

# SIMULACIÓN Y MODELACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL CON LA HOJA DE CÁLCULO

JOSÉ LUIS DÍAZ GÓMEZ\*

Con frecuencia se sobrestima el impacto de las nuevas tecnologías en el sistema educativo, pero es indudable que proporcionan un gran potencial para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. En el artículo se ilustra el uso de la hoja de cálculo como herramienta pedagógica en las clases de cálculo diferencial, en particular en la enseñanza de los problemas de optimización.

DR. JOSÉ LUIS DÍAZ GÓMEZ  
 Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora  
 Correo: jdiaz@gauss.mat.uson.mx

\*Autor para correspondencia: José Luis Díaz Gómez  
 Correo electrónico: jdiaz@gauss.mat.uson.mx  
 Recibido: 25 de marzo de 2014  
 Aceptado: 26 de mayo de 2014  
 ISSN: 2007-4530

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado e integrado los elementos visuales como parte esencial para representar y comunicar información. Las gráficas, los signos y objetos pictóricos, así como las imágenes impresas o computarizadas están presentes en todas las áreas de la sociedad actual. Arcavi (1) describe la visualización en términos muy generales: *"La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas"*.

En el caso del aprendizaje de las matemáticas, lo visual juega un papel importante para evaluar los procesos y capacidades de los sujetos al realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos matemáticos (2). Zimmermann y Cunningham (3) definen a la visualización matemática como: *el proceso de producir o usar representaciones geométricas y gráficas de conceptos o principios o problemas matemáticos, ya sean hechas a mano o generadas por computadoras*.

Con el paso de los años la computadora se ha integrado a la visualización y actualmente constituye una herramienta fundamental en ella. Esta capacidad de visualización de gran alcance de la computadora no tiene precedentes y no puede compararse con los medios de enseñanza tradicionales. Ahora, conceptos abstractos que han demostrado ser difíciles de explicar para los profesores o de entender para los estudiantes, utilizando métodos de enseñanza tradicionales, ahora pueden ser modelados y comprendidos utilizando la animación y la capacidad de visualización gráfica que ofrecen las computadoras.

En línea con esta evolución, se ha desarrollado software especializado para graficación y otros que entre sus capacidades tienen la graficación. La hoja de cálculo es uno de estos últimos. Como resultado, muchas personas no son conscientes de que se puede utilizar este software para dibujar gráficas muy complejas. En este artículo, vamos a mostrar cómo la hoja de cálculo se puede utilizar para dibujar diferentes tipos de gráficas, así como hacer uso de simulaciones para resolver problemas de optimización.

Si uno observa los libros de texto para el curso de Cálculo Diferencial, se encuentra que la mayoría presenta la siguiente secuencia: Números reales, funciones, límites, continuidad y derivación; de manera que cuando han sido tratados estos elementos básicos, encontramos como aplicaciones del cálculo diferencial, el estudio de las gráficas de las funciones y, a continuación, la resolución de problemas de optimización utilizando principalmente el concepto de derivada de una función (4, 5, 6). Con la hoja de cálculo es posible resolver los problemas de optimización al inicio de los cursos de cálculo.

Abordamos aquí el estudio y resolución de los problemas de optimización utilizando la hoja de cálculo; conjugaremos diferentes sistemas de representación (numérico, gráfico y algebraico) que servirán para enriquecer el planteamiento y para la resolución de los problemas.

## EL PROBLEMA

Los artículos y reportes de investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo nos muestran las dificultades que presentan los estudiantes en la solución de los problemas de optimización de este curso, así como traducir del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico para dar una solución a este tipo de problemas (7, 8, 9,10).



También se reporta que en gran parte de los cursos de Cálculo se enseñan estos problemas de manera tradicional: el profesor explica los contenidos desarrollando algoritmos, formas y estrategias de solución. El alumno, como un simple espectador y receptor de la temática expuesta, intenta repetir los pasos, algoritmos y formas de solución que le fueron expuestas, en consecuencia es un simple repetidor de formas y estrategias. Incluso también se reporta que uno de los problemas más graves que confronta la enseñanza de las matemáticas es la fuerte carga operativa en deterioro de la parte conceptual (8, 11, 12, 13). Conviene señalar que la enseñanza de los problemas de optimización no está fuera de esta problemática.

## LA HOJA DE CÁLCULO

Aunque originalmente fue desarrollada para el mundo de los negocios, las hojas de cálculo se siguen utilizando para los propósitos de la educación matemática. Si bien esto puede explicarse en parte debido a la amplia disponibilidad de las computadoras personales en las escuelas, los hogares y las empresas, es también una consecuencia de sus capacidades que incluyen a ciertos tipos de trabajo matemático.

En particular, la hoja de cálculo se ha convertido en una poderosa herramienta de trabajo en el campo educativo debido a que sus funciones principales permiten estructurar y representar modelos de la forma más diversa. Por otro lado, aunque no es tan versátil como otros graficadores, la representación gráfica de los datos numéricos permite hacer representaciones bastante buenas de todo tipo de funciones que se estudian, desde la secundaria hasta la universidad.

Se ha elegido la hoja de cálculo para la enseñanza del cálculo diferencial, por el conocimiento básico que los alumnos y profesores tienen de él y por la flexibilidad de ser utilizado en otras áreas de la especialidad. La hoja de cálculo es una herramienta interesante de considerar en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de la matemática. El uso de este recurso contribuye a que los estudiantes aumenten sus experiencias en matemática y adquieran una nueva perspectiva dinámica sobre el uso y sobre las potencialidades analíticas del programa (14).

## SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Para potenciar la construcción de los conceptos

relativos al análisis matemático Artigue (15) sugiere buscar un mejor equilibrio entre las diferentes representaciones de los mismos: la representación geométrica, la numérica, la algebraica y la verbal. Asimismo Werle y Vertuan, (16) señalan que un modelo matemático puede ser escrito usando diferentes sistemas semióticos. Una ecuación, una tabla, una gráfica, son ejemplos de sistemas semióticos que pueden ser usados para representar modelos matemáticos.

Por otra parte Duval (17) indica que construir el significado de los objetos matemáticos implica la capacidad de transformación de las representaciones, que admite dos formas, la *conversión* y el *tratamiento*. Si la transformación se realiza al interior de un mismo registro semiótico, se denomina transformación de tratamiento; por ejemplo, la realización de un cálculo algebraico, como  $(n+1)(n+1) = (n+1)^2$  representa una transformación en el registro algebraico. Si la transformación se realiza entre

dos registros semióticos diferentes, se denomina transformación de conversión; por ejemplo, transformar una relación descrita en lenguaje natural, como "*n es un número negativo*", en una relación expresada en lenguaje algebraico, como " *$n < 0$* ".

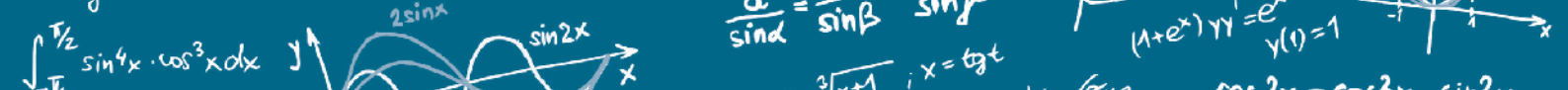
Algunos autores proponen el uso de las tecnologías como instrumentos de mediación semiótica para introducir conceptos y relaciones matemáticas, gracias a su potencialidad para

presentar simultáneamente varias representaciones de un mismo concepto y para favorecer la interacción y el dinamismo (18, 19).

En este artículo se propone la hoja de cálculo para mostrar al estudiante propiedades y comportamientos de los objetos matemáticos que en un pizarrón o con lápiz y papel no son posibles de ver. Además, desde el punto de vista de Duval, la hoja de cálculo facilita el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, debido a que posee tres registros de representación (algebraico, gráfico y tabular). Lo cual implica que el estudiante está en constante contacto con dichos registros, permitiéndole conocer y manipular saltando de un registro a otro, proporcionándole así mismo un aprendizaje significativo.

Uno de los problemas con el que nos encontramos frecuentemente en la enseñanza de los problemas de optimización es, precisamente, la multiplicidad de los sistemas de representación usados en diferentes contextos, así como las relaciones entre las diferentes formas de representar una misma idea. Por tanto el



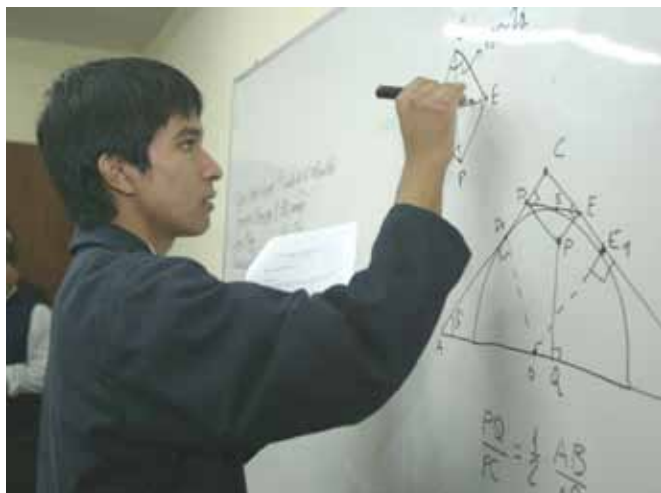


propósito, para mejorar la enseñanza consiste en que los alumnos sean capaces de desarrollar la habilidad de elegir la representación más adecuada, pasar de una a otra y que reconozcan la importancia o valor de ver un cierto problema desde diferentes puntos de vista. De aquí que el uso adecuado de actividades de simulación y modelación diseñadas en la hoja de cálculo permite generar destreza en el planteamiento de los problemas, lograr que los alumnos se familiaricen con los procesos abstractos y desarrollen la habilidad de cambiar entre los distintos sistemas de representación.

### EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Para ilustrar el uso de la hoja de cálculo se diseñaron algunas actividades didácticas que modelan problemas de optimización utilizando los sistemas de representación con el propósito de proporcionar una manera de obtener resultados de forma "experimental", con lo cual se aspira a convertir el salón de clase en un pequeño laboratorio, donde se "reconstruyen" las condiciones de los problemas planteados y se generan modelos que a su vez ayuden a encontrar la solución correspondiente.

A continuación se muestran algunos ejemplos de los problemas que se han diseñado, sin profundizar en el trabajo que se realiza en el aula; pues se trata de mostrar solo el uso de la hoja de cálculo en el diseño de actividades.



#### Ejemplo 1

Esta actividad está diseñada para explorar varios enfoques que resuelven el problema de maximizar el área de un rectángulo con perímetro fijo en el contexto del "gallinero de un granjero". Se trata de exponer un procedimiento para modelar el problema en varios registros de representación utilizando la hoja de cálculo.

##### Problema del gallinero

Un granjero desea construir un gallinero rectangular para la crianza de gallinas. Tiene 40 metros de malla para gallinero y desea utilizar todo el material disponible. ¿Cuáles

deben de ser las dimensiones del gallinero de mayor área posible que se puede construir?

### Representación geométrica

Primero se trabaja sobre la simulación geométrica de las posibles formas de construir el gallinero con las condiciones dadas en el problema. Se trata de dibujar un rectángulo en el cual se muestra que cambian sus dimensiones, lado1, lado 2, y el área correspondientes cuando se presiona sobre un objeto de control de número (Figura 1).

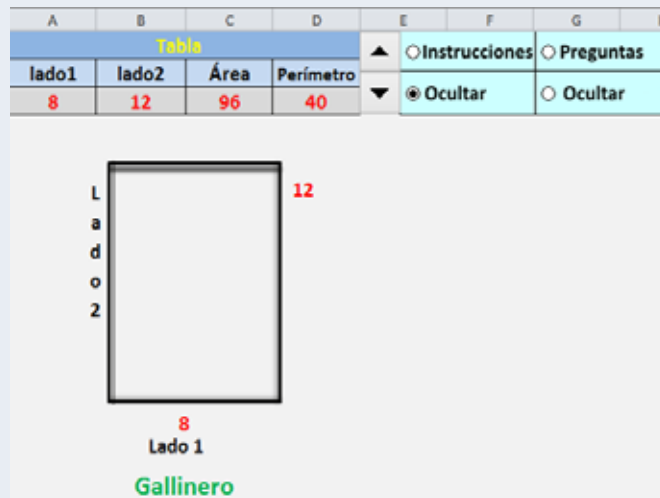


Figura 1. En el rectángulo cambian las medidas de los lados.

### Representación numérica

Cuando se hace clic sobre el control de número se simula la construcción del gallinero con diferentes medidas, cambian los datos de la tabla y el estudiante debe de completar las celdas vacías (Figura 2). Algunas de las medidas del rectángulo no se muestran en la tabla.

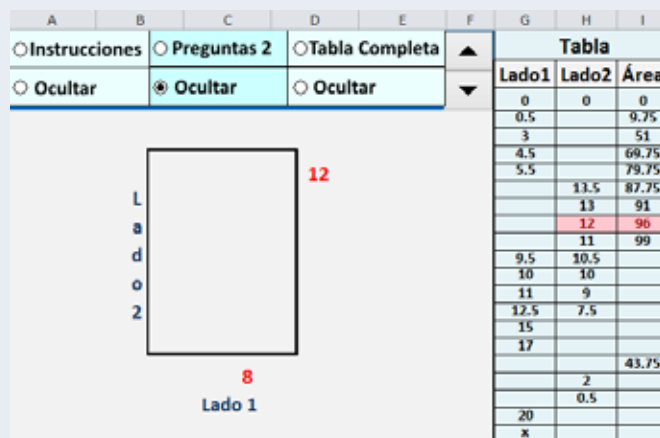


Figura 2. El estudiante debe de llenar las celdas vacías.

## Representación gráfica

Cuando se hace clic sobre el control de número se simula la construcción del gallinero con diferentes medidas, cambian los datos de la tabla y se construye la gráfica (Figura 3). En el botón *ver pregunta 3*, que se muestra en la figura 3, se hacen preguntas como: ¿Podrías dar el dominio y el rango de la gráfica?

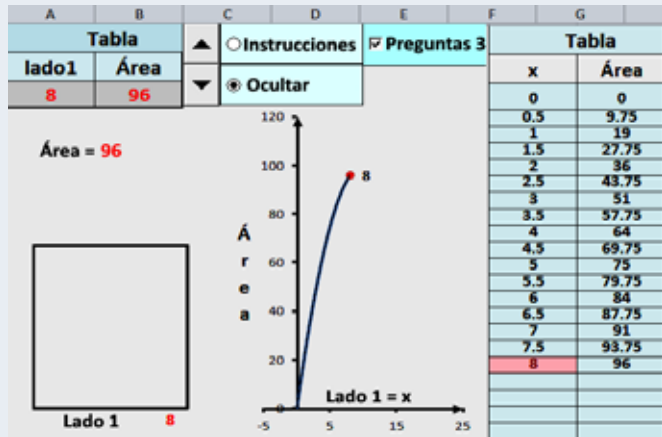


Figura 3. Los datos del rectángulo, la gráfica y la tabla cambian al mismo tiempo.

## Ejemplo 2

### Problema del cilindro circular

Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de altura 12 m y radio de la base de 3 m.

### Representación geométrica

Cuando se hace clic sobre el control de número se simula el movimiento del cilindro al interior del cono y todos los valores cambian (Figura 4).

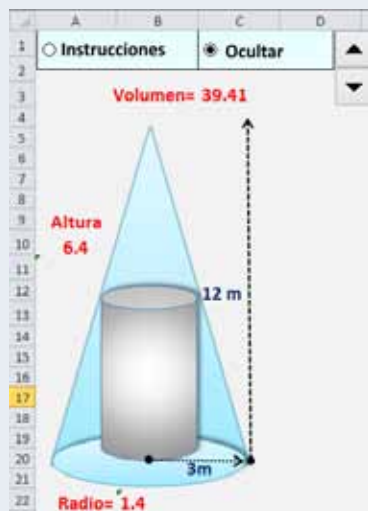


Figura 4. La altura y el radio del cilindro cambian al interior del cono.

## Representación numérica

Cuando se hace clic sobre el control de número se simula el movimiento del cilindro al interior del cono, cambian los datos del cilindro y los de la tabla (Figura 5).

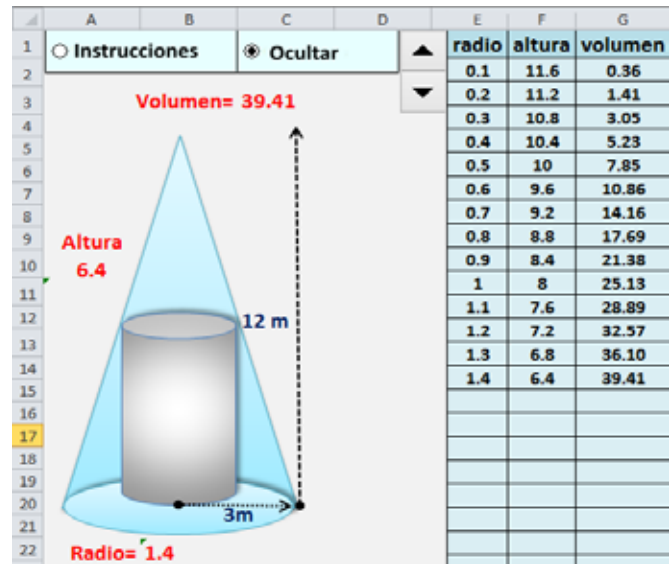
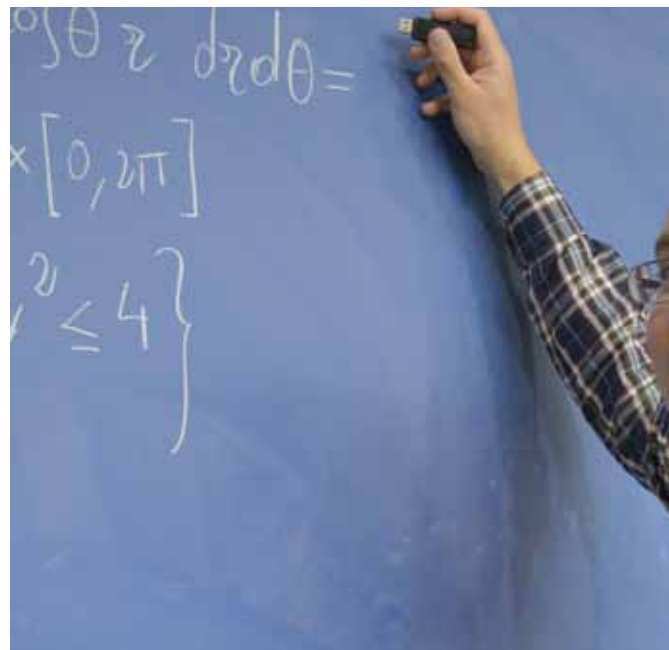


Figura 5. Representación gráfica y numérica.

## Representación gráfica

Cuando se hace clic sobre el control de número se simula el movimiento del cilindro al interior del cono, cambian los valores numéricos, cambian los datos de la tabla y se observa un movimiento en la gráfica (Figura 6).



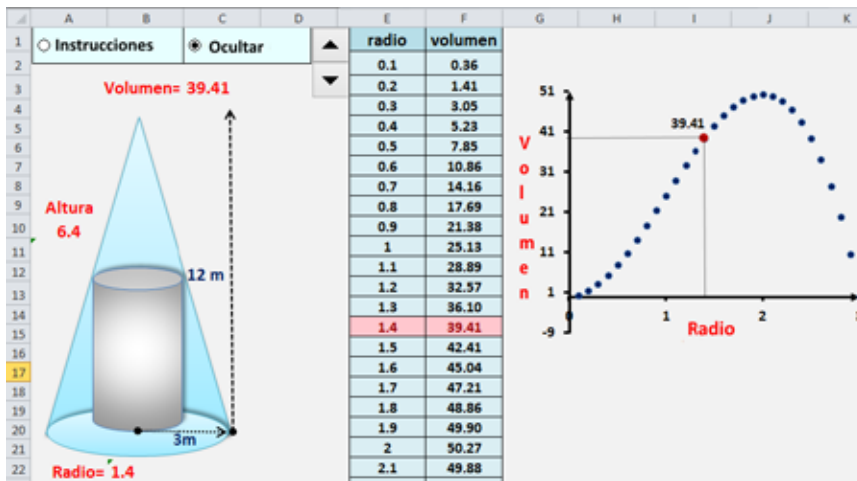


Figura 6. Se muestran las tres representaciones en una sola hoja de cálculo.

### Ejemplo 3

Determinar los cuadrados de las esquinas que se deben de cortar, de una lámina cuadrada de 13 cm de lado para construir una caja de base cuadrada, sin tapa que tenga volumen máximo.

En esta hoja de cálculo se simula la construcción de la caja y se presentan las tres representaciones la geométrica, la numérica y la gráfica. (Figura 7).

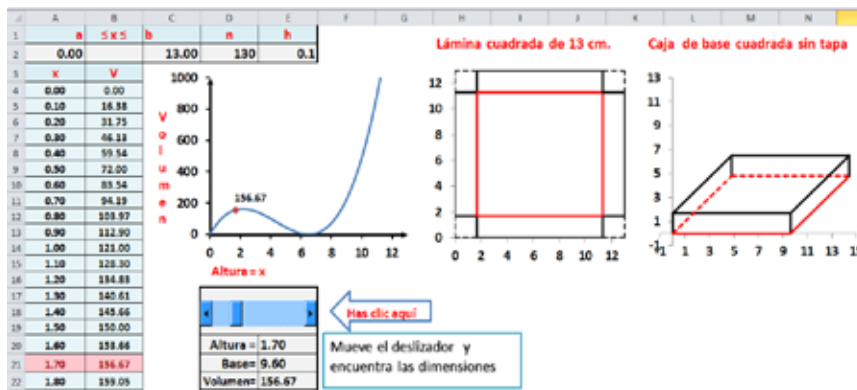
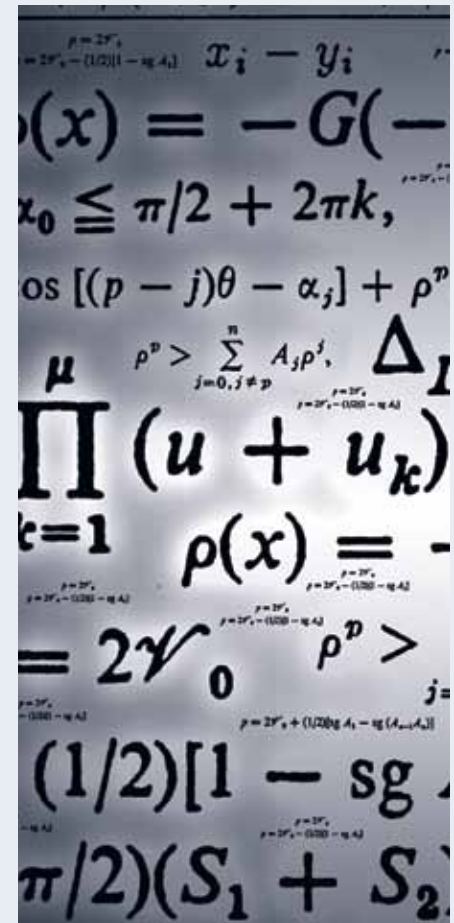
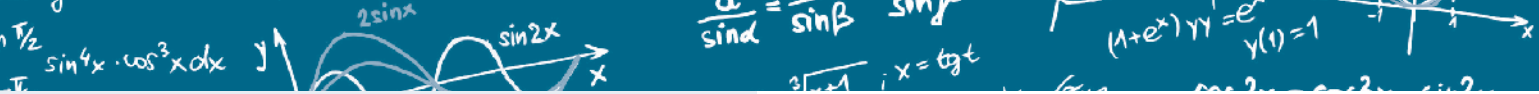


Figura 7. Representaciones del problema de la caja sin tapa.

### CONCLUSIONES

En el artículo mostramos las ventajas de la Hoja de Cálculo para representar los problemas de optimización del cálculo diferencial, aquí debemos de hacer notar que la sola manipulación de las representaciones y de las hojas de cálculo por más bonitas o dinámicas que se vean no son suficientes para desarrollar la comprensión de este tema en los estudiantes. Se requiere utilizar estas representaciones junto a una estrategia didáctica de enseñanza para facilitar un procesamiento más profundo del tema. Estrategias que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones, construir y descubrir el conocimiento por sí mismos.





Las hojas de cálculo han adquirido un lugar en el repertorio de las tecnologías de importancia para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en los treinta años desde su invención. Parte de su importancia radica en su disponibilidad generalizada dentro y fuera de los entornos escolares. En este artículo hemos demostrado que las características esenciales de las hojas de cálculo son invaluable para construir los objetos que permiten que los estudiantes exploren algunos aspectos de las matemáticas. La inclusión de estas características parece extender el radio de influencia de la hoja de cálculo como un dispositivo útil para la educación matemática y merece la atención explotarlo adecuadamente.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- 2) Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Pirámide, Madrid.
- 3) Zimmerman & Cunningham (1991). Introducción de los editores: ¿Qué es la visualización matemática? In W. Zimmerman & Cunningham (Eds.), *MAA notes number 19: Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp.67-76). MAA.
- 4) Stewart, J. (2006). *Cálculo. Conceptos y contexto*. Tercera edición. Cengage Learning.
- 5) Zill, Dennis G., & Wright Warren S. (2011). *Cálculo de una variable*. Cuarta edición. McGraw Hill.
- 6) Thomas, G. B. (2006). *Cálculo de una variable*. Undécima edición. Pearson.
- 7) Villegas, J. L., Castro, E. y Gutiérrez, J. (2009). Representaciones en resolución de problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, Volume 7. Pp. 279-308.
- 8) Moreno, G. S. y Cuevas, V. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación Matemática*. Vol. 16, no. 002. Pp. 93-104
- 9) Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 15, Tomo 1, Pp.67-73, México.
- 10) Camacho, M. M. y González, M. A. (1998). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de bachillerato y su resolución con la TI-92. *Aula 10*, 1998. Pp. 137-152. Ediciones Universidad de Salamanca.
- 11) Amit, M. y Shlomo, V. (1990). Some Misconceptions in Calculus – Anecdotes or the Tip of an Iceberg? *Proceedings Fourteenth PME Conference, México*, I. Pp. 3-10.
- 12) Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Nueva York, Academic Press.
- 13) Hiebert, J. y P. Lefevre (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis" In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates. Pp. 1-27
- 14) Smith, R. (2005). Spreadsheets in the Mathematics Classroom. *Proceedings of KAIST International Symposium on Enhancing U. Mathematics Teaching*. Corea.
- 15) Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (Pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- 16) Werle, L., & Vertuan, R. (2011). Registros de representación semiótica em atividades de modelagem matemática: uma categorização das praticas dos alunos. *Revista União. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*.
- 17) Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168
- 18) Lagrange, J.B. y Artigue, M. (2009). Student's activities about functions at upper secondary Level: A grid for designing a digital environment and analyzing uses. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. y Sakodidis, H. (Eds.). *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 3 (Pp. 465-472). Thessaloniki, Greece: PME.
- 19) Tall, D., Smith, D. y Piez, C. (2008). Technology and calculus. En M.K. Heid y G.W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. Research Syntheses*. Vol. 1 (Pp. 207-258). Charlotte N.C.: NCTM-IAP.