



## Una propuesta para la enseñanza – aprendizaje de la probabilidad condicional

Autores: Díaz Rosemary, López Camilo, Montes Andrés, Rodríguez Diana

Universidad de Los Andes

Noviembre 04- 2016



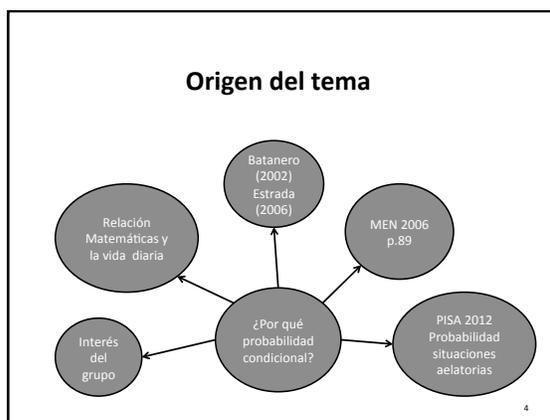
## Presentación

1. Introducción
2. Diseño previo
3. Nuevo diseño
4. Conclusiones

2

## 1. Introducción

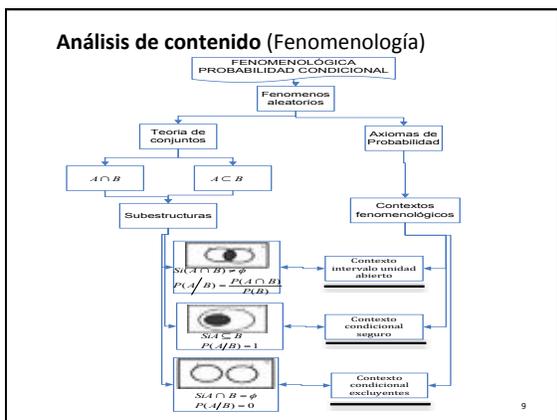
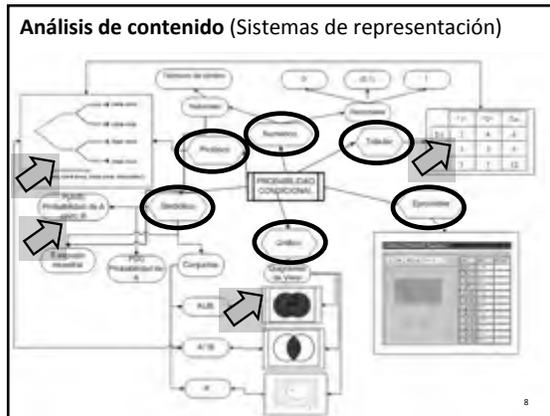
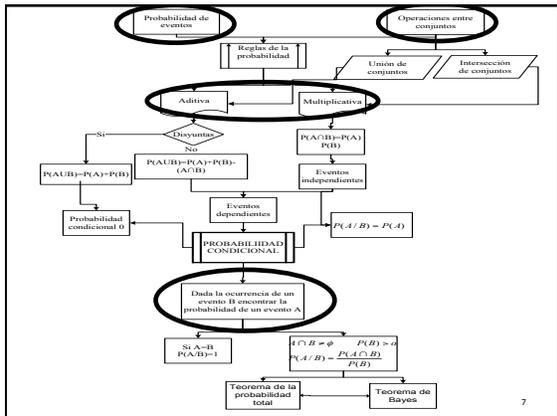
3



## 2. Diseño

5

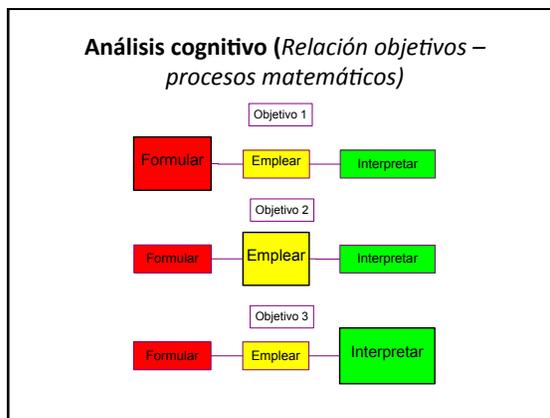
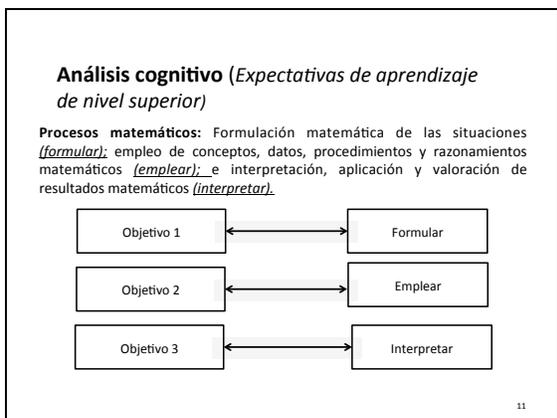




**Análisis cognitivo** (*Expectativas de aprendizaje de nivel superior*)

**Capacidades matemáticas fundamentales:** comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, y utilización de herramientas matemáticas.

Se relacionan directamente con los tres procesos que fundamentan la planeación de matemáticas en el colegio Robert F. Kennedy (comunicación, razonamiento y modelación).



### Análisis cognitivo Expectativas de nivel medio (objetivos)

1. **Reconocer situaciones** en las que es posible aplicar la noción de probabilidad condicional en distintos contextos y expresar la situación matemáticamente.
2. **Resolver situaciones** que involucran la probabilidad condicional haciendo uso de sistemas de representación, diagramas de árbol, tablas de contingencia, gráfico y ejecutable para establecer relaciones entre sí, determinando intersección y dependencia de eventos.
3. **Interpretar resultados** obtenidos con el modelo de probabilidad condicional para darle sentido en contextos de la vida cotidiana.

13

### Análisis cognitivo (Expectativas de nivel inferior)

```

    graph TD
      A[Conocimientos previos] --> B[Teoría de conjuntos]
      A --> C[Probabilidad]
      B --> D["* Halla la intersección de dos o más conjuntos  
* Halla el complemento de un conjunto"]
      C --> E["* Calcula la probabilidad simple.  
* Identifica espacios muestrales."]
    
```

14

### Análisis cognitivo (Expectativas de nivel inferior)

Capacidades

Capacidades operacionales	Sistemas de representación	Probabilidad
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar situaciones aleatorias</li> <li>• Organiza datos de la tarea</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagramas de Venn</li> <li>• Diagrama de árbol</li> <li>• Tabla de contingencia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Razón de probabilidad</li> <li>• Identifica situaciones probabilidad condicional</li> </ul>

15

### Análisis cognitivo (Dificultades y errores)

**En la literatura:**

*Huertas y Lonjedo (2007)*. La no correcta interpretación de un enunciado puede provocar algunos errores en los estudiantes como: reconocimiento de los eventos de manera no adecuada (evento condicionante y condicionado).  
*Contreras (2011)*. Asumir la conmutatividad de la probabilidad condicional.

**Listado:**

- ✓ Emplear probabilidad simple en situaciones de probabilidad condicional.
- ✓ Escoger el espacio muestral incorrecto, sin tener en cuenta el condicionante.
- ✓ Confundir las probabilidades  $P(A|B)$  con  $P(A/B)$

16

### Análisis cognitivo (Caracterización de un objetivo)

```

    graph TD
      1.1[1.1 Reconoce la importancia de la información adicional para calcular la probabilidad solicitada.] --> 1.2[1.2 Organiza los datos, reconoce las condiciones de la probabilidad solicitada y organiza un sistema de representación]
      1.2 --> 1.3[1.3 Representa la situación en un diagrama de árbol]
      1.2 --> 1.4[1.4 Representa la información en un diagrama de Venn]
      1.2 --> 1.5[1.5 Organiza los datos en una tabla]
      1.3 --> 1.8[1.8 Calcula probabilidad de los eventos utilizando la razón de probabilidad.]
      1.4 --> 1.8
      1.5 --> 1.8
      1.6[1.6 Ajusta las decisiones tomadas acorde a información que no fue considerada inicialmente] --> 1.7[1.7 Reconoce los eventos solicitados y calcula su intersección para hallar la probabilidad solicitada.]
      1.7 --> 1.8
      1.8 --> 1.9[1.9 Formula relaciones entre el resultado obtenido y la situación planteada.]
    
```

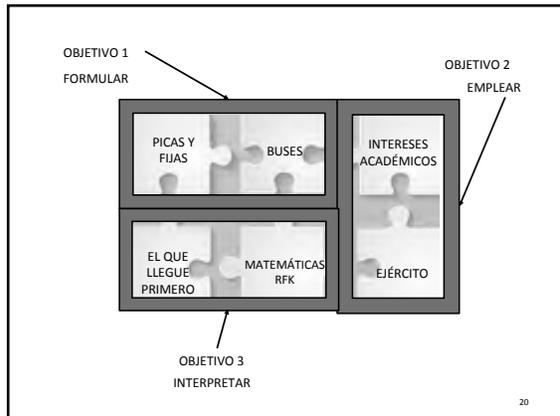
17

### Análisis cognitivo (Dimensión afectiva)

Enfoques (González y Gómez, 2014) y PISA 2012

**EA.** Desarrollar interés por la argumentación de resultados en situaciones de la vida diaria que involucren la noción de la probabilidad condicional.

18



Tarea Fijas y picas	Tarea Buses
	<p style="text-align: center;">10 estudiantes</p> <p style="font-size: small;">Sabiendo que el bus de grado sexto no se llenó. ¿Cuál es la probabilidad de que se llene el bus de primaria?</p>
<p>Introducir noción empírica de probabilidad condicional.</p>	<p>Uso del modelo matemático de Probabilidad condicional</p>

2121

Tarea Intereses académicos	Tarea Ejército
<p>Organizar datos mediante el uso del sistema de representación diagrama de Venn.</p>	<p>Organizar datos mediante el uso del sistema de representación diagrama de árbol.</p>

2222

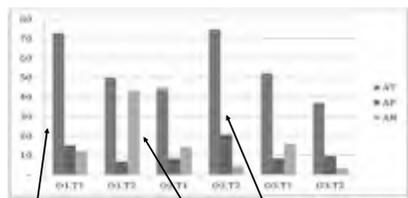
Tarea Matemáticas RFK	Tarea El que llegue primero
<p>Interpretar la información en situaciones aleatorias para determinar la probabilidad condicional</p>	

2323

## Implementación y evaluación

24

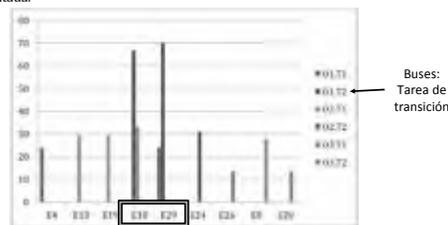
### Resultados de la contribución de las tareas



Picas y fijas      Buses      Ejército

25

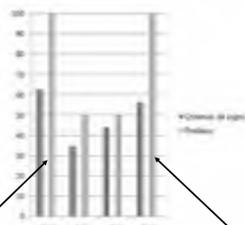
E10 (1.8) y E29 (1.9), relacionados con calcular erróneamente operaciones aritméticas y determinar erróneamente la probabilidad solicitada.



Buses:  
Tarea de transición

26

### Evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva



Vida diaria Vs probabilidad condicional

Matematización

27

## 3. Tareas objetivo 1

28

### Análisis de instrucción

#### T. Buses

Diez estudiantes de grado undécimo, del colegio Robert F Kennedy que estaban en una salida pedagógica, se quedaron de los buses de los grados superiores y ahora deben abordar alguno de los buses que quedan. Como no encontraron un bus con los 10 cupos, viajaron repartidos entre 3 buses: el que lleva a los niños de preescolar, el que lleva a los niños de primaria y el de los niños de sexto que tenían 3, 4 y 5 cupos respectivamente.

Teniendo en cuenta únicamente la información suministrada y **sabiendo que** el bus que lleva a los estudiantes de sexto no se llenó, ¿Cuál es la probabilidad de que sí se llenara el bus de primaria?

29

### T. Picas y Fijas

JUGADAS REGISTRADAS				FIJAS	PICAS
NÚMERO EN MI MANEJA					
2	9	4	7	1F	
5	1	9	0		2P
5	9	1	3	2F	1P
7	5	0	6	NADA	
Tareas varían (diferencia del apoyo)					
1	9	7	0	2F	
Tareas varían (diferencia del apoyo)					
8	3	9	1	4P	
1	9	8	3	OPCIÓN 1	
1	9	3	8	OPCIÓN 2	

30

**Picas y Fijas**  
10P4 = 5040 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

JUGADAS REGISTRADAS				FIJAS	PICAS
★	★	★	★		
2	9	4	7	1F	
5	1	9	0		2P
5	9	1	3	2F	1P
7	5	0	6	NADA	
1	9	7	0	2F	
8	3	9	1	4P	
1	9	8	3	OPCIÓN 1	
1	9	3	8	OPCIÓN 2	

31

**Picas v Fijas**  
6P4 = 360 1 2 3 4 ~~5~~ ~~6~~ 7 8 9 ~~0~~

JUGADAS REGISTRADAS				FIJAS	PICAS
★	★	★	★		
2	9	4	7	1F	
5	1	9	0		2P
5	9	1	3	2F	1P
7	5	0	6	NADA	
1	9	7	0	2F	
8	3	9	1	4P	
1	9	8	3	OPCIÓN 1	
1	9	3	8	OPCIÓN 2	

32

**Picas v Fijas**  
4P4 = 24 1 ~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7 8 9 ~~0~~

JUGADAS REGISTRADAS				FIJAS	PICAS
★	★	★	★		
2	9	4	7	1F	
5	1	9	0		2P
5	9	1	3	2F	1P
7	5	0	6	NADA	
1	9	7	0	2F	
8	3	9	1	4P	
1	9	8	3	OPCIÓN 1	
1	9	3	8	OPCIÓN 2	

33

**Picas y Fijas**  
1 3 8 9

JUGADAS REGISTRADAS				FIJAS	PICAS
NÚMERO EN MI CABEZA					
2	9	4	7	1F	
5	1	9	0		2P
5	9	1	3	2F	1P
7	5	0	6	NADA	
1	9	7	0	2F	
8	3	9	1	4P	
1	9	8	3	OPCIÓN 1	
1	9	3	8	OPCIÓN 2	

34

Reducir posibilidades

5040

360

24

2

35

4. Nuevo diseño

36

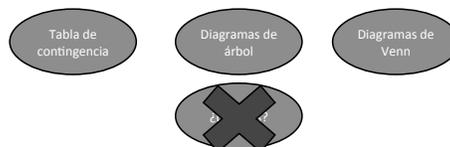
### Formulación Buses

Diez estudiantes de grado undécimo del colegio Robert. F Kennedy que estaban en una salida pedagógica, se quedaron de los buses de los grados superiores y ahora deben abordar alguno de los buses que quedan para regresar al colegio. Como no encontraron un bus con los 10 cupos, viajaron repartidos entre 3 buses: el que lleva a los niños de preescolar, el que lleva a los niños de primaria y el de los niños de sexto que tenían 3, 4 y 5 cupos respectivamente.

37

### LA PREGUNTA

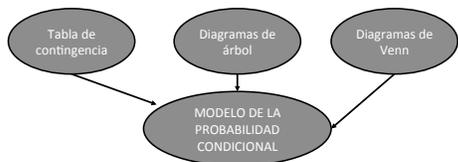
¿Cuál es la probabilidad de que el bus de primaria venga lleno, sabiendo que el bus de sexto no se llenó?



38

### LA PREGUNTA

¿Cuál es la probabilidad de que el bus de primaria venga lleno, sabiendo que el bus de sexto no se llenó?



39

¿Dónde está el problema?

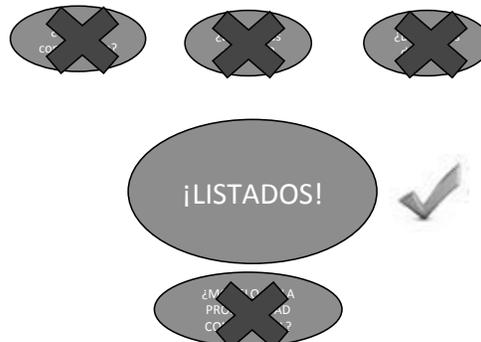
40

### Resolvimos como profesores

vimos la riqueza de la actividad  
¿Cómo resolvieron los estudiantes?



41



42

### Generar mas información antes de la pregunta

Completa el listado con todas las posibilidades que tienen los 10 estudiantes para regresar al colegio (sigue el ejemplo de la primera fila y no olvides que puedes agregar a la tabla todas las filas que consideres necesarias)

Possibilidad	BUS PREESCOLAR (3 cupos)	BUS PRIMARIA (4 cupos)	BUS DE SEXTO (5 cupos)
1	3 ESTUDIANTES	4 ESTUDIANTES	3 ESTUDIANTES
2			
3			

¿De cuántas DISTINTAS formas podrían los estudiantes regresar al colegio en los buses disponibles?

43

### Modificación tarea Buses

El primer bus en llegar al colegio fue el de los estudiantes de sexto y cuando el coordinador comprobó que ese bus no tenía cupo le pidió al conductor si sabía si el bus de primaria se había llenado, a lo que el señor respondió "pues yo voy primero y no me fue", a lo que el coordinador preguntó nuevamente "¿y usted que cree?", el conductor se acordó de los buses y la respuesta "pues profeso en curso de 6to de años, entonces que las posibilidades son 10 y 20, en otros puede estar que el curso que sé" y así fue en el bus de 6to.

a) ¿Crees que el conductor está en lo cierto y es correcta la probabilidad de que el bus de primaria se llenara sabiendo que el bus de sexto no se llenó en la 1ª?

b) De todas las posibilidades que encontraste en el listado ¿En cuántas ocurre que el bus de sexto salga sin llenar el cupo? Resáltalas en la tabla.

c) De las posibilidades en las que el bus de sexto sale con el cupo completo ¿En cuántas el bus de primaria sale con el cupo completo? Resáltalas en la tabla.

d) ¿Cuál es entonces la probabilidad de que el bus de primaria venga lleno, sabiendo que el bus de sexto no se llenó?

e) ¿El conductor estaba en lo cierto?

44

b) De todas las posibilidades que encontraste en el listado ¿En cuántas ocurre que el bus de sexto salga sin llenar el cupo? Resáltalas en la tabla

Possibilidad	BUS PREESCOLAR (3 cupos)	BUS PRIMARIA (4 cupos)	BUS DE SEXTO (5 cupos)
	1 ESTUDIANTES	4 ESTUDIANTES	5 ESTUDIANTES
1	3	4	3
2	1	3	4
3	3	2	3
4	2	1	5
5	1	4	5
6	2	4	4

45

c) De las posibilidades en las que el bus de sexto sale sin el cupo completo ¿En cuántas el bus de primaria sale con el cupo completo? Resáltalas en la tabla.

Possibilidad	BUS PREESCOLAR (3 cupos)	BUS PRIMARIA (4 cupos)	BUS DE SEXTO (5 cupos)
	1 ESTUDIANTES	4 ESTUDIANTES	5 ESTUDIANTES
1	3	4	3
2	1	3	4
3	3	2	3
4	2	1	5
5	1	4	5
6	2	4	4

46

## 7. Conclusiones

47

### Nuestra unidad didáctica:

- ✓ Es un aporte para los profesores que se interesan por el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad.
- ✓ Es una herramienta, que permite a nuestros colegas el desarrollo del tema probabilidad condicional con estudiantes de grado undécimo.
- ✓ Es una propuesta que considera contextos cercanos al estudiante, uso de sistemas de representación, marco conceptual PISA 2012.
- ✓ Es un aporte para la problemática que presentan los estudiantes al confundir probabilidad simple con la probabilidad condicional.
- ✓ Una propuesta que se enfoca en el uso de recursos y materiales para generar interés en los estudiantes hacia el contenido.

48

## Adaptaciones a otros contextos



### Nuestra unidad didáctica:

- ✓ Aun cuando se desarrolló como una herramienta, que permitiera a nuestros colegas el desarrollo del tema probabilidad condicional con estudiantes de grado undécimo, puede ser fácilmente adaptable a otros contextos.  
(se ha implementado parcialmente en la universidad Uniminuto en el curso de probabilidad y estadística)
- ✓ La propuesta didáctica ha tenido una implementación completa en el 2015 y ha sido incorporada parcialmente con las estudiantes del Gimnasio Iragua en el año académico 2015-2016.
- ✓ Es un aporte para la problemática que presentan los estudiantes al confundir probabilidad simple con la probabilidad condicional.
- ✓ Permite una transición mas amable entre los conceptos trabajados desde la intuición y la rigurosidad de las formulas usadas en un curso de estadística.

50

## Referencias

- Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Pág. 1-75. Universidad de Granada. España Recuperable en, [http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6\\_Estocastica.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf)
- Carrillo, F. (2002). "Andréi Nikoláyevich Kolmogórov". Documento de, Apuntes de historia de las matemáticas. vol. 1, no. 3, septiembre 2002. pág. 1-12. Acceso en <http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-3-5-kolmogorov.pdf>
- Colegio Robert F. Kennedy. (2013). PEI .Comunicación, liderazgo y convivencia, como factores de cambio. Bogotá: documento de trabajo.
- Estrada, A. y Díaz, C. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. Universitat de Lleida. Universidad de granada. Pág. 1-8. Recuperable en [http://funes.uniandes.edu.co/1295/1/Estrada2006Un\\_SEIEM\\_277.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1295/1/Estrada2006Un_SEIEM_277.pdf)

51

- Gómez, P., Carulla, C. (2001). Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Gaia. Disponible en <http://is.gd/Shsoi3>
- Gómez, P., Mora, M. (2015). Apuntes Módulo 4 de MAD3: Análisis de instrucción. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes Disponible en: [www.dropbox.com/s/nrmm978izwuavyv/ApuntesModulo4MAD3.pdf?dl=0](http://www.dropbox.com/s/nrmm978izwuavyv/ApuntesModulo4MAD3.pdf?dl=0)
- González, M., Gómez, P. (2015). Apuntes Módulo 3 de MAD3. Análisis de cognitivo. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <https://www.dropbox.com/s/9hbjq2veh6nc7a/ApuntesModulo3MAD3.pdf?dl=0>
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias. Descargado el 30/1/2014, de <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>

52