

Comprensión sobre ideas fundamentales de estocásticos en la formación inicial de profesores de Matemática

Saúl Elizarrarás Baena (Instituto Superior de Ciencias de la Educación. México)

Fecha de recepción: 21 de octubre de 2013

Fecha de aceptación: 11 de abril de 2014

Resumen

Previo a la enseñanza, se presentan hallazgos sobre la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (conjugación de probabilidad y estadística) en profesores de matemáticas en formación inicial. Los referentes teóricos resultaron en criterios de análisis, aludieron principalmente a dos aspectos: epistemológico (Heitele, 1975) y cognitivo (Frawley, 1999). Esta investigación es de carácter cualitativo bajo la perspectiva de Eisner (1998) y Martínez (2009). Las dificultades de comprensión encontradas en un cuestionario de pregunta abierta reflejan la necesidad de fortalecer la formación inicial sobre estocásticos de futuros profesores de matemáticas para la educación secundaria. Su importancia radica en la trascendencia que representan los temas de probabilidad y estadística para el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo.

Palabras clave

Comprensión, probabilidad, estocásticos, enfoque, clásico, frecuencial.

Abstract

Previous teaching, finds of the understanding of fundamental ideas about stochastic (conjugation of probability and statistics) are being presented on teachers of mathematics in initial formation. The theoretic references were resulted in criteria of analazing, mainly they alluded two aspects: epistemological (Heitele, 1975) and cognitive (Frawley, 1999). From the perspective of Eisner (1998) and Martínez (2009) this research is of cualitative type. The difficulties of comprehension found in an open question test, reflect the need to strengthen the initial formation in stochastic on future mathematics teachers for junior high education. It's importance resides in the transcendence that represents the probability and statistics topics for the development of the critical and reflective thinking.

Keywords

Undestarding, probability, stochastic, approach, classic, frequency.

1. Introducción

Este informe de investigación, forma parte de un proyecto más amplio que atañe al desarrollo del pensamiento probabilístico de profesores de Matemáticas en formación inicial de la Escuela Normal Superior de México (ENSM), quienes habrán de desempeñarse en la Escuela Secundaria del mismo país, aquí se presentan los hallazgos encontrados en un cuestionario de exploración, previo a la enseñanza.

En la actualidad, en México, la problemática educativa para la comprensión de los temas sobre estocásticos (conjugación de las disciplinas de probabilidad y estadística) refiere al enlace entre los distintos niveles educativos, el cual resulta incompatible; por ejemplo, hay un inminente desfase entre el Programa de Estudios para Matemáticas en la Educación Secundaria (SEP, 2011) y el de la



Educación Normal en nuestro país (SEP, 1999), problemática que se agudiza tanto por la propia desorganización de los contenidos como por el escaso tiempo que se le otorga; como lo ha señalado Ojeda (2003, p. 159), la propuesta institucional para la Educación Secundaria es francamente determinista, de tal modo que privilegia las demás áreas de la Matemática en detrimento de los temas propios de la Probabilidad y la Estadística.

Con la finalidad de caracterizar la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos respecto a la formalidad de la simbología matemática que esto implica, se planteó la *pregunta de investigación* siguiente: ¿Cuáles son las dificultades de comprensión de profesores de Matemáticas en formación inicial sobre ideas fundamentales de estocásticos, previo a la enseñanza?

2. Referentes teóricos

Cabe señalar que en México, es muy escasa la investigación sobre estocásticos y más aún en la formación inicial de profesores de Matemáticas. Aquí, se muestran dos investigaciones similares.

La primera, llevada a cabo por De León (2002) con estudiantes de nivel superior del área de Ciencias Sociales para caracterizar su comprensión sobre la ley de los grandes números y cuya enseñanza fue mediada por el propio investigador. El autor plantea que, refiriéndose al problema de *estimar la proporción* de veces que ocurrirá un evento en varias repeticiones de un fenómeno aleatorio, se puede recurrir a la ley de los grandes números de Poisson o al teorema de Bernoulli; enfatiza la diferencia entre ambos enfoques: mientras el de Poisson es puramente estadístico, el de Bernoulli implica elementos probabilísticos.

Luego de investigar acerca de las comprensiones de ambas presentaciones con dos grupos de estudiantes (a uno lo denominó apriorista y al otro frecuentista), encontró que la idea de estabilidad de la frecuencia relativa en los estudiantes no es igual en cada enfoque; además, la comprensión de la ley de los grandes números se podría facilitar a los estudiantes si primero se le presenta el enfoque de Poisson y, después de los conceptos de Probabilidad, se les enseña el teorema de Bernoulli; los estudiantes del grupo frecuentista se limitaron a utilizar el enfoque frecuencial al *estimar la probabilidad* de un evento resultante de un ensayo aleatorio, siempre y cuando les parecía factible de replicar y añade, que una gran parte de los estudiantes indicaba que no era posible determinar la probabilidad del evento porque consideraban que era difícil o imposible hacer réplicas de un ensayo, el resto de los participantes recurría a la información que pudieran obtener de una sola realización del ensayo para estimar de manera subjetiva dicha probabilidad. Respecto al grupo apriorista, De León (2002) encontró que la mayoría de los estudiantes calculó la probabilidad de un evento mediante el enfoque clásico, aun cuando había situaciones incompatibles con este enfoque, ya sea porque el espacio muestra propuesto por ellos mismos no era equiprobable o no podían garantizar la equiprobabilidad; no obstante, hubo quienes primero construían el espacio muestra de un ensayo aleatorio, luego se cuestionaban sobre la equiprobabilidad y, así, utilizaban o no del enfoque clásico.

La segunda investigación, fue llevada a cabo con estudiantes universitarios sin enseñanza, por Gigerenzer y Hoffrage (1995), quienes reconocen la importancia del razonamiento natural para establecer la conexión entre un *algoritmo cognitivo* y un *formato de información*, y puntualizan que conforme los humanos fueron evolucionando dejaron de utilizar frecuencias (números naturales) y empezaron a recurrir a probabilidades o porcentajes, lo que significó el uso de un formato “estándar” en lugar del “natural”. Posteriormente, los autores señalaron que el argumento evolucionista de que los algoritmos cognitivos fueron diseñados para la información frecuencial, adquirida mediante *muestreo natural*, tiene implicaciones para los cálculos que un organismo necesita ejecutar. Entienden al *muestreo natural* como la adquisición secuencial de la información mediante la actualización de las

frecuencias de eventos *sin* fijar artificialmente las frecuencias marginales (probabilidades y porcentajes). Los autores encontraron que el cálculo de algoritmos es más simple cuando la información está codificada en un formato de frecuencia (lengua natural) en lugar de un formato estándar de probabilidad, pues se ejecutan menos operaciones y son realizadas con números naturales en lugar de porcentajes.

En suma, estas investigaciones fueron tomadas en cuenta al momento de diseñar el instrumento con la finalidad de prever posibles dificultades; no obstante, también se encontraron otros aspectos que fueron motivo de interpretación y análisis.

Con base en lo anterior, la perspectiva teórica fue influenciada por dos tipos de aspectos: el epistemológico y el cognitivo.

Para el primero, Heitele (1975) sugiere una lista de diez ideas fundamentales para estocásticos; a saber: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. En términos del autor, estas ideas deben proporcionar al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y específicamente, se deben distinguir en los distintos niveles cognoscitivos por su forma lingüística y por sus niveles de elaboración que excluye todo enfoque estructural.

Para el segundo, Frawley (1999) considera al ser humano como máquina (mente computacional) y como persona (mente social); su postura unifica a internalistas y externalistas, enfatiza que nada es completamente individualista ni exclusivamente social; de este modo, caracteriza tres tipos de subjetividad: el *procesamiento no consciente* refleja la experiencia personal; la *conciencia* utiliza de forma simple modelos simbólicos, interpreta e informa cualidades de la experiencia y la *metaconciencia*, caracterizada por la toma de conciencia del yo y la organización deliberada de la experiencia.

Los referentes teóricos fueron utilizados como criterios de análisis y, en otros casos, de acuerdo con las características de las respuestas proporcionadas en los cuestionarios por los participantes, se propusieron algunas categorías de interpretación. De este modo, en el apartado siguiente se describe el enfoque metodológico y la organización de la investigación.

3. Enfoque metodológico y organización de la investigación

La presente investigación es de carácter cualitativo; en este sentido, se adoptó la posición de Eisner (1998), y Martínez (2009). El investigador fue un observador participante.

Para Eisner (1998), la *crítica educativa* adquiere sentido cuando se toma como base la experiencia, dado que permite cobrar conciencia de algunos aspectos del mundo (sutiles y complejos), para lo cual se requiere ser “experto”, es decir, interpretar en función de lo que conocemos; aquí se propone la crítica del proceso de comprensión de los estudiantes cuando el investigador se encuentra relacionado con los modos y los medios que utiliza para guiar la enseñanza del tema de estudio. Cabe aclarar, tal y como lo enuncia el autor, que el contexto social impide generalizar resultados obtenidos en algunas otras escuelas o en otras épocas en las que los estudiantes tenían otras expectativas; de ahí que los alcances de esta investigación estén delimitados por el entendimiento del acto educativo que tiene lugar en el *aula concreta* con estudiantes *concretos* y cuyo *profesor concreto* también realiza funciones de investigación. Martínez (2009, p. 228) plantea que conocer es siempre aprehender un



dato en una determinada *función*, bajo una cierta *relación*, en tanto significa algo por dentro de una determinada *estructura*; además, puntualiza que los datos recopilados dependen de las categorías interpretativas del observador, e inevitablemente la teoría previa influye en la observación y la experiencia y, así, incide en la construcción de los hechos; en general, no hay observador completamente vacío de hipótesis ni puede excluir sus preconcepciones ni tampoco puede evidenciar un discurso neutro ni mucho menos se puede desconocer la cultura misma en que está inmerso el intérprete.

3.1. Espacio de la investigación y participantes

Este estudio se llevó a cabo en una de las aulas de la ENSM del Turno Vespertino, con un grupo de dieciséis estudiantes normalistas que cursaban el quinto y sexto semestres de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas (LESEM), conforme al Plan y Programas de Estudio vigente (SEP, 1999). La selección del grupo fue directa debido a que el investigador era el titular.

3.2. Criterios de análisis y categorías de interpretación

En principio, se consideró la célula de análisis (Ojeda, 2006): *ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos de la información, términos utilizados, situaciones y contextos planteados*. Posteriormente, se pudieron establecer categorías de interpretación que daban cuenta del tipo de pensamiento manifestado por los estudiantes mediante los siguientes tipos de razonamiento: *determinista, combinatorio, probabilístico, estadístico, estocástico, referente informativo y complejo*. Entendido el razonamiento como la capacidad del ser humano para enlazar ideas o conceptos y emitir juicios que permiten la comunicación con otros; de un modo integrador, el pensamiento probabilístico es la capacidad de todo individuo (como ser social) para advertir la incertidumbre que suele presentarse en diversas situaciones al interactuar con el entorno.

Conforme al desempeño de los estudiantes respecto a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos, de otros conceptos matemáticos implicados y de los razonamientos que emitieron, fueron analizados en términos de las etapas de subjetividad propuestas por Frawley (1999).

3.3. Descripción y análisis del instrumento utilizado

Se utilizó un *cuestionario de exploración*, el cual estuvo compuesto por ocho ítems de pregunta abierta, los primeros cuatro fueron referidos a situaciones relacionadas con el enfoque clásico y los restantes al enfoque frecuencial de la probabilidad. El objetivo general fue: identificar dificultades de comprensión sobre ideas fundamentales de estocásticos al resolver problemas referidos a diversos fenómenos aleatorios relacionados con la Matemática Educativa.

En las tablas 1 y 2, se muestra el análisis previo del cuestionario de exploración, conforme a los criterios de análisis propuestos por Ojeda (2006), quien considera necesario identificar las ideas fundamentales de estocásticos implicadas en cada uno de los ítems, también se deben especificar las situaciones y contextos, los otros conceptos matemáticos, los términos utilizados para orientar el pensamiento estocástico, así como los registros semióticos para presentar la información, ya sea en tablas, gráficas o simplemente la lengua natural. Se solicitó a los dieciséis participantes, la argumentación de sus respuestas en forma escrita y se les permitió borrar cuando así lo consideraron necesario.

Los ítems fueron tomados de la propuesta de Seda (2000), libro para el maestro (SEP, 2004) y de la Olimpiada de Matemáticas para el nivel medio superior que se han llevado a cabo en la Ciudad de Texcoco, Estado de México; aunque en esencia, fueron modificados debido a que interesaba su presentación en tablas, gráficas o diagramas de árbol con la finalidad de caracterizar el desempeño de los estudiantes sobre ideas fundamentales de estocásticos y al resultado de investigación de Gigerenzer y Hoffrage (1995).

NP	Situaciones y contextos	Otros conceptos matemáticos	Términos utilizados	Registros semióticos
	Juego del “quemado: uso de dos dados ordinarios.	Adición con números naturales y racionales. Comparación de fracciones.	Gana, aproxima, quema, pierde, tiradas, convendrá	Lengua natural. Números.
	Juego de monedas: uso de tres monedas ordinarias.	Adición con números naturales y racionales. Equivalencia de fracciones.	Juegan, volados, caen iguales, caen más águilas, caen más soles, tendrá mayor probabilidad	Lengua natural
	Rifa para obtención de regalo entre los empleados de un taller.	Adición con números naturales y racionales. Comparación de fracciones.	Rifarlo, eligiendo al azar, ganador, antigüedad, evento, misma probabilidad.	Gráfica de barras. Lengua natural.
	Valoración de desempeño laboral según tipo de salario.	Adición y sustracción con números naturales y racionales. Comparación de fracciones.	Gane, salario medio, salario bajo, elegir al azar, eventos, menos probable.	Gráfica de barras. Lengua natural.
	Estudio estadístico sobre el uso de casco por motociclistas de una ciudad.	Adición y sustracción con números naturales y racionales. Razón y proporcionalidad.	Estudio estadístico, registrar, número de mujeres, muestra, espera.	Tabla de doble entrada. Lengua natural. Números decimales.
	Volumen de producción de unidades en una fábrica que cuenta con tres máquinas.	Adición con números naturales y racionales. Comparación de fracciones.	Volumen de producción de unidades, probabilidad, elegida, azar.	Tabla de doble entrada. Lengua natural. Números.
	Registro estadístico de un banco respecto a tres tipos de créditos pagados o fallidos.	Adición y multiplicación con números decimales. Conversión de porcentaje a decimales	Créditos, datos, diagrama, azar, probabilidad.	Diagrama de árbol. Lengua natural. Porcentajes. Números decimales
	Encuesta sobre tendencias electorales de una ciudad.	Adición y multiplicación con números decimales. Conversión de porcentajes a decimales.	Votantes, probabilidad, elegido al azar.	Porcentajes. Lengua natural.

Tabla 1. Análisis previo del cuestionario de exploración.



Ideas fundamentales	Ítems							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Medida de probabilidad	■	■	■	■	■	■	■	■
2. Espacio muestra	■	■	■	■	■	■	■	■
3. Regla de la adición	■	■	■	■	■	■	■	■
4. Independencia. Regla del producto	■	■	■	■	■	■	■	■
5. Equidistribución y simetría	■	■						
6. Combinatoria	■	■						
7. Modelo de urna y simulación			■					
8. Variable aleatoria	■	■	■	■	■	■	■	■
9. Ley de los grandes números					■	■	■	■
10. Muestra					■	■	■	■

Tabla 2. Ideas fundamentales de estocásticos implicadas.

4. Resultados con el cuestionario de exploración

En la figura 1 se presentan los resultados obtenidos para todos los ítems del primer cuestionario de exploración.

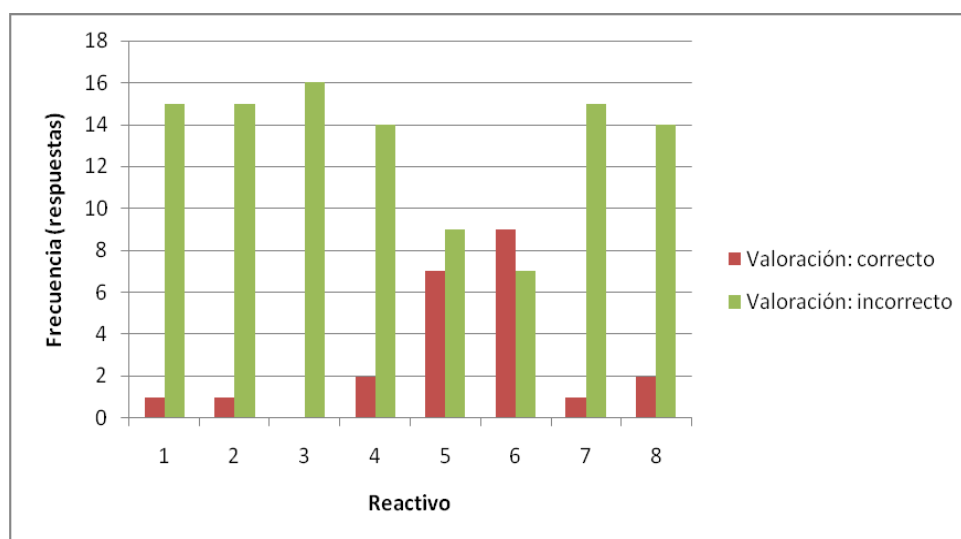


Figura 1. Resultados obtenidos con el primer cuestionario de exploración.

La mayoría de los estudiantes manifestó dificultades de comprensión sobre ideas fundamentales de estocásticos e incluso, hubo casos que desconocían por completo todo lo relacionado con temas de probabilidad. A modo de ejemplos, se presentan resultados obtenidos para cuatro de los ocho ítems propuestos, los ítems dos y tres aluden al enfoque clásico de la probabilidad y el seis y el siete para referir al enfoque frecuencial de la probabilidad.

4.1. Resultados con el ítem 2. Juego de monedas

Este ítem planteaba lo siguiente:

2. Elías, Flor y Carla juegan a los volados. Si las tres monedas caen iguales entonces Elías pagará un peso a Flor y otro a Carla, si caen más águilas que soles entonces Flor les

pagará un peso a Elías y otro a Carla; y si caen más soles que águilas entonces Carla les pagará un peso a Elías y otro a Flor. ¿Quién tendrá mayor probabilidad de ganar?

Este ítem fue planteado en la Olimpiada de Matemáticas para estudiantes del nivel Medio Superior que se llevó a cabo en la Ciudad de Texcoco, Estado de México, en el año 2007. En general, los resultados obtenidos fueron los siguientes: tres estudiantes (18.75%) manifestaron razonamiento probabilístico, de los cuales sólo uno fue correcto; once estudiantes (68.75%) evidenciaron razonamiento combinatorio, y un estudiante no contestó (6.25%).

En la figura 2, se muestra la respuesta otorgada por un estudiante quien sólo identificó algunas de las posibilidades del fenómeno aleatorio y aparentemente asignó la probabilidad del evento tomando en cuenta que el espacio muestra corresponde al evento con el cual paga cada uno de los personajes. Según lo estipulado en el ítem, Elías debe pagar al caer las tres monedas iguales, pero el participante sólo reconoció tres águilas y descartó que también podían ocurrir tres soles; cuando Flor paga sólo identificó el evento dos águilas y un sol y cuando Karla paga únicamente consideró el evento dos soles y un águila. En general, las dificultades que evidenciaron los estudiantes no sólo se relacionaron con la idea de combinatoria sino también con las de medida de probabilidad, espacio muestra, regla del producto e independencia, variable aleatoria y equidistribución y simetría. Conforme a las etapas de subjetividad propuestas por Frawley (1999), este desempeño puede situarse en el procesamiento no consciente.

caso	a	s
1	a	x
2	a	x
3	a	x

Elías paga $\frac{3}{3}$

caso	a	s
1	a	x
2	x	s
3	a	x

Flor paga $\frac{2}{3}$

caso	a	s
1	x	s
2	a	x
3	x	s

Karla paga $\frac{2}{3}$

Figura 2. Ejemplo de respuesta con razonamiento combinatorio incorrecto. (C2, E1).

4.2. Hallazgos con el ítem 3. Rifa de regalo

El ítem planteaba lo siguiente:

- En la gráfica se muestran los años trabajados por los empleados de un taller. Cada navidad se cooperan para comprar un regalo y rifarlo entre todos, poniendo en una caja un papelito con su nombre y eligiendo al azar el ganador.



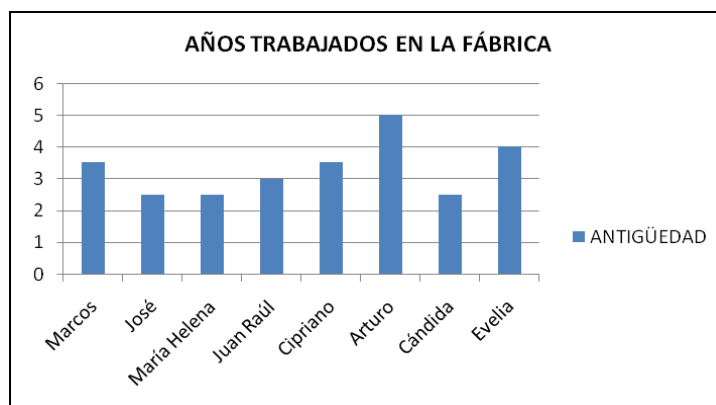


Figura 3.

¿Cuál es la relación que guardan entre sí, los eventos abajo enunciados?

- (A) Que gane el regalo una mujer con una antigüedad menor o igual a cuatro años.
- (B) Que gane el regalo un hombre con una antigüedad mayor a 3 años.

Este ítem se tomó del libro para el maestro (SEP, 1994); aunque aquí se propuso la variable antigüedad en lugar de salarios percibidos por cada empleado, también se incluyó gráfica y se excluyó tabla de una entrada, cuyo foco principal fue identificar eventos equiprobables.

En general, los resultados obtenidos fueron los siguientes: seis estudiantes (37.5%) proporcionaron respuesta con *razonamiento probabilístico*, en ningún caso fue correcto; siete (43.75%) con *razonamiento determinista* y tres no contestaron (18.75%). Estos resultados muestran la ausencia de comprensión sobre ideas fundamentales de estocásticos implicadas.

Las respuestas proporcionadas dejaron en evidencia como se activaron esquemas de pensamiento que aludieron a *razonamientos deterministas* con fundamentos de tipo aritmético, ya sea porque se aseguró que el regalo lo puede ganar quien tenga mayor antigüedad (Figura 4) o quienes tienen más antigüedad que los demás o simplemente porque hay más hombres que mujeres. Por el tipo de respuesta de los estudiantes, se les puede ubicar en la primera etapa de subjetividad denominada como procesamiento no consciente (Frawley, 1999).

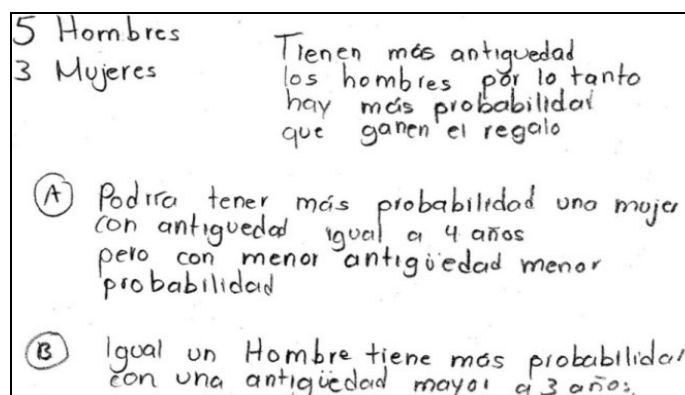


Figura 4. Ejemplo de respuesta con razonamiento determinista. (C2, E3).

4.3. Hallazgos con el ítem6. Control de calidad

De un modo explícito, el ítem planteaba la situación siguiente:

6. Completa la tabla, cuyos datos corresponden a tres muestras tomadas del volumen de producción de unidades de una fábrica por tres máquinas diferentes.

Unidades	Máquina A	Máquina B	Máquina C	Total
Con defectos	6		40	
Sin defectos		992		
Total	500	1000	2000	

Tabla 3.

¿Cuál es la probabilidad de que elegida una unidad al azar sea defectuosa?

La idea central de este ítem fue tomado de Seda (2000). Las variantes propuestas fueron: presentar en tabla parte de los datos numéricos en lugar de porcentajes y así, satisfacer la propuesta de Gigerenzer y Hoffrage (1995). Diez estudiantes (62.5%) otorgaron respuestas con *razonamiento probabilístico*, cinco (31.25%) con *razonamiento determinista* y uno no contestó (6.25%). De los quince estudiantes que proporcionaron respuesta, todos completaron los datos faltantes en la tabla. En general, no se advirtieron las ideas fundamentales de estocásticos en forma explícita y correcta

El ejemplo de la figura 5, representó la probabilidad del evento poniendo en relación el número de piezas con defectos respecto al número total de piezas producidas por las tres máquinas), pero expresó la probabilidad en porcentaje de forma inadecuada; además, faltó explicitar el concepto de frecuencia relativa como una aproximación a la probabilidad del evento; así, este desempeño corresponde a la frontera entre el procesamiento no consciente y la conciencia (Frawley, 1999).

$$\frac{54}{3500} = 0.015\% \quad 3500\% \rightarrow 100\%$$

Figura 5. Ejemplo de respuesta con razonamiento probabilístico. (C2, E4).

En la respuesta de la Figura 6, se desconocieron los datos proporcionados en la tabla y sólo se contestó en función de que son tres máquinas y en todas se presentan piezas defectuosas; de este modo se tuvieron dificultades de comprensión con las ideas de espacio muestra, variable aleatoria, muestra y ley de los grandes números. Resultados similares fueron encontrados por De León (2002) al pedirles a los estudiantes que efectuaran volados. Conforme a las etapas de subjetividad, se le puede situar en la etapa del procesamiento no consciente.

$\frac{1}{3}$
 por que la colamos eligiendo al azar
 y solo contamos con 3 y de las
 cuales podemos tomar 1 y las 3 máquinas
 cuentan con defectos

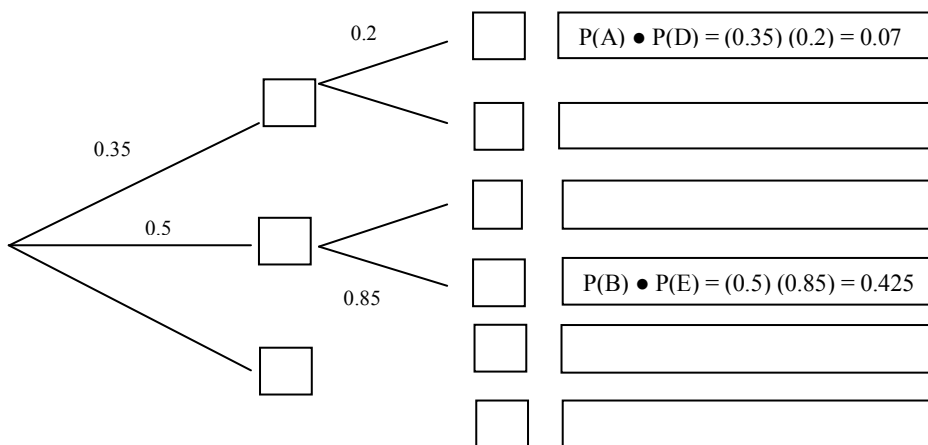
Figura 6. Respuesta con razonamiento probabilístico incorrecto. (C2, E3).



4.4. Hallazgos con el ítem 7. Créditos bancarios fallidos

El ítem planteaba lo siguiente:

7. Según los registros que se encuentran en los archivos de un banco, el 35% de los créditos es para vivienda (A), el 50% para automóvil (B) y el 15% para inversiones (C). Regularmente, resultan fallidos (D) el 20% de los créditos para vivienda, el 15% de los créditos para automóvil y el 70% de los créditos para inversiones. Con base en los datos antes proporcionados, completa el diagrama siguiente:



Se elige un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se pague?

La idea central fue recuperada de Seda (2000), quien plantea este problema en porcentajes y sin el uso de diagrama de árbol ni con datos en su forma decimal. Los resultados generales fueron: doce estudiantes (75%) no otorgaron respuesta alguna, uno (6.25%) otorgó un *razonamiento probabilístico* correcto a partir de completar los datos del diagrama de árbol y los otros tres (18.75%) evidenciaron *razonamientos deterministas*, de ellos, sólo dos completaron el diagrama.

En la figura 7, se presenta la única respuesta correcta a partir de completar el diagrama de árbol respectivo. Así, quedó en evidencia el dominio de ideas fundamentales de estocásticos implicadas (ver tabla 2). Este desempeño se puede ubicar en la frontera entre la conciencia y la metaconciencia.

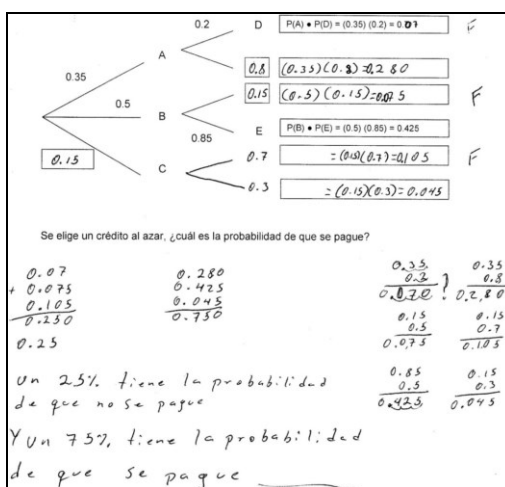


Figura 7. Respuesta con razonamiento probabilístico correcto. (C2, E11).

5. A modo de conclusiones

Los hallazgos de investigación corresponden sólo a la participación de un grupo reducido de dieciséis estudiantes normalistas, por lo que se hace necesario desarrollar otras investigaciones en diversos contextos socioculturales de México para identificar similitudes y diferencias.

Si bien es cierto que hubo más respuestas correctas para los ítems referidos al enfoque frecuencial de la probabilidad y que Gigerenzer y Hoffrage (1995) reconocen a este enfoque como una forma de comprender la idea de azar de forma natural, también se debe destacar que las respuestas se caracterizaron por proporcionar razonamientos de tipo deterministas en las que la idea de azar no fue advertida y sólo ponían en práctica algoritmos tales como la regla de tres y para nada reconocían que deriva de los conceptos matemáticos de razón y proporción; tampoco evocaron conceptos tales como frecuencia absoluta, frecuencia relativa y, mucho menos, el de frecuencia esperada.

Cabe señalar que en tres de los ítems referidos al enfoque frecuencial, se propusieron tablas de doble entrada y un diagrama de árbol, los cuales fueron completadas de forma correcta por la mayoría de los participantes; sin embargo, la falta de familiarización con ideas fundamentales de estocásticos dificultaron la advertencia de la naturaleza de la idea de azar en estos fenómenos.

Los hallazgos, permiten reflexionar acerca del reconocimiento de que es urgente la formación en estocásticos para quienes a su vez van a formar estudiantes en la Educación Secundaria porque regularmente estos contenidos son omitidos por el docente de ese nivel educativo, ya sea porque desconoce su trascendencia en la formación de futuros ciudadanos que deben poseer una cultura matemática básica integral (Ojeda, 2006) o porque carece de su dominio o, incluso porque requiere de formas de trabajo docente que rompen su esquema de acción cotidiano y en el mejor de los casos, se les enseña de modo estrictamente formal, lo cual limita la comprensión de la idea de azar. Para Batanero, Henry y Parzys (2005; citado en Batanero, Ortiz y Serrano, 2007) una comprensión completa de la probabilidad, demanda que la enseñanza incluya tres puntos de vista: el clásico, el frecuencial y el subjetivo. Asimismo, Batanero, Godino y Roa (2004) y Batanero, Ortiz y Serrano (2007) plantean la necesidad de que la formación didáctica de los profesores no sólo incluya el conocimiento estocástico sino también componentes básicos tales como: la reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución; el análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos; entre otros.

En general, se debe tomar en cuenta que el desarrollo del pensamiento probabilístico es imprescindible en la formación inicial de futuros profesores de matemáticas, cuya razón se debe a que los temas de probabilidad contribuyen a su vez, en el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo para el planteamiento de alternativas y la toma de decisiones sobre una base científica, racional y principalmente, ética; toda vez que la generación y aplicación de conocimientos deben ser utilizados para beneficiar a las grandes masas más que a los intereses de particulares.

6. Bibliografía

- Batanero, C. Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2007). *Investigación en didáctica de la probabilidad*. Uno: revista de didáctica de las matemáticas, 44, p. 7-16. Barcelona: Grao.
- De León, J. (2002). *Estudio de la comprensión de la Ley de los Grandes Números en Estudiantes de nivel Superior: El caso de Ciencias Sociales*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México



- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. España: Paidós.
- Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. España: Paidós.
- Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). *How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction. Frequency Formats*. *Psychological Review*, 102, 684-704.
- Heitele, D. (1975). *An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas*. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205. Holanda: Reidel.
- Martínez, M. (2009). *El paradigma emergente: hacia una nueva racionalidad científica*. México: Trillas.
- Ojeda, A. M. (2003). *Azar y grandes números en didáctica de la Probabilidad*. *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*. pp. 158-173. México: FCE - CINVESTAV.
- Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática Educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. (Filloy, E., ed.). México: Santillana; Cinvestav del IPN. Págs. 195-214.
- Seda, J. (2000). *Probabilidad. Proyecto cica thales. Recursos didácticos*. Recuperado el 15 de mayo de 2006 de <http://thales.cica.es/rd/>
- SEP (1994). *Libro para el maestro. Educación Secundaria. Matemáticas*, México: SEP.
- SEP (1999). *Programas de Estudio. Licenciatura en Educación Secundaria. Matemáticas*, México: SEP.
- SEP (2011). *Programas de Estudio. Educación Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

Saúl Elizarrarás Baena. Escuela Normal Superior de México, Ciudad de México, D. F. Nació en Cd. Nezahualcoyotl, Estado de México, el 19 de abril de 1976. Tesista del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación (promoción 2010-2012) del Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México. Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV del IPN. Licenciado en educación Media en el Área de Matemáticas por la ENSM. Ponente en diversos congresos nacionales e internacionales (RELIME: 2004, 2008-2010; UNAM: 2009-2013, etc.).
E-mail: sauleba@yahoo.com.mx