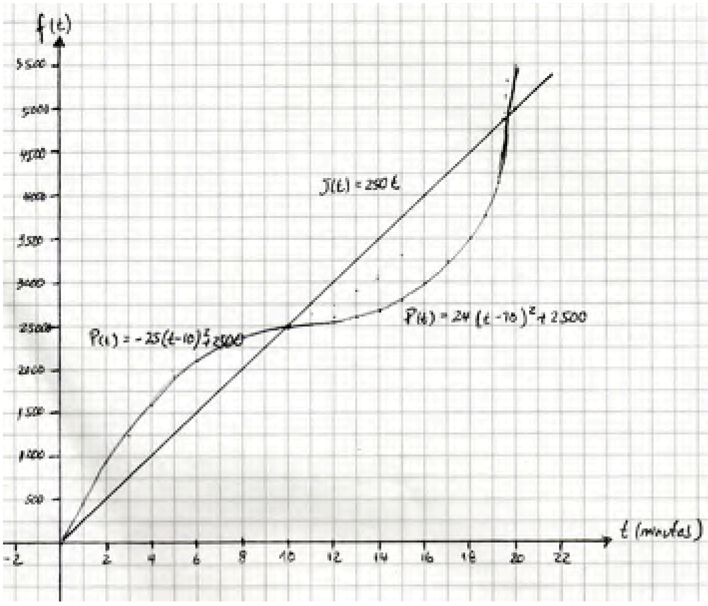


*Figura 5. Representación gráfica realizada por el estudiante para comparar las funciones*

Reflexión: La gráfica que realizó el estudiante le muestra que, cuando han transcurrido 10 minutos, los dos competidores han recorrido la misma distancia (2.500 metros).

**Análisis de la tarea: dimensión cognitiva**

Realizamos el análisis de la tarea en la dimensión cognitiva con base en las ideas y procedimientos del análisis cognitivo propuestos por González y Gómez (2015). Esto implica, en primera instancia, identificar las expectativas de aprendizaje a las que la tarea pretende contribuir. Para ello, es necesario, por un lado, deducir el objetivo de aprendizaje al que la tarea apunta y, por el otro, establecer los conocimientos previos que son necesarios para abordar la tarea y las capacidades que los estudiantes pueden activar cuando la aborden. En segunda instancia, el análisis cognitivo proporciona herramientas para establecer las limitaciones de aprendizaje que se encuentra implicadas en la tarea: los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al abordarlas y las dificultades que se encuentran en el origen de esos errores. Finalmente, el análisis cognitivo proporciona los procedimientos para identificar y estructurar las diferentes estrategias que los estudiantes pueden poner en juego para resolver la tarea. El análisis de la tarea desde la dimensión cognitiva, implica las siguientes cuestiones.

1. Formular un objetivo de aprendizaje al que la tarea puede contribuir.
2. Establecer los conocimientos previos que son necesarios para abordar la tarea.
3. Describir y caracterizar las capacidades que conforman los caminos de aprendizaje que se hayan encontrado.
4. Identificar los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al activar las capacidades que configuran los caminos de aprendizaje.
5. Agrupar secuencias de capacidades en criterios de logro que permitan simplificar las estrategias de resolución.
6. Construir el grafo de criterios de logro. Este grafo incluye los errores en los que los estudiantes pueden incurrir.

Para la tarea del ejemplo, formulamos como objetivo de aprendizaje resolver situaciones que implican fenómenos cotidianos asociados a funciones definidas a trozos que ya están expresadas de forma matemática. Establecimos los conocimientos que los estudiantes deben demostrar antes de resolver la tarea del ejemplo que presentamos en la tabla 2.

Tabla 2
*Listado de conocimientos previos del sub-problema 1 Competencia de atletismo*

| CP | Descripción |
|---|---|
| 1 | Reconoce funciones lineales y cuadráticas expresadas de forma algebraica, las representa en el plano cartesiano |
| 2 | Construye tablas de valores a partir de datos registrados en situaciones de la vida real |
| 3 | Reconoce en un gráfico cartesiano cuando una función es creciente, decreciente o constante |
| 4 | Aplica propiedades algebraicas para transformas expresiones |
| 5 | Resuelve ecuaciones cuadráticas implicadas en diferentes contextos |
| 6 | Emplea un software para realizar representaciones gráficas de funciones |

*Nota*. CP: conocimientos previos.

A partir de las posibles formas que pueden utilizar los estudiantes para resolver la tarea propuesta, enumeramos las capacidades que esperamos desarrollen los estudiantes. En algunos casos, agrupamos dos o más capacidades para describir un procedimiento que el estudiante debe realizar. A estos procedimientos les llamaremos criterios de logro. En la tabla 3, organizamos el listado de criterios de logro para el sub-problema que estamos analizando.

Tabla 3
*Listado de capacidades del sub-problema 1 Competencia de atletismo*

| CdL | Descripción |
|---|---|
| 1 | Organiza la información enunciada en un problema de funciones a trozos |
| 2 | Reconoce las funciones a trozos que modelan algebraicamente un fenómeno |
| 3 | Interpreta la información enunciada en una situación particular de un problema de funciones a trozos |
| 4 | Emplea el dominio indicado de las funciones para determinar lo que sucede en un punto e intervalo de las mismas |
| 5 | Identifica que debe hallar el valor de la función para un punto indicado |
| 6 | Obtiene el valor de la función a partir de la sustitución del valor de la variable independiente |
| 7 | Halla el valor solicitado de la función con la ayuda de un software que la grafica |
| 8 | Establece parejas ordenadas que obtiene mediante la sustitución en la función a trozos que describe la situación |

Tabla 3

*Listado de capacidades del sub-problema 1 Competencia de atletismo*

| CdL | Descripción |
|---|---|
| 9 | Organiza las parejas ordenadas en una tabla de valores de la función para el punto indicado |
| 10 | Representa gráficamente la función en papel cuadriculado a partir de los datos obtenidos en la tabla de valores, para observar el comportamiento en el punto indicado |
| 11 | Determina la veracidad del resultado obtenido con relación al enunciado del problema |
| 12 | Argumenta matemáticamente a sus compañeros el resultado obtenido |

*Nota*. CdL: criterio de logro.

Asociamos los posibles errores en que pueden incurrir los estudiantes al activar cada criterio de logro. Organizamos los errores por conjuntos de dificultades. En la tabla 4, presentamos el listado de dificultades y errores asociados para el sub-problema 1 Competencia de atletismo.

Tabla 4

*Listado de dificultades y errores para el sub-problema 1 Competencia de atletismo*

| E | Descripción |
|---|---|
| | D1. Conocimientos parciales para determinar aspectos del modelo matemático |
| 1 | Considera solo un segmento de la función definida a trozos |
| 2 | Reconoce solo parte de las funciones que definen la función a trozos |
| | D2. Caracterización de funciones definidas a trozos |
| 3 | Desconoce que una función definida a trozos está definida por varias funciones |
| 4 | Precisa solo parte del dominio y recorrido de una función definida a trozos, principalmente si presenta discontinuidad |
| 6 | Confunde si el valor indicado en el problema pertenece a la variable independiente o a la variable dependiente |
| 11 | Emplea valores muy cercanos para la variable dependiente, que no le permiten obtener las parejas suficientes para observar el comportamiento de la función |
| 12 | Obtiene parejas ordenadas mediante la sustitución de valores que no corresponden a la función definida a trozos |
| 13 | Confunde los valores de la variable independiente con los de la variable dependiente, cuando los organiza en una tabla de valores |
| | D3. Manejo del sistema de representación simbólico de funciones definidas a trozos |
| 7 | Sustituye valores de la función en un trozo que no corresponde |
| 8 | Se equivoca al realizar operaciones aritméticas en la sustitución de valores |
| 20 | Aborda las funciones que definen a una función a trozos como independiente |

Tabla 4

*Listado de dificultades y errores para el sub-problema 1 Competencia de atletismo*

| E | Descripción |
|---|---|
| | D4. Manejo del sistema de representación gráfico de funciones definidas a trozos |
| 14 | Traza el eje de coordenadas y con medidas diferentes para cada intervalo de la escala |
| 15 | Grafica solo algunas de las funciones que definen la función a trozos |
| | D5. Manejo de software y programas para matemáticas |
| 9 | Digita erróneamente las funciones en el software o programa |
| 10 | Emplea una configuración del software que no le permite obtener una gráfica adecuada de la función |
| | D6. Conocimientos necesarios para interpretar la solución de la situación matemática en el problema |
| 16 | Emite una respuesta inconsistente con la pregunta |
| 17 | Establece ideas que carecen de argumentos matemáticos |
| 18 | Establece una solución que no satisface las condiciones matemáticas del problema |

Nota. E: error, D: dificultad

Con estos elementos, construimos el grafo de criterios de logro que describe los posibles caminos de aprendizaje que recorrerá el estudiante en la solución de las tareas. Este es el grafo de criterios de logro que presentamos en la figura 1.

**Análisis de la tarea: dimensión de instrucción**

Comenzamos el análisis de instrucción de la tarea con la noción de *ayuda*. El análisis de los errores en los que los estudiantes pueden incurrir da lugar a la formulación de ayudas (Gómez y Mora, 2015). Las ayudas se refieren a aquellas actuaciones del profesor que proporcionan oportunidades para que los estudiantes superen los errores en los que han incurrido. En la tabla 5, presentamos las principales ayudas para el sub-problema que venimos trabajando.

Tabla 5

*Descripción de las ayudas para el sub-problema 1 Competencia de atletismo*

| E | A | Descripción |
|---|---|---|
| 1-2-20 | 1 | Indique al estudiante que revise el video sobre la función definida a trozos y que identifique sus principales características. Puede consultar el video en https://youtu.be/ZbzW0rBoWVA |
| 3 | 2 | Proporcione un listado de funciones definidas a trozos a sus estudiantes y pídale a sus estudiantes que las represente gráficamente. Pueden emplear el simulador Desmos, que puedes consultar en https://www.desmos.com/calculator/ueqnbdgdch para realizar y analizar las gráficas de estas funciones. |

Tabla 5

*Descripción de las ayudas para el sub-problema 1 Competencia de atletismo*

| E | A | Descripción |
|---|---|---|
| 4 | 3 | Realice preguntas al estudiante como: ¿determine el tramo inicial y tramos final de la función definida a trozos?, ¿está considerando todos los tramos de la función o sólo una parte de ellos? |
| 6 | 4 | Pida al estudiante que recuerde cuando una variable es dependiente y cuando independiente. Ahora, pídale que identifique en la función dada, cuál es la variable dependiente y cuál la independiente. Luego, dígale que asigne de nuevo el valor indica a una de las dos variables de la función |
| 7 | 5 | Indique al estudiante que a cada una de las funciones definidas a trozos le corresponde un dominio. Por tanto, sólo los valores de este dominio son válidos para dicha función |
| 8-35-26-29 | 6 | Pida al estudiante que compare el procedimiento que él emplea para sustituir los valores en la función y despejar la variable, con el procedimiento empleado por un compañero que lo hace bien, sin indicarle esto último |
| 9-10-22-32 | 7 | Indique a los estudiantes que deben consultar las funciones correspondientes o la configuración del software para realizar el cálculo que requieren |
| 5-11-12-13-21 | 8 | Explique al estudiante que puede realizar la representación gráfica de la función definida a trozos en el graficador de funciones en línea Desmos. Ahora, dígale que compare los valores obtenidos en las gráficas con los trabajados en el procedimiento manual |
| 14-15 | 9 | Pida al estudiante que realice la representación gráfica de algunas funciones y que obtenga la tabla de valores respectiva. Luego, indíquele que observe las características que emplea el programa para realizar la gráfica y la tabla de valores, esto le permitirá realizar correcciones a la representación realizada manualmente de la función. Para realizar la gráfica y tabla de valores puede usar el programa Graph o en línea el graficador de funciones matemáticas MAFA que puede consultar en http://www.mathe-fa.de/es#result |
| 16-38 | 10 | Interactúe con los estudiantes para aclarar la conexión entre el enunciado y la respuesta o solución del problema |
| 17-18 | 11 | Pida al estudiante que explique la validez de la respuesta obtenida a través de contraejemplos, valores diferentes a los seleccionados para la solución, entre otros. |

*Nota*. E: error; A: ayuda

El análisis del objetivo de aprendizaje y del grafo de criterios de logro debe dar lugar a que el profesor establezca

1. la temporalidad de la tarea y, dentro de esa temporalidad,
2. las formas de agrupamiento de los estudiantes y

3. los esquemas de interacción.

Estas nociones se describen en detalle en Gómez y Mora (2015). Esperamos que el docente disponga de dos horas de clase de 60 minutos cada una para presentar y desarrollar las tareas del ejemplo. Pretendemos organizar grupos de tres estudiantes que resolverán cada tarea de forma individual. Luego, ellos deben comparar los resultados y explicar a sus compañeros los procedimientos empleados. Durante la resolución de la tarea, los estudiantes pueden interactuar con sus compañeros o con el docente cuando surjan dudas que no puedan resolver. Al terminar la tarea, el docente puede motivar a sus estudiantes para que expliquen cada alternativa de solución al gran grupo, con el fin de observar las diferentes alternativas de solución disponibles.

**Análisis de la tarea: dimensión social (evaluación)**

El análisis de la tarea desde la dimensión social implica desarrollar instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información que le permitan al profesor establecer el progreso de los estudiantes y tomar decisiones sobre su actuación con base en esa información. Estos instrumentos y procedimientos se describen en detalle en Romero y Gómez (2015) y Marín y Gómez (2015). El profesor puede incluir el esquema de semáforos para que los estudiantes informen sobre cómo han abordado la tarea y en qué cuestiones han tenido dificultades (Gómez et al., 2014). Él también puede llevar un diario en el que, con base en el grafo de criterios de logro de la tarea, registre la actuación del grupo. De esta forma, el grafo de criterios de logro le servirá de referencia a lo largo de la resolución de la tarea: él podrá establecer qué caminos de aprendizaje activan diferentes estudiantes, en qué errores incurren y, por consiguiente, qué ayudas pone en juego con base en esos errores.

Los procedimientos anteriores se refieren a lo que se conoce como la evaluación formativa. No abordamos aquí la evaluación sumativa. No obstante, consideramos que esa evaluación debe atender las diferentes estrategias de solución y los errores que se identifican en el grafo de criterios de logro.

## Diseño para la implementación

El diseño de la implementación se formula con base en la información anterior. El profesor habrá establecido la temporalidad de la tarea y, dentro de esa temporalidad, propondrán las formas de agrupamiento de los estudiantes en los diferentes momentos de la tarea y los tipos de interacción que promoverá en cada uno de ellos. Su actuación durante la sesión de clase estará guiada por la información que recoja y analice con los semáforos de los estudiantes y con su diario. Esta información le permitirá tomar decisiones sobre las ayudas que debe implementar para contribuir a la superación de los errores de los estudiantes y a su progreso en el aprendizaje.

## Referencias

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives, handbook I: The cognitive domain*. New York: David McKay Co Inc.

Boston, M. D. y Smith, M. S. (2009). Transforming Secondary Mathematics Teaching: Increasing the Cognitive Demands of Instructional Tasks Used in Teachers' Classrooms. *Journal For Research in Mathematics Education*, 119-156.

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, Á. A. (2015). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD 4*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/8453/

Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 281-288). Morelia, México: PME.

Clark, R. E., Feldon, D., van Merriënboer, J. J. G., Yates, K. y Early, S. (2008). Cognitive task analysis. En J. M. Spector, M. D. Merrill, J. J. G. van Merriënboer y M. P. Driscoll (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 577-593). Mahwah, NJ: Routledge.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*, 167-180.

Gardner, M. K. (1985). Cognitive psychological approaches to instructional task analysis. *Review of Research in Education, 12*, 157-195.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Gómez, P. y González, M. J. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Formación de profesores, innovación curricular y metodología de investigación* (pp. 121-139). Granada: Comares. Disponible en http://tinyurl.com/pq5yn9n

Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado, 18*(3), 319-338. Disponible en http://www.ugr.es/%7Erecfpro/rev183COL7.pdf

Gómez, P. y Mora, M. F. (2015). *Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD 3* (Documentación). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6496/

González, M. J. y Gómez, P. (2015). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD 3*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6454/

Greeno, J. G. (1987). Insrtuctional representations based on research about understanding. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 61-88). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal For Research in Mathematics Education*, 524-549.

Johnson, I. D. (2007). *Mathematical modeling with NetLogo: Cognitive demand and fidelity*. Documento no publicado. Disponible en http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_Charlotte_JohnsonPaperEdit.pdf

Marín, A. y Gómez, P. (2015). *Apuntes sobre análisis de datos. Módulo 6 de MAD 3*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/8455/

Resnick, L. B. (1975). Task Analysis in Instructional Design: Some Cases from Mathematics.

Resnick, L. B. (1984). Toward a Cognitive Theory of Instruction. En S. Paris, G. Olson y H. Stevenson (Eds.), *Learning and motivation in the classroom* (pp. 5-38). Hillasdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B., Wang, M. C. y Kaplan, J. (1973). Task analysis in curriculum design: A hierarchically sequenced introductory mathematics curriculum. *Journal of Applied Behavior Analysis, 6*(4), 679.

Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis. Disponible en http://tinyurl.com/bpy3cvr

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori. Disponible en http://is.gd/ofbVcj

Romero, I. y Gómez, P. (2015). *Apuntes sobre análisis de actuación. Módulo 5 de MAD 3*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6886/

Schoenfeld, A. H. (1987). Cognitive science and mathematics education: an overview. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 1-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stein, M., Grover, B. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455.

Stein, M. K. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Winn, W. (1990). Some implications of cognitive theory for instructional design. *Instructional Science, 19*(1), 53-69.